Democrazia:questione di matematica

Lorenzo Monacelli

3 dicembre 2014

Democrazia: La miglore forma di governo? Per rispondere a questa domanda non useremo la filosofia, la politica o la giurisprudenza, useremo l'unica disciplina che è senza macula d'errore e certissima per se (cit. Dante Alighieri): La matematica.

Supponiamo di avere N individui che ragionano indipendentemente gli uni dagli altri. Devono scegliere un leader che conduca il loro governo, tra due possibilità.

Ciascuno di loro ha una probabilità di scegliere il leader migliore poco maggiore del 50 %, Qual è la probabilità che la maggioranza di loro scelga il miglior leader?

Se pensate che sia poco maggiore del 50 % vi state sbagliando di grosso: indichiamo con p la probabilità che ciascun cittadino scelga il leader migliore:

$$p = \frac{1}{2} + \varepsilon \tag{1}$$

Dove ε può essere anche un numero molto piccolo. La probabilità di avere n voti favorevoli su N votanti è data dalla statistica binomiale:

$$p(n, N) = \begin{pmatrix} n \\ N \end{pmatrix} p^n (1-p)^{N-n} \tag{2}$$

Questa distribuzione per N sufficientemente grande tende alla distribuzione di Gauss:

$$p(n, N) \approx \frac{e^{\frac{(pN-n)^2}{2pN(1-p)}}}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} \tag{3}$$

Cerchiamo ora la probabilità che n sia maggiore di $N/2$. Costruiamo la variabile gaussiana rinormalizzata:

$$z = \frac{Np - n}{\sqrt{Np(1-p)}} \tag{4}$$

Il taglio della distribuzione gaussiana è:

$$z_0 = \frac{Np - N/2}{\sqrt{Np(1-p)}} \tag{5}$$

$$z_0 = \frac{N\varepsilon}{\sqrt{N(\frac{1}{2}+\varepsilon)(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} \approx \frac{2N\varepsilon}{\sqrt{N}} = 2\varepsilon\sqrt{N} \tag{6}$$

Per avere una probabilità maggiore del 99,9 % di scegliere il leader corretto la variabile z_0 deve essere maggiore di 5:

$$2\varepsilon\sqrt{N} = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad N = \frac{6.25}{\varepsilon^2} \tag{7}$$

Supponiamo che la probabilità p degli individui sia appena del 50.05 % di scegliere correttamente il prorpio leader, con N = 25.000.000 (25 milioni) di individui si ha la certezza che la maggioranza di loro scelga correttamente. In Italia siamo 60 milioni, se tutti ragionassimo con la propria testa, avremmo la certezza assoluta di eleggere sempre il miglior leader possibile.

Se ammettiamo tuttavia che la classe dirigente italiana non sia poi la migliore possibile ci deve essere un problema da qualche parte. Nel conto precedente abbiamo supposto che i voti degli elettori siano tutti indipendenti tra loro. Proviamo adesso a rilassare questa ipotesi.

Costruiamo una simulazione in cui ciascun individuo è connesso all'interno di una rete di comunicazione con gli altri. Per rendere questa rete verosimile abbiamo simulato una rete di tipo scale-free, che è una buona approssimazione delle relazioni umane, in cui la maggior parte degli individui hanno poche connessione (la gente comune), e pochi individui hanno tantissime connessioni (personaggi di spicco).

La probabilità che un individuo faccia la scelta giusta è data da:

$$p = \frac{1}{2} + \varepsilon + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \frac{n - m}{N_{joint}} \tag{8}$$

Dove n rappresenta il numero di connessioni di quell'individuo con persone che hanno già compiuto la scelta giusta, m rappresenta il numero di connessioni con persone che hanno già compiuto la scelta sbagliata, e N_{joint} il numero totale di connessioni di quell'individuo.

La chiave del successo del metodo democratico considerando gli elettori indipendenti sta nel fatto che la media del risultato fatta su tanti elettori riduce drasticamente la fluttuazione casuale, rendendola facilmente molto inferiore di quel ε che permette di ottenere una maggioranza. Se confrontiamo queste fluttuazioni statistiche nel caso di elettori indipendenti a quello di elettori dipendenti otteniamo una brutta sorpresa.

Nel grafico (Figura 1) è riportata la fluttuazione statistica (deviazione standard) del voto in funzione del numero di elettori in entrambi i casi.

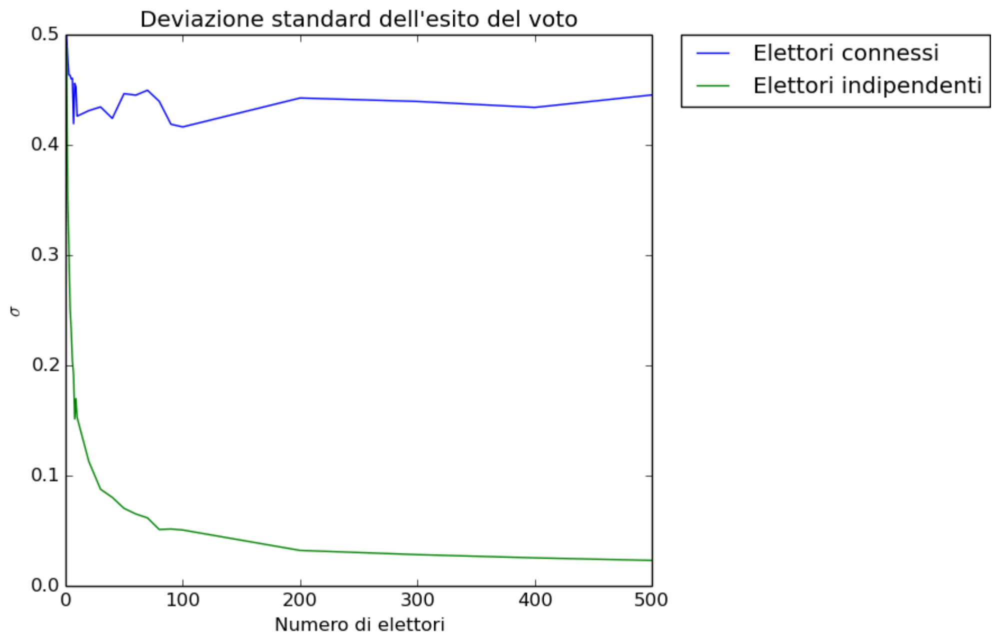

Figura 1: Deviazione standard del voto in funzione del numero di elettori.

Dalla figura si può vedere bene come nel caso di elettori indipendenti la deviazione standard decresce come $1/\sqrt{N}$. Il caso di elettori dipendenti risulta invece disastroso, la deviazione standard non mostra alcuna diminuzione all'aumentare di N. Questo vuol dire chè le fluttuazioni statistiche sono molto più importanti in questo caso, rendendo molto più probabile, anche per alti valori di N, che la maggioranza degli elettori faccia la scelta sbagliata.

A questo fatto matematico può essere data una spiegazione qualitativa semplice: Il primo elettore che compie la scelta influenzerà di conseguenza tutti gli elettori a cui e connesso, una scelta sbagliata all'inizio si ripercuote molto facilmente su tutti gli elettori che lo circondano, rendendo il risultato finale molto più incerto.

Tuttavia poiché si ha quell' ε di probabilità in più che gliu elettori all'inizio riconoscano correttamente il migliore risultato, anche la decisione positiva si propaga con successo. Possiamo aspettarci che la percentuale di elettori media che compie la scelta giusta sia maggiore rispetto al caso di elettori indipendenti, come è mostrato in Figura 2 dove sono stati graficati i risultati della simulazione:.

Le grandi oscillazioni che mostra la linea blu sono dovute dalle grandi fluttuazioni statistiche che la simulazione con elettori dipendenti mostra rispetto alla riga verde (meno frastagliata).

Si nota chiaramente tuttavia che il migliore che il valore medio della decisione è ben sopra il 55 % ($\varepsilon = 0.05$) che distingue il campione indipendente.

Non resta che chiederci come si compensano questi due effetti? Il grafico in Figura 3 mostra la probabilità che la maggioranza degli elettori scelga bene.

Questa è circa costante nella simulazione che tiene conto delle interazioni, mentre cresce vertiginosamente nel caso di elettori indipendeti.

Come si vede tra i 10 e i 20 elettori vi è la transizione di quale metodo è il migliore.

In altri termini se abbiamo una piccola commissione (composta da meno di 10 persone) il fatto che possano parlare tra di loro favorisce l'esito del giudizio. Viceversa se la commissione è grande (circa 20 persone) è molto più conveniente

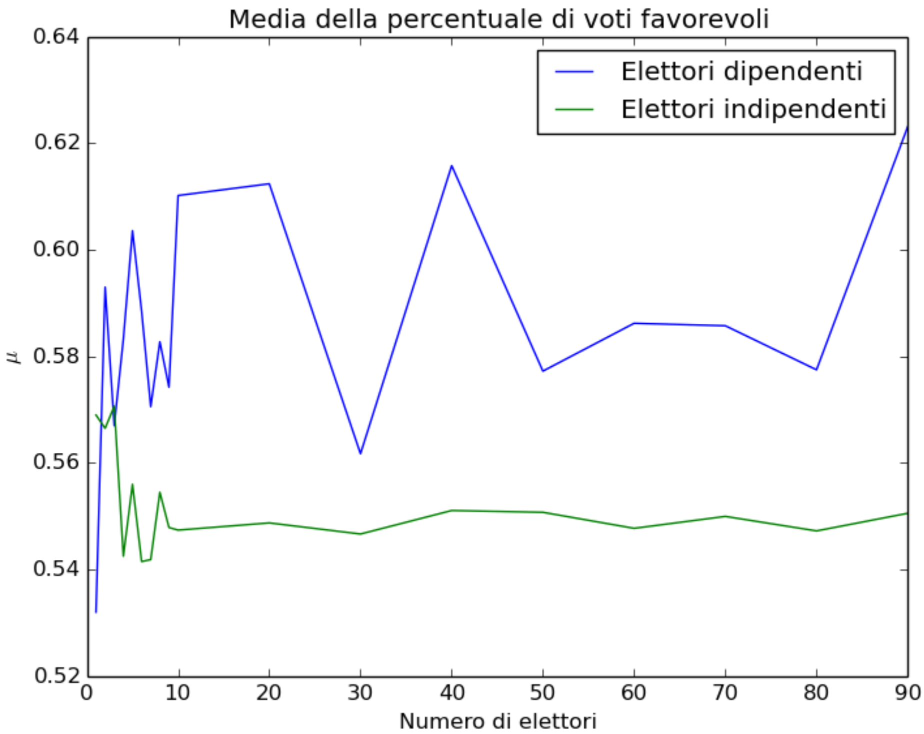

Figura 2: Percentuale media di votanti che hanno fatto la scelta migliore.

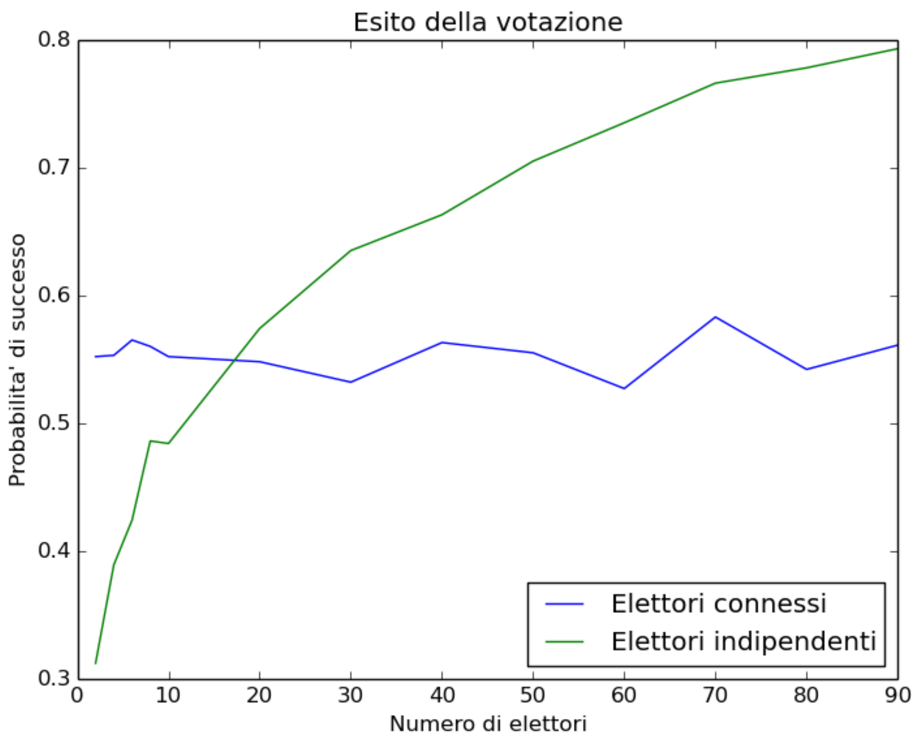

Figura 3: Probabilità che la maggioranza degli elettori faccia la migliore scelta, con $\varepsilon = 0.05$

far emettere a ciascuna persona un giudizio senza dargli la possibilità di confrontarsi con gli altri, e poi unire tutti i risultati.

Tutta questa analisi è stata condotta con un valore di ε del 5 %. Se questo valore aumenta il numero N di persone a cui avviene il sorpasso del metodo indipendente è ancora più basso, come dimostra la Figura 4, simulato con ε del 15 % (La probabilità che ciascun elettore facesse la migliore scelta è del $50 + 15 = 65$ %)

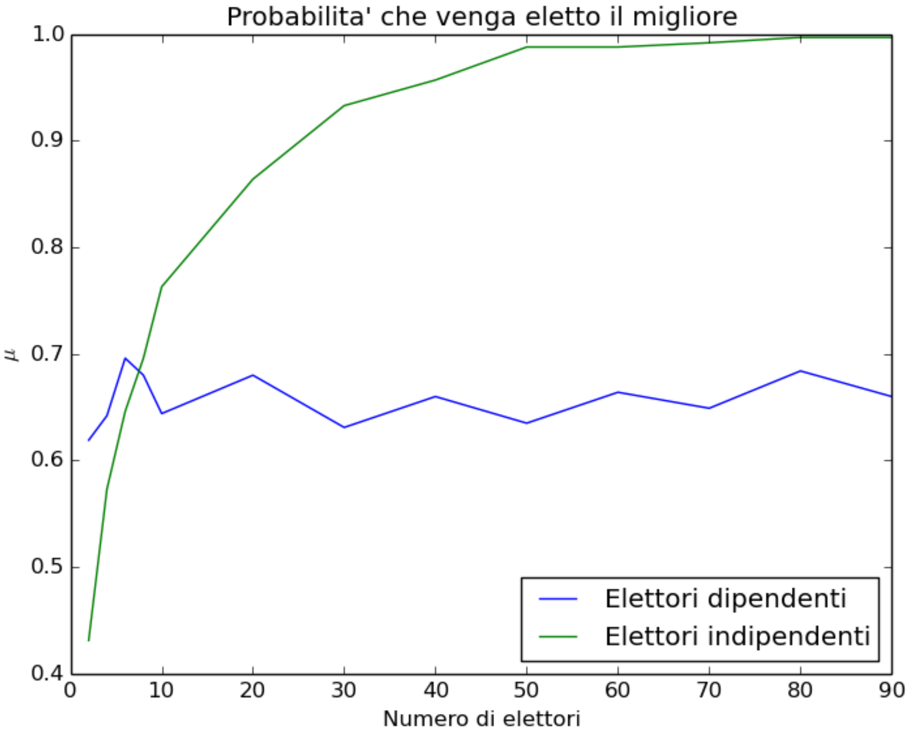

Figura 4: Probabilità che più della metà degli elettori faccia la scelta corretta, con $\varepsilon = 0.15$