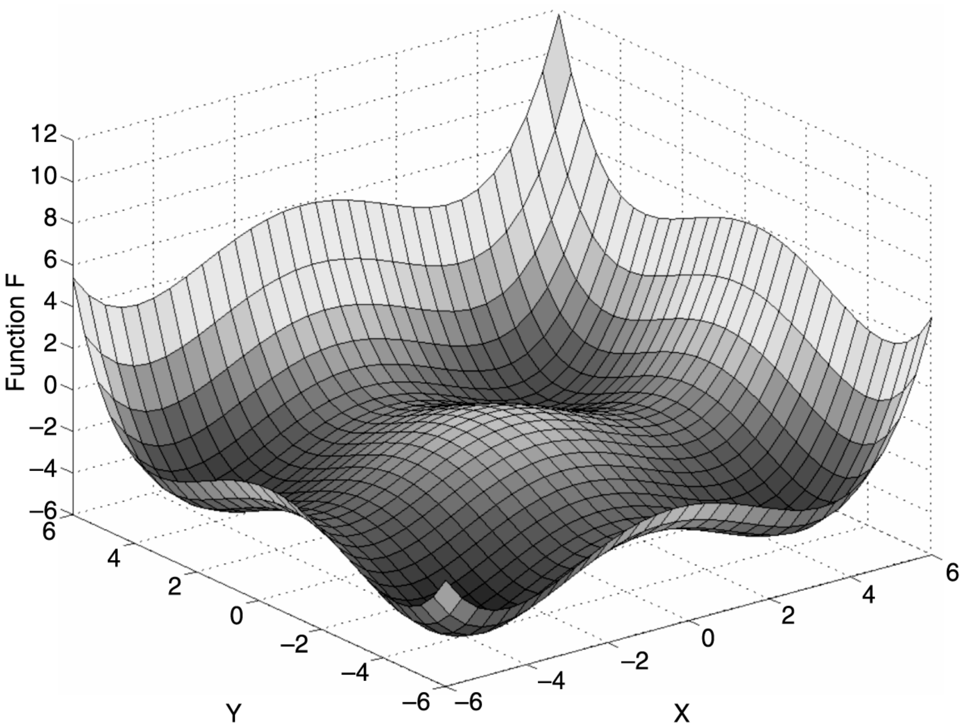
Appunti di Analisi Vettoriale

Lorenzo Monacelli, Mattia Miotto

6 ottobre 2012



Indice

Capitolo 1

Funzioni a due variabili

In questo capitolo affronteremo i primi problemi per poter sviluppare dei metodi sicuri per passare allo studio di funzioni a più variabili.

Il vero passaggio importante sta nell'estendere i principali concetti dell'analisi funzionale a una dimensione a due dimensioni. Estendere poi da due a una generica dimensione finita è lavoro semplice.

I primi paragrafi di questi appunti avranno lo scopo di estendere alcuni concetti che ci sono familiari alle due dimensioni.

1.1 Sottoinsiemi del piano

Il primo problema consiste nell'estendere gli intervalli della retta ai sottoinsiemi del piano. Possiamo ad esempio voler parlare di sottoisieme limitato possedendo una sicura definizione che derivi da quella di intervallo limitato.

Una definizione intuitiva di sottoinsieme del piano limitato è quella di dire che tutti i punti del nostro insieme $\mathcal{I}$ sono contenuti in un insieme più grande. In parole povere, che esiste un numero M che maggiora la norma di tutti i punti dell'insieme $\mathcal{I}$. In termini matematici:

Definizione 1 (Insieme limitato) *Si definisce un insieme limitato se rispetta la seguente condizione:*

$$\forall\,(x_0, y_0) \in \mathcal{I}\ \exists M:\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq M^2 \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{I}$$

Gli insiemi limitati possono distinguersi in aperti o chiusi. Possiamo trovare anche per questi una scrittura analoga al caso unidimensionale, ricordiamo la definizione di intervallo aperto:

Definizione 2 (Intervallo aperto) *Si definisce l'intervallo $\mathcal{I} =]a, b[$ aperto se, e solo se vale la seguente implicazione:*

$$\forall x_0 \in \mathcal{I}\ \exists M : |x - x_0| < M \Rightarrow x \in \mathcal{I}$$

Detta a parole, un intervallo è aperto se preso un qualunque punto dell'intervallo, posso costruire un intorno dell'intervallo che contiene tutti punti dell'insieme.

Analogamente in due dimensioni possiamo dire che un insieme è aperto quando, scelto comunque un punto dell'insieme, è possibile costruire un disco, centrato su quel punto, che contenga solo punti dell'insieme di partenza.

Formalizziamo l'espressione:

Definizione 3 (Insieme aperto) *Un insieme è aperto se vale:*

$$\text{Sia } D_R(x_i, y_i) = \left\{(x, y) : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 < R^2\right\}$$

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{I}\ \exists R > 0 :\ (x, y) \in D_R(x_0, y_0) \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{I}$$

Possiamo subito dare una definizione di insieme chiuso:

Definizione 4 (Insieme chiuso) *Un insieme è chiuso quando il suo complemetare è aperto.*

Notiamo subito che esistono insiemi che non sono ne aperti ne chiusi, e insiemi che sono contemporaneamente aperti e chiusi, e sono $\emptyset$ e tutto $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Punti interni e di frontiera

Sfruttiamo le attuali definizioni di insiemi aperti e chiuse per classificare i punti dell'insieme.

Definizione 5 *(Punto di frontiera) Un punto di coordinate (x_0, y_0) si definisce di frontiera per l'insieme $\mathcal{I}$ se ogni disco di centro in quel punto ha intersezione diversa da $\emptyset$ sia con l'insieme $\mathcal{I}$ che con il suo complementare.*

$$\text{Sia } D_R(x_i, y_i) = \left\{(x, y) : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 < R^2\right\}$$

$$\forall R > 0 : [D_R(x_0, y_0) \cap \mathcal{I}] \neq \emptyset \ \text{ e } \ \left[D_R(x_0, y_0) \cap \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{I}\right] \neq \emptyset$$

Definizione 6 *(Punto interno) Un punto di coordinate (x_0, y_0) è interno all'insieme $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^2$ se scelto un disco di qualunque raggio diverso da zero centrato in quel punto, contiene solo punti dell'insieme $\mathcal{I}$*

Si può notare come la definizione di punto interno è indipendente da quella di insieme aperto, pur essendo molto simile. È possibile dare una nuova, e più elegante definizione all'insieme aperto sfruttando quella di punto interno:

Definizione 7 *(Insieme Aperto) Un isieme è aperto se tutti i punti dell'insieme sono punti interni*

Si può con facilità verificare che questa definizione è del tutto equivalente a quella della definizione (3). Allo stesso modo possiamo usare la definizione di punto di frontiera per dare una definizione analoga a quella di insieme chiuso.

Definizione 8 *(Insieme Chiuso) Un insieme è chiuso quando tutti i punti di frontiera per quell'insieme appartengono all'insieme stesso.*

In questo modo siamo riusciti a trovare due definizioni analoghe alle precedenti, ma più eleganti.

1.1.2 Punti di accumulazione

L'ultima definizione importante da dare sugli insiemi per poter passare ad affrontare l'argomento dei limiti delle successioni a due variabili sono i punti di accumulazione. Questi punti possono essere o non essere elementi dell'insieme, possono essere punti interni o di frontiera, ma non possono essere punti isolati.

Definizione 9 *(Punto di accumulazione) Sia $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y, 0)$ è un punto di accumulazione se ogni disco aperto di centro in (x_0, y_0) contiene punti di $\mathcal{I}$ diversi da (x_0, y_0):*

$$\textit{Sia } D_R(x_i, y_i) = \left\{(x, y) : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 < R^2\right\}$$
$$\forall R > 0\, \exists P \in D_R(x_0, y_0) \textit{ con } P \neq (x_0, y_0) : \; P \in \mathcal{I}$$

1.2 Limiti di successioni

Prima di considerare i limiti delle funzioni a due variabili iniziamo parlando del limiti di punti del piano: anche in questo caso facciamo il parallelo con il caso unidimensionale, in $\mathbb{R}$ una successione x_n tende a x_0 ha un significato chiaro:

$$\text{Sia } x_n \in \mathbb{R} \text{ con } x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; \forall \varepsilon > 0,\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \; |x_n - x_0| < \varepsilon \text{ per } n > N$$

In altre parole: esiste sempre un naturale N tale che tutti i punti della successione x_n successivi a N si trovano all'interno di un intorno di x_0 piccolo a piacere (da cui ovviamente dipende N).

Possiamo provare ad estendere questo concetto alle due dimensioni, e usare la *norma* di un vettore, al posto del modulo.

Definizione 10 (Norma) *Si definisce Norma euclidea di un vettore $P = (x_1, \ldots, x_n)$ nello spazio euclideo quella quantità:*

$$||P|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Questa definizione di norma euclidea risulta essere la distanza euclidea, posso quindi esprimere la distanza tra due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ in questo modo:

$$||P_1 - P_2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Quindi dire che una successione di punti P_n tende a P_0 vuol dire che fissata una qualunque distanza minima da P_0 posso sempre trovare un N tale che tutti i termini successivi della successione P_n abbiano distanza da P_0 minore di quella distanza minima.

Usando termini matematici:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : ||P_n - P_0|| < \varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon \tag{1.1}$$

Si può dimostrare che se le dimensioni dello spazio in cui ci troviamo sono finite questa definizione equivale a dire che i punti convergono componente per componente. In termini matematici scrivendo $P_n = (x_n, y_n)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$

$$\forall \eta > 0,\ \exists N_\eta \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \eta \text{ e } |y_n - y_0| < \eta\ \forall n > N_\eta \tag{1.2}$$

Possiamo dimostrare che queste due definizioni sono equivalenti: Infatti se è vera la prima, è vera pure la seconda. Fissato ε in modo che sia soddisfatta la (1.1), vale che:

$$|x_n - x_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$$

$$|y_n - y_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$$

Quindi è automaticamente soddisfatta anche la (1.2). Stesso discorso al contrario, basta che controlliamo che vale per la disugaglianza triangolare che:

$$|x_n - x_0| + |y_n - y_0| \geq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

Fissiamo per $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$ in modo che sia soddisfatta la (1.2) e abbiamo che:

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \geq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

Da cui segue subito che:

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$$

1.2.1 Norma di un vettore

Nella scorsa sezione abbiamo visto una definizione di norma, la definizione 10. In realtà possiamo dare più definizioni di norma, senza che cambi la definizione di limite delle successioni. Queste definizioni sono del tutto equivalenti in una dimensione, ma non in due o più, come mostra la Figura 1.1.

$$||P||_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

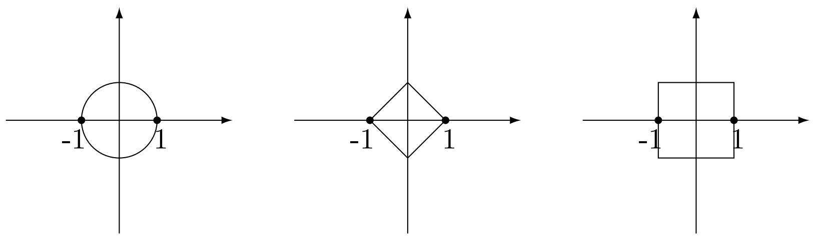
$$||P||_1 = |x| + |y| \tag{1.4}$$

$$||P||_2 = \max\{|x|, |y|\} \tag{1.5}$$

Possiamo subito vedere che:

$$||P||_1 \leq ||P||_0 \leq ||P||_2 \leq 2 \cdot ||P||_1$$

I disegni sulle varie norme possono illustrare bene questo comportamento:



(a) $||P||_0 < 1$, vedi (1.3) (b) $||P||_1 < 1$, vedi (1.4) (c) $||P||_2 < 1$, vedi (1.5)

Figura 1.1: Confronto tra le tre norme definite. Come si può vedere definiscono tutte e tre un intorno di un punto, e quindi sono equivalenti al fine dell'uso che ne abbiamo fatto per descrivere i limiti delle successioni.

Possiamo quindi avvicinarci ad un punto sia attraverso cerchi, quadrati o rombi, il concetto di fondo non cambia. Questo ci dice che le norme prese in esame si dicono *equivalenti*.

1.3 Funzioni a più variabili

Per iniziare a trattare le funzioni a più variabili, consideriamo il caso $n = 2$, con la premessa che quanto detto vale per n variabili. Cominciamo con il ricordare i passaggi chiave dello studio di funzioni a una variabile e vediamo poi come adattarli al caso di n variabili, data una funzione bisogna:

- determinare il dominio della funzione
- stabilire se è continua e fare i limiti negli eventuali punti di discontinuità

- determinare l'andamento della funzione per valori molto grandi e molto piccoli della x, ossia fare i limiti a $\pm\infty$
- trovare i massimi e i minimi, ossia fare la derivata prima e porla uguale a zero
- trovare i punti di flesso con la derivata seconda
- graficarla

Bene, questi sono i passaggi salienti per lo studio di funzioni ad una variabile, ora vediamo quali sono ancora validi aumentando il numero di variabili. Per quanto riguarda la determinazione del dominio, questa rimane, con l'unica differenza che ora dovremo indicare i valori accettabili di tutte le variabili che abbiamo e prestare attenzione al fatto che se prima si aveva necessariamente che

$$f : D \subseteq R \longrightarrow R$$

Ovvero f mandava valori di R in R, ora possiamo avere una funzione che manda valori da R^2 in R oppure da R^2 in R^2 e così via, in simboli:

$$f : D \subseteq R^2 \longrightarrow R \qquad\qquad f : D \subseteq R^2 \longrightarrow R^2$$

Anche il secondo punto, lo studio dei limiti, rimane possibile, anche se più difficile. Prima di addentrarci nei particolari, ricordiamo che si definisce punto di accumulazione, un punto tale che se si prende un intorno piccolo a piacere intorno al punto, questo intorno appartiene al dominio. Questa premessa ci serve poichè i punti di accumulazione sono i punti dove ha senso fare il limite, se il punto non è di accumulazione non vale la definizione di limite. Ora consideriamo una funzione di dominio R^2 che manda i valori in R, definiamo il limite:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \vec{l} \tag{1.6}$$

$$\exists \quad \delta > 0 \quad / \quad \forall \epsilon > 0 \quad \|P - P_0\| < \delta \quad \rightarrow \quad \|f(\vec{P}) - \vec{l}\| < \epsilon$$

Notiamo subito che la definizione è identica a quella per una variabile, con al posto dei moduli le distanze euclidee. Ora senza metterci a dimostrare le proprietà dei limiti, ci basta dire che rimangono inalterate, il limite della somma di due funzioni è la somma dei limiti, lo stesso per la differenza e la moltiplicazione; per la divisione bisogna solo prestare attenzione al denominatore, come al solito! Detto ciò, siamo in grado di calcolare parecchi limiti per sostituzione e l'unico problema compare quando otteniamo le forme intederminate e zero al denominatore, poichè in questo caso non possiamo nè usare i limiti da destra e da sinistra nè il teorema di De Hopital, poichè in R^2 non esiste il concetto di ordine, e la nozione di avvicinarsi da destra/sinistra non ha senso, infatti bisognerebbe avviciarsi da tutte le direzioni di un piano che sono infinite!

Un modo semplice per vedere subito se il limite *non* esiste è sfuttare un teorema che dice che se il limite esiste nell'insieme D, allora dovrà esistere anche in un sottoinsieme K, di D. In questo modo possiamo ricondurci a $n = 1$, considerando tutte le rette, per sostituzione. Un esempio chiarirà quanto detto! Si consideri il limite della funzione:

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Sostituiamo $x = t \qquad y = mt$

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{t \cdot mt}{t^2 + m^2 \cdot t^2} \to \lim_{x,y \to 0,0} \frac{m}{1 + m^2}$$

[1] Si vede come il limite varia a seconda del coefficiente angolare e quindi poichè il limite se esite è unico, dobbiamo concludere che non esiste! Vediamo adesso un altro esempio, dove stavolta le rette non sono sufficienti;

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Sostituiamo come prima:

$$\lim_{t \to 0} \frac{t \cdot m^2 \cdot t^2}{t^2 + m^4 \cdot t^4} \to \lim_{t \to 0} \frac{m^2 t}{1 + m^4 t^2} = 0$$

Bene ora sembrerebbe che il limite esista e sia 0, ma per verificarlo ricordiamo che dovrebbe valere zero lungo tutti i cammini possibili! Proviamo a seguire un cammino parabolico, sostituiamo cioè $x = t^2 \qquad y = t$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} \to \lim_{t \to 0} \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Ecco che il limite è diverso quindi non esiste. Ora chiediamoci cosa fare se incontriamo una funzione indefinita limitata! Il primo passo da fare è vedere se intanto con le rette si ottiene un valore, poi un modo non troppo difficile di procedere è usare il teorema dei carabinieri, e ragionare sulla distanza, facciamo un esempio, consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

l'unico limite che crea problemi è quello a (0,0), usando le rette si vede che il limite sebra essere 0. Ora notiamo che

$$0 \leq |x^2 y^2| \cdot \frac{1}{|x^2 + y^2|} = \frac{|x| \cdot |x| \cdot |y| \cdot |y|}{x^2 + y^2}$$

[1] dove la t è stata raccolta e semplificata

e anche che $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ allora abbiamo

$$0 \leq \frac{|x| \cdot |x| \cdot |y| \cdot |y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

poichè il primo e l'ultimo termine della disuguaglianza tendono a 0 anche la funzione è limitata a 0. In generale data una funzione f(x,y) che si ipotizza limitata a L , basta trovare una funzione g(x,y) limitata anch'essa a L, e che soddisfi la disuguaglianza:

$$0 \leq |f(x,y) - L| \leq g(x,y)$$

Alcune volte può anche essere utile cambiare le coordinate cartesiane in quelle polari, in questo caso avremo che $x = \rho\cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad y = \rho\sin(\theta)$ e dovremo avere

$$\rho < \delta \qquad \rightarrow \qquad |f(x_0 + \rho\cos(\theta), y_0 + \rho\sin(\theta))| < \epsilon \qquad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

Anche qui facciamo un esempio per chiarire il concetto, prendiamo

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

possiamo ragionare sulla distanza oppure passare alle coordnate polari e avere per un dato θ

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3\cos^3(\theta) \cdot \rho^2\sin^2(\theta)}{\rho^4} = \rho|\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)| \leq \rho$$

Ora seni e coseni non sono mai maggiori di uno, quindi la parte destra della disuguaglianza è sempre minore di ρ e se ρ tende a zero anche la funzione tenderà al medesimo valore. Concludiamo questa parte sui limiti, trattando i limiti di funzioni che hanno come risultato un vettore, cioè per esempio

$$f : D \subseteq R^2 \rightarrow R^2 \qquad \lim_{P \to P_0} f(\vec{P}) = \vec{V}$$

il limite esiste se

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta \text{ tale che } 0 \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_0)^2} < \delta \rightarrow \sqrt{\sum_{i=0}^{n}(f(P) - v_i)^2}$$

in parole povere il vettore si scompone nelle componeti e se ne fanno i limiti, se essi esistono e coincidono allora la funzione è limitata.

1.4 Differenziali

1.4.1 Derivata parziale

Nelle funzioni ad una sola dimenzione è possibile definire la derivata parziale in un intorno destro o sinistro di un punto, purché la funzione sia continua e derivabile in quell'intorno, anche se il punto è un estremo dell'intervallo. Questo discorso non vale per le funzioni a più variabili. Le derivate parziali possono essere calcolate solo per i punti interni[2].

Possiamo dare subito una definizone di derivata parziale:

Definizione 11 *Sia $\mathcal{A}$ un aperto di $\mathbb{R}^2$, e $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{A}$.*

$$f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

$$Se\ \exists L \in \mathbb{R} :\ L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Allora

$$L = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

Chiaramente la definizione può essere estesa a qualunque variabile.

Purtroppo mentre la derivabilità di una funzione unidimensionale ci dice tantissime cose, la derivabilità di una funzione a più variabili ci da pochissime informazioni.

Un esempio chiaro di questo è la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} = 1 & \text{se } x = 0 \text{ o } y = 0 \\ = 0 & \text{se } x \neq 0\ y \neq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

In questo caso esistono le derivate parziali nell'origine, e valgono ovunque zero, quindi sono continue. Ma la funzione è discontinua in tutti quei punti, ne ammette l'esistenza di un piano tangente.

Possiamo provare a risolvere il problema introducendo un nuovo concetto: la **differenziabilità**.

1.4.2 Il piano tangente

Possiamo provare ad estendere alcune delle belle proprietà della derivabilità in una dimensione alle due dimensioni provando a trovare il piano tangente di una superficie in un punto, un po' come al livello unidimensionale trovavamo la retta tangente alla curva.

Per rinfrescarci un po le idee in una dimensione la retta tangente alla curva in un punto corrisponde al polinomio di Taylor del primo grado:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x^2)$$

[2]Per la definizione di punto interno vedi la definizione 6.

Il termine aggiunto deve essere così composto, perché la funzione ammetta l'esistenza di una retta tangente:

$$o(x^2) = \sigma(x)(x - x_0) \qquad per\ x \to x_0; \sigma(x) \to 0$$

Ovvero moltiplicando il resto per la distanza del punto otteniamo un valore prossimo allo zero.

Proviamo ad estendere questo concetto alle due dimensioni[3]

Possiamo definire il piano tangente ad una superficie sfruttando le derivate parziali.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

Anche in questo caso abbiamo un resto $E(x, y)$. Posso trovare una condizione analoga alla precedente, che se si verifica, implica l'esistenza del piano tangente nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Definizione 12 *(Differenziabilità di una funzione in un punto) Una funzione è **differenziabile** in un punto P_0 se è possibile scrivere l'errore $E(x, y)$ associato al polinomio di Taylor del primo grado in questa formula:*

$$E(x, y) = E(P) = ||P - P_0||\sigma(P),\ \sigma(P) \to 0,\ P \to P_0$$

Si nota subito che la funzione (1.7) non soddisfa nell'origine i criteri di differenziabilità, pur possedendo entrambe le derivate parziali continue in quel punto, infatti basta prendere un punto P che non giace sugli assi molto vicino all'origine per accorgersi che $E(x, y) = 1$, e quindi non risulta soddisfatta la condizione di differenziabilità.

Purtroppo è molto scomodo calcolare la differenziabilità di una funzione partendo dalla definizione 12, ma per fortuna ci viene in ausilio un teorema importante: il teorema del **differenziale totale**.

1.4.3 Teorema del differenziale totale

Teorema 1 *(Differenziale totale) Se esistono le derivate pariziali di tutti i punti in un intorno di P_0, allora la funzione è differenziabile in quel punto.*

L'implicazione più importante di questo teorema è che tutte le funzioni continue in ogni punto e di cui esistono le derivate parziali e sono continue, sono differenziabili in ogni punto:

$$Se\ f \in C^1(\mathcal{A}) \Rightarrow f \text{ è differenziabile in ogni punto di } \mathcal{A}$$

Questo teorema ci permette di procedere con il calcolo delle derivate usando la regola della derivazione delle funzioni composte.

[3]Al solito il passaggio dalle due alle n dimensioni è molto facile.

Dimostrazione

Il nostro obbiettivo è quello di trovare l'incremento di una funzione in un intorno del suo punto:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

Aggiungiamo e sottraiamo un valore:

$$f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \tag{1.8}$$

Ricordiamo il teorema di Lagrange:

$$\exists \xi \in (x, x_0) : \ f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nel caso particolare quindi:

$$f_x(\xi, y) = \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0}$$

$$f_y(x_0, \eta) = \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

Usiamo queste derivate parziali per riscrivere la (1.8).

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(\xi,y)(x-x_0) + f_y(x_0,\eta)(y-y_0)$$

Come si può vedere siamo arrivati ad una formula molto simile a quella dei polinomi di Taylor, l'ultimo passo da fare è quello di aggiungere e sottrarre nuove quantità:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) +$$

$$+ f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f_x(\xi,y)(x-x_0) + f_y(x_0,\eta)(y-y_0)$$

Raccogliamo a fattor comune e otteniamo la formula del polinomio di Taylor.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + E(x,y)$$

Dove risulta che:

$$E(x,y) = \left[f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)\right](x-x_0) + \left[f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\right](y-y_0)$$

Come si nota subito questo resto rispetta pienamente la definizione di differenziabilità, in quanto all'avvicinarsi di P a P_0, dovendo essere le derivate parziali continue le differenze tendono a zero.

$$[f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)] = \sigma(x) \to 0$$

$$[f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)] = \sigma(y) \to 0$$

In altre parole $E(x,y)$ è un differenziale di ordine maggiore di uno!