

# Meccanica statistica e fenomeni critici

Lorenzo Monacelli

26 gennaio 2016

## Prefazione

Gli appunti raccolti sono frutto delle lezioni del corso “Meccanica statistica e fenomeni critici” tenuto del professor Giorgio Parisi, nell’anno accademico 2015-2016 università di Roma “La sapienza”.

Qualunque errore o svista è da imputare all’autore degli appunti, che non ha ancora sottoposto il testo al professore per una sua approvazione dei contenuti. Per chiarimenti, segnalazioni o altre comunicazioni è possibile contattarmi all’indirizzo e-mail sottoscritto.

Si ringraziano Valerio Sorichetti e Mattia Miotto per il contributo dato nella stesura degli appunti, Riccardo Piombo per l’aiuto fornito nella correzione delle bozze.

*mesonepigreco@gmail.com*

Lorenzo Monacelli.

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami di meccanica statistica</b>	<b>5</b>
1.1	Distribuzioni di probabilità all'equilibrio . . . . .	5
1.1.1	Equivalenza tra entropia microscopica e macroscopica . . . . .	9
1.2	Transizioni di fase del primo ordine . . . . .	11
1.2.1	Nucleazione . . . . .	12
1.3	Transizioni di fase del secondo ordine . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Transizione ferromagnetica</b>	<b>18</b>
2.1	Fenomenologia . . . . .	18
2.2	Teoria microscopica . . . . .	22
2.3	Modello di Ising . . . . .	23
2.3.1	Teoria di campo medio . . . . .	25
2.3.2	Derivazione di Curie-Waiss . . . . .	33
2.4	Funzione di risposta . . . . .	34
2.4.1	Fluttuazioni . . . . .	40
2.5	Sviluppo ad alte e basse temperature . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Modelli perturbativi</b>	<b>46</b>
3.1	Modello Gaussiano . . . . .	46
3.1.1	Calcolo dell'integrale gaussiano . . . . .	47
3.2	Funzione di partizione . . . . .	50
3.2.1	Interpretazione del modello gaussiano . . . . .	51
3.3	Modello di Landau-Ginzburg . . . . .	52
3.3.1	Sviluppo diagrammatico . . . . .	54
3.3.2	Calcolo al secondo ordine . . . . .	59
3.3.3	Diagrammi nello spazio di Fourier . . . . .	64
3.3.4	Tecniche perturbative e convergenza . . . . .	69
3.3.5	Risommazioni parziali e Self-Energia . . . . .	73
3.3.6	Approssimazione di Hartree-Fock . . . . .	77
3.4	Classi di transizione . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Il gruppo di rinormalizzazione</b>	<b>87</b>
4.1	Normalizzazione ad alta temperatura . . . . .	88
4.1.1	Normalizzazione al punto critico . . . . .	92
4.1.2	Normalizzazione a basse temperature . . . . .	93
4.2	Punti di attrazione . . . . .	94
4.3	Gruppo di Rinormalizzazione . . . . .	96
4.3.1	Dinamica vicino al punto critico . . . . .	100

4.3.2	Calcolo dell'hamiltoniana efficace . . . . .	102
4.4	Gruppo di rinormalizzazione per il modello gaussiano . . . . .	103
4.4.1	Modello Gerarchico . . . . .	106
4.4.2	Rinormalizzazione nella funzione di correlazione . . . . .	109
4.5	Sviluppo in $4 - D$ . . . . .	120
4.6	Calcolo degli esponenti critici . . . . .	124
4.7	Magnetizzazione Spontanea . . . . .	127
4.8	Modelli equivalenti per $N = 0$ . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Considerazioni finali</b>	<b>136</b>
5.1	Rottura spontanea della simmetria . . . . .	136
5.2	Gruppo di rinormalizzazione in matematica . . . . .	139
5.3	Matrici di trasferimento - Soluzione 1D al modello di Ising . . . . .	141
5.4	Moto Browniano . . . . .	143
5.5	Simulazioni numeriche . . . . .	148

## Introduzione

In natura è molto frequente trovare sistemi composti da molti componenti diversi; l'oggetto macroscopico ha un comportamento non facilmente riducibile ai comportamenti dei singoli componenti. Un esempio tipico sono le transizioni di fase, come quelle dell'acqua: non è evidente un insieme di atomi che interagiscono tra loro dia luogo a fenomeni come il congelamento o l'evaporazione. Le transizioni di fase possono essere di tipologia differente, come le transizioni magnetiche, o la superconduttività e superfluidità.

Il concetto di transizione di fase si può estendere in modo generale. Un esempio di fenomeno critico è la *percolazione*: immaginiamo il caffè della macchina: se la miscela non è ben compressa l'acqua passa, se è ben compressa l'acqua non passa più. La struttura della miscela può essere immaginata come una groviera (formaggio), se il numero di buchi non è estremamente elevato l'acqua non passa, se la densità di buchi è alta si arriva al punto in cui l'acqua può passare da un buco all'altro, permeando nella struttura. Al raggiungimento di questo valore *critico* il sistema intero cambia bruscamente comportamento, attraversando una vera e propria *transizione di fase* (percolazione).

Il problema del comportamento del sistema macroscopico viene studiato anche all'esterno della fisica, come in scienze nella biologia. Il cervello di un mammifero ha un comportamento che non è facilmente deducibile dal comportamento del singolo neurone; il comportamento della cellula dai quello dei suoi costituenti fondamentale.

Il problema che tenteremo di affrontare in questi appunti riguarda il tentativo di risolvere il comportamento del sistema analizzando quello dei costituenti. Aumentando il numero di componenti che interagiscono fra di loro si hanno comportamenti qualitativi molto differenti. Se abbiamo quattro molecole d'acqua in un nanoporo, il sistema non presenta transizioni di fase.

Nel caso della fisica abbiamo tutta una serie di strumenti che ci permettono di controllare cosa succede che ci rendono la vita molto più facile. Lo strumento principale è lo studio delle proprietà all'equilibrio in cui possiamo sfruttare la meccanica statistica di Boltzmann. Questo corso verterà principalmente nel tentare di capire il problema delle transizione di fase della seconda specie, che hanno delle proprietà di tipo differente della transizione di fase di prima specie (descritte teoricamente da Van derr Waals). Per avere una teoria delle transizioni di fase di seconda specie bisogna attendere gli anni 60 e 70.

# Capitolo 1

## Richiami di meccanica statistica

### 1.1 Distribuzioni di probabilità all'equilibrio

Se partiamo da un sistema di meccanica classica in cui le equazioni del moto hamiltoniane sono:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

Se si prende un sistema di questo genere, esistono quantità che sono conservate, ad esempio la derivata totale dell'hamiltoniana lungo la traiettoria è nulla:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad E = cost$$

Supponiamo di avere un sistema dentro una scatola, i cui costituenti possono compiere urti elastici con le pareti. In una situazione di questo genere l'impulso non è conservato e si può assumere che l'unica grandezza conservata sia l'energia. Questa è una assunzione delicata. In questo paradigma si arriva alla prima formulazione della meccanica statistica: ponendo il sistema in una data configurazione, lasciando evolvere tutto per tempi lunghi ( $t \rightarrow \infty$ ), la probabilità di trovare il sistema in una configurazione  $C$ .

$$P(C) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \delta(H(C) - E)$$

Questa è la distribuzione di probabilità microcanonica. Questa assunzione ci semplifica enormemente le cose. Una cosa è risolvere queste equazioni differenziali che dipendono dal tempo, tutt'altra è dare una distribuzione di probabilità all'equilibrio.

La formulazione microcanonica risulta però scomoda per fare i calcoli. Normalmente si passa ad un'altra formulazione: l'ensemble *canonico*.

La distribuzione di probabilità *canonica* è:

$$P(C) \propto e^{-\beta H(C)}$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

Qual è il motivo di passare dal microcanonico al canonico? Il sistema microcanonico descrive sistemi isolati, con energia fissata. L'ensemble canonico descrive invece sistemi che si trovano a contatto con un termostato. Questa connessione è fatta in modo che il sistema abbia modo di scambiare energia, mantenendo costante la temperatura. Molto spesso si postula che il sistema descritto abbia distribuzione canonica, poi, se necessario, si apre un discorso di come il sistema si avvicina all'equilibrio, e quanto velocemente avviene questo avvicinamento.

Tutta la meccanica statistica di Boltzmann è formulata all'equilibrio termodinamico, nel limite  $t \rightarrow \infty$ . Mentre in matematica questo limite è molto chiaro, in fisica questo tempo infinito dipende dai punti di vista, e può andare da frazioni di secondo a tempi maggiori della vita dell'universo. Un esempio tipico è il miele. Ci sono certe qualità di miele che tendono a cristallizzare. Il miele si compra liquido e tende poi a cristallizzare nel giro di qualche mese sulla nostra dispensa, tuttavia possiamo scaldarlo per farlo tornare liquido. Il sistema all'equilibrio è cristallino ma rimane fuori equilibrio (liquido) per qualche mese.

Ha perfettamente senso domandarsi se facciamo diffrazione sul miele liquido come si comporta il sistema. Questo sarà differente rispetto allo studio di sistemi all'equilibrio. Tutto ciò vale in meccanica classica; l'avvicinamento all'equilibrio in meccanica quantistica è ancora più complicato di quello classico, ma quasi tutto questo corso sarà basato su meccanica classica.

Immaginiamo di aver raggiunto l'equilibrio, vogliamo un formalismo per il quale si possono calcolare gli osservabili del sistema. Il parametro  $\beta$  può non essere identificato immediatamente con la temperatura.

Il valor medio di una grandezza  $A$ , in un ensemble con densità di probabilità  $P$  è:

$$\langle A \rangle = \int dC P(C) A(C) \quad (1.1)$$

$$\int dC P(C) = 1$$

Se imponiamo che la probabilità sia normalizzata otteniamo la formula completa per  $P(C)$ :

$$P(C) = \frac{e^{-\beta H(C)}}{\int dC e^{-\beta H(C)}}$$

La quantità al denominatore viene chiamata funzione di partizione del sistema. Sostituendo nell'equazione (1.1):

$$\langle A \rangle = \frac{\int dC e^{-\beta H(C)} A(C)}{\int dC e^{-\beta H(C)}}$$

Se abbiamo una qualunque configurazione che vogliamo misurare possiamo fare questo integrale. Il calcolo è molto complesso da risolvere, abbiamo a che vedere con un integrale in  $6N$  dimensioni: il calcolo analitico o numerico può essere complicato.

Grazie all'introduzione della funzione di partizione è possibile definire l'energia libera, che dipende da  $\beta$ :

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln [Z(\beta)] \quad (1.2)$$

Dove  $Z$  è la funzione di partizione canonica del sistema. Come è collegato questo oggetto con la definizione termodinamica di energia libera? In termodinamica l'energia libera è definita come:

$$F = E - TS \quad (1.3)$$

Con  $E$  energia interna,  $T$  temperatura e  $S$  entropia. Si può dimostrare che queste due quantità sono esattamente le stesse. Possiamo calcolare l'energia in funzione di  $\beta$ :

$$E(\beta) = \langle H \rangle_\beta = \frac{\int dC e^{-\beta H} H}{\int dC e^{-\beta H}}$$

Questa quantità può essere riscritta nel seguente modo.

$$E(\beta) = -\frac{d}{d\beta} \ln [Z(\beta)]$$

Conoscendo la funzione di partizione canonica possiamo calcolare quantità interessanti del sistema. Possiamo chiederci chi è la derivata fatta rispetto a  $\beta$  dell'energia:

$$\frac{dE}{d\beta} = -\left(\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2\right) = -\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle$$

Questa derivata ci dà le fluttuazioni dell'energia.

Abbiamo definito l'energia dal punto di vista della meccanica statistica, per completare la dimostrazione di equivalenza occorre definire l'entropia dal punto di vista microscopico. In generale il concetto microscopico di Entropia, per una data distribuzione di probabilità è stato elaborato da Shannon nel 1948, ed ha un ruolo fondamentale nella teoria dell'informazione. Se abbiamo una qualunque distribuzione di probabilità  $P$  possiamo associare un'entropia  $S$  nel seguente modo:

$$S[P] = -\langle \ln(P) \rangle = -\int dC P(C) \ln P(C) \quad (1.4)$$

Attraverso questa definizione possiamo ricavare l'entropia microscopica:

$$S = -\int dC \frac{e^{-\beta H(C)}}{Z(\beta)} [-\beta H(C) - \ln Z(\beta)]$$

Questa entropia è calcolabile abbastanza rapidamente: il primo termine è il valor medio della hamiltoniana a meno di un fattore  $\beta$ :

$$S(\beta) = \beta E(\beta) + \ln Z(\beta) = \beta E(\beta) - \beta F(\beta)$$

Se sostituiamo  $\beta = \frac{1}{T}$  abbiamo determinato il collegamento con la termodinamica. Per completare questo collegamento basta collegare la definizione microscopica di entropia alla sua definizione macroscopica. L'entropia macroscopica è connessa alla definizione di temperatura assoluta. Il primo principio della termodinamica asserisce che una piccola variazione di energia è connessa a una variazione di lavoro e calore trasmesso:

$$dE = \delta L - \delta Q \quad (1.5)$$



Mentre  $dE$  non dipende dalla trasformazione termodinamica (*reversibile*),  $\delta L$  o  $\delta Q$  dipendono dal cammino nel piano di integrazione.

Può essere definito un differenziale esatto che dipende dallo stato del sistema legato alla trasmissione di calore  $\delta Q$ :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Questo è il secondo principio della termodinamica. Si definisce da un lato la temperatura assoluta e dall'altro l'entropia dal punto di vista termodinamico: la temperatura assoluta è quella variabile di stato del sistema che rende esatto il differenziale  $\delta Q$ . La funzione generata da questo differenziale esatto è l'*entropia*.

Possiamo a questo punto ricostruire l'entropia macroscopica facendo lavoro sul sistema. Per far lavoro su un sistema si cambiano i parametri dell'hamiltoniana. Per esempio possiamo cambiare il volume della scatola (premendo con un pistone). Questo può essere fatto facendo dipendere l'hamiltoniana da un parametro  $\lambda$ , e calcolare il lavoro fatto sul sistema e la variazione di energia al variare di  $\lambda$ . Con la prima legge della termodinamica (1.5) possiamo calcolare  $\delta Q$  (e quindi  $dS$ ), e verificare che la grandezza misurata corrisponde con la definizione di Shannon (1.4). Con questa dimostrazione il parametro  $\beta$  viene collegato definitivamente alla temperatura del sistema.

Supponiamo di avere un sistema isolato con varie componenti che interagiscono tra di loro, l'entropia di questo sistema potrà aumentare, ma mai diminuire. Differenziando la relazione che definisce l'energia libera (1.3) possiamo dimostrare che  $F$  in un sistema canonico<sup>1</sup> deve sempre diminuire. L'energia libera è sempre la minima possibile. Data una distribuzione di probabilità possiamo associare un'energia libera che dipende dalla distribuzione di probabilità:

$$E[P] = \int dC P(c) H(C) \quad S[P] = -\langle \ln P \rangle$$

Se  $P$  è la distribuzione di probabilità all'equilibrio queste espressioni diventano le grandezze all'equilibrio, ma queste definizioni valgono più in generale.

Possiamo definire un'energia libera che dipende dalla distribuzione di probabilità:

$$F[p] = E[P] - \frac{1}{\beta} S[P]$$

Questa definizione vale in ogni caso. Se questa definizione non fosse abusiva vorremmo che nel minimo di  $F[P]$  si ritrovasse l'espressione dell'energia libera canonica (1.2).

$$F[P] \geq F[P_{eq}]$$

Si può dimostrare che questa cosa è effettivamente vera. Infatti la distribuzione  $P_{eq}$  è quella funzione che minimizza il funzionale  $F[P]$ . Questa dimostrazione è interessante e può essere effettuata mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Se vogliamo formulare la meccanica statistica all'equilibrio si può partire da questo principio variazionale.

<sup>1</sup>Un sistema immerso in un bagno termico con un termostato.

## Dimostrazione del principio di minima energia libera

Dimostriamo che la  $P_{eq}$  è quella che minimizza il funzionale energia libera,  $F[P]$ . Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Ricordiamo che, in generale, se vogliamo minimizzare il funzionale  $\Phi[P]$  sotto i vincoli  $v_i[P] = 0$ , dobbiamo imporre che la derivata funzionale del funzionale

$$\Phi_{\{\lambda_i\}}[P] = \Phi[P] + \sum_i \lambda_i v_i[P]$$

sia nulla, e che in corrispondenza del minimo si abbia  $v_i = 0 \forall i$ . Nel nostro caso, dobbiamo imporre che sia nulla la derivata funzionale di

$$F_\lambda[P] = E[P] - \frac{S[P]}{\beta} = \int P(C)H(C)dC + \frac{1}{\beta} \int P(C) \ln P(C)dC + \lambda \left( \int P(C)dC - 1 \right)$$

Si noti che il vincolo imposto corrisponde alla normalizzazione di  $P(C)$ . Si ha perciò

$$\frac{\delta F_\lambda}{\delta P} = H + \frac{1}{\beta}(\ln P + 1) + \lambda = 0$$

da cui

$$\ln P^* = -\beta H - \beta\lambda - 1$$

ovvero

$$P^* = e^{-\beta H} e^{-1-\beta\lambda}$$

Imponendo la condizione di normalizzazione si vede immediatamente che  $P^* = P_{eq}$ . Attenzione, però: dobbiamo accertarci in realtà che la  $P^*$  così trovata sia proprio un minimo; per farlo, dobbiamo calcolare la derivata funzionale seconda. Poiché possiamo scrivere

$$\ln P(C) = \int dC' \ln P(C') \delta(C - C')$$

risulta immediatamente (i termini senza  $P$  si annullano)

$$\frac{\delta^2 F_\lambda}{\delta P(C) \delta P(C')} = \frac{1}{\beta P(C)} \delta(C - C')$$

Questa quantità è sempre positiva, dunque si tratta proprio di un minimo.

### 1.1.1 Equivalenza tra entropia microscopica e macroscopica

Procediamo ora alla parte finale della dimostrazione di equivalenza tra meccanica statistica microscopica e macroscopica. La definizione di entropia macroscopica è:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS_M$$

Questa relazione determina la temperatura assoluta a meno di un fattore moltiplicativo. Usando il primo principio della termodinamica (1.5), dove  $U$  è l'energia interna:

$$\beta\Delta Q = \beta(dU - \delta L) = dS$$

Da questa definizione possiamo calcolare l'entropia macroscopica attraverso le configurazioni microscopiche del gas. Dobbiamo avere un hamiltoniana che dipende da un parametro esterno (come il volume o la pressione) di controllo  $\lambda$ :

$$H_\lambda = H_0 + \lambda V(x)$$

Cambiando il valore di  $\lambda$  si cambia l'energia interna del sistema. La forma di come  $H$  dipende da  $\lambda$  è sostanzialmente inessenziale ai fini della dimostrazione. Introduciamo una variazione infinitesima di  $\beta$  e  $\lambda$  nel sistema. Questo corrisponde ad una situazione fisica in cui il sistema è in viene schiacciato da un pistone ed è avvolto da un termostato. Possiamo agire sul sistema cambiando la temperatura del termostato ( $\beta$ ) o la forza che schiaccia il pistone ( $\lambda$ ).

Variare  $\beta$  non produce lavoro sul sistema (non si cambia il volume), per cui il lavoro prodotto da una trasformazione infinitesima di  $\beta$  e  $\lambda$  dipende solo dal  $\lambda$ :

$$\delta L = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle d\lambda \quad (1.6)$$

Esplicitiamo ora l'entropia microscopica:

$$S_m = \beta E - \beta F$$

$$dS_m = d(\beta U - \beta F) = d\beta U + \beta dU - d(\beta F)$$

Dobbiamo calcolare l'ultimo differenziale:

$$d(\beta F) = d(-\ln Z) = \frac{1}{Z} \left[ \beta \int dC \frac{dH_\lambda}{d\lambda} e^{-\beta H(C)} d\lambda + d\beta \int dC H_\lambda e^{-\beta H(C)} \right]$$

$$d(\beta F) = \beta \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle d\lambda + U d\beta$$

Riconosciamo il differenziale del lavoro nell'ultima parte (1.6)

$$d(\beta F) = U d\beta + \beta \delta L$$

Da cui il differenziale dell'entropia microscopica diventa:

$$dS_m = d\beta U + \beta dU - d(\beta F) = \beta(dU - \delta L) = \beta \delta Q$$

Il confronto tra questo risultato e la definizione di entropia macroscopica identifica, a meno di una costante, il fattore  $\beta$ :

$$dS_M = \frac{\delta Q}{T} \quad \beta \propto \frac{1}{T}$$

Abbiamo colto due piccioni con una fava, identificato il parametro  $\beta$  come l'inverso della temperatura assoluta, e dimostrato l'equivalenza tra entropia microscopica e macroscopica (da cui l'equivalenza intera tra le grandezze termodinamiche e quelle della meccanica statistica).

La costante moltiplicativa (dimensionale) che permette di identificare  $\beta$  è detta costante di Boltzman <sup>2</sup> e si indica con  $k$ .

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

## 1.2 Transizioni di fase del primo ordine

Le transizioni di fase sono forse il più importante esempio di fenomeni critici nella fisica della materia. Le transizioni del primo ordine si riconoscono empiricamente dalla presenza di una discontinuità di prima specie<sup>3</sup> nella derivata prima dell'energia libera in funzione della temperatura. L'energia interna presenta quindi una discontinuità a salto (Figura 1.1).

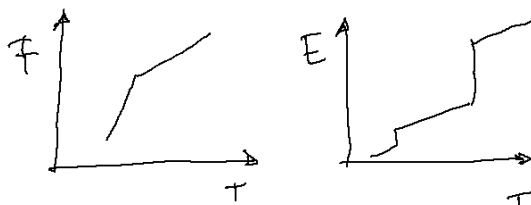


Figura 1.1: Esempi di transizione di fase di prima specie. L'energia presenta una discontinuità in funzione della temperatura. A destra è mostrato un grafico qualitativo dell'acqua, che presenta due transizioni di fase (stato solido-liquido, liquido-gas) a pressione ambientale.

In questi casi alla stessa pressione possiamo avere due differenti stati (Figura 1.2). Nel momento si aumenta la pressione il vapore diventa così denso da diventare un liquido, e la differenza tra stato liquido e vapore sparisce<sup>4</sup>. Aumentando la pressione possiamo passare tra stato liquido e stato gassoso senza transizioni di fase (senza discontinuità nelle variabili termodinamiche).

Le transizioni di fase di prima specie avvengono senza fenomeni precursori. Se si fanno misure delle caratteristiche del sistema (ad esempio la viscosità dell'acqua) nell'avvicinamento alla temperatura critica non si ha nessun cambiamento che possa far in qualche modo anticipare l'imminente fenomeno critico. Possono addirittura avvenire fenomeni di metastabilità. Se si prende dell'acqua in una situazione controllata, in assenza di impurezze, si può tenere nella fase liquida anche a temperature che superano la temperatura critica. Ad esempio

<sup>2</sup>La costante di Boltzmann non è stata introdotta da lui ne ha mai usato la notazione  $k$  per indicare questa quantità, Boltzmann al posto di  $k$  scriveva  $\frac{R}{N}$ . Il termine  $k$  fu invece introdotto da Plank nel lavoro sulla radiazione del corpo nero (introdusse  $h$  e  $k$ ). In origine  $k$  era detta costante di Plank, poi data l'importanza della costante  $h$  fu chiamata lei la costante di Plank, dato il fatto che sulla tomba di Boltzman era scritta la relazione di  $k$  fu chiamata costante di Boltzman.

<sup>3</sup>Un salto nella derivata, un punto angoloso nella funzione.

<sup>4</sup>Per stati cristallini questo non avviene.

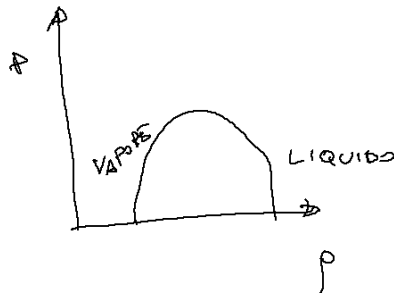


Figura 1.2: Diagramma di fase in pressione vs densità. Esiste una zona in cui a pari pressione coesistono due stadi differenti con densità molto diverse. Questa regione è proibita, se cerchiamo di mettere il sistema in questa fase tende spontaneamente a separarsi nelle due fasi. Tuttavia aumentando la pressione la zona di separazione di fase diventa sempre più piccola fin quando scompare, permettendo il passaggio con continuità dal liquido al vapore.

si riesce a portare l'acqua in fase liquida ad una temperatura di  $-20^{\circ}$  gradi centigradi. Il motivo fondamentale è che, dato che acqua e ghiaccio sono molto differenti l'uno dall'altro, l'energia libera può continuare ad essere definita nella fase di bassa temperatura e vice versa.

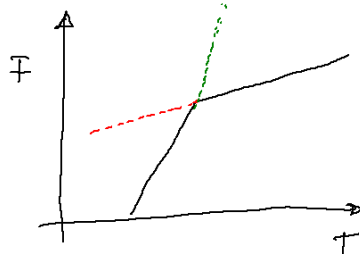


Figura 1.3: In rosso lo stato metastabile dell'acqua. L'acqua sotto i zero gradi centigradi tende a mantenere il proprio stato fin quando qualcosa non fa "scoprire" all'acqua la presenza di uno stato ad energia libera minore (come impurezze o perturbazioni esterne).

### 1.2.1 Nucleazione

Discutiamo come avviene la formazione del ghiaccio dentro l'acqua.

Immaginiamo che si formi una sferetta di raggio  $r$  di ghiaccio, all'interno dell'acqua mentre si trova sotto la temperatura critica. Calcoliamo la variazione di energia libera dovuta alla formazione di questa pallina di ghiaccio. La variazione di energia libera per unità di volume tra acqua e ghiaccio (è la differenza

tra le linee tratteggiate e in nero in Figura 1.3) è:

$$\Delta F_{GA} = -F_G + F_A$$

Quindi, per la creazione di una bolla di ghiaccio di volume  $V$ , la variazione totale di energia libera del sistema è:

$$\Delta F = F_G V - F_A V = -\Delta F_{GA} V$$

Poiché l'energia libera tende sempre a diminuire, la sferetta tenderà ad aumentare sempre il suo volume. Tuttavia all'interfaccia che si crea tra acqua e ghiaccio le molecole hanno un ordinamento parziale che costa una certa quantità di energia libera; a questo termine concorre un aumento di energia libera dovuto alla presenza dell'interfaccia. Esplicitando in funzione del raggio della sferetta questi termini si ottiene:

$$\Delta F = -\Delta F_{GA} R^3 + \sigma R^2$$

Possiamo graficare la differenza di energia libera in funzione del raggio della sferetta (Figura 1.4).

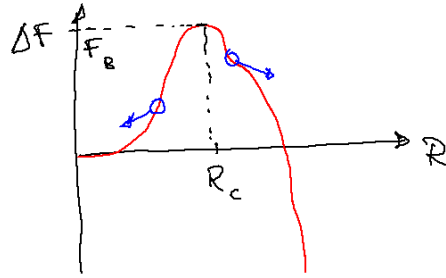


Figura 1.4: Schema dell'energia libera. Per raggi minori del picco del grafico l'evoluzione naturale della goccia sarà quella di diminuire il raggio. Se tuttavia la goccia formata è maggiore del raggio critico la goccia si espande.

La probabilità di ottenere attraverso una fluttuazione casuale una configurazione con energia libera  $F$  (rispetto all'energia libera di partenza) è dato dall'esponenziale:

$$P \sim e^{-\beta F}$$

Se deve formarsi spontaneamente una goccia di ghiaccio, esiste un'energia libera di barriera  $F_b$  (che corrisponde al raggio critico) al di sopra della quale la sferetta tende ad aumentare il suo raggio fino a generare un cambiamento di fase. La probabilità di avere una fluttuazione che mi supera la barriera dell'energia libera è pari a:

$$p \sim e^{-\beta F_b}$$

Il tempo medio impiegato dal sistema per generare questa configurazione è proporzionale a:

$$\tau \sim e^{\beta \Delta F_b}$$

Per rendere dimensionale questa relazione occorre inserire un tempo caratteristico  $\tau_0$  (per l'acqua dell'ordine dei microsecondi):

$$\tau = \tau_0 e^{\beta \Delta F_b}$$

Possiamo trovare facilmente il massimo di  $\Delta F$ :

$$3\Delta F_{GA} R_c^2 = 2\sigma R_c$$

$$R_c \sim \frac{1}{\Delta F_{GA}}$$

Dalla Figura 1.3 si può vedere come la differenza di energia libera tra acqua e ghiaccio, in prossimità della temperatura critica, può essere assunto lineare:

$$\Delta F_{GA} \propto \left( \frac{1}{T - T_c} \right)$$

Da cui l'andamento dell'energia libera critica in funzione della temperatura può essere ricavato come:

$$F_B = \frac{\sigma^2}{\Delta F_{GA}^2}$$

$$F_B \propto \left( \frac{1}{\Delta T} \right)^2$$

Quindi se siamo molto vicini agli zero gradi, le fluttuazioni per generare la nucleazione devono essere molto grandi, e il tempo tipico di transizione è:

$$\tau = \tau_0 \exp \left[ \frac{A}{(T - T_c)^2} \right]$$

Se siamo molto vicini a  $T_c$  la transizione di fase non avverrà mai spontaneamente. Perché questa trattazione abbia senso abbiamo supposto il contributo all'interfaccia  $\sigma$  costante nella temperatura<sup>5</sup>. Questa assunzione è corretta soltanto nelle transizioni di fase del primo ordine, e vedremo come la trattazione può essere estesa per altri fenomeni critici.

La legge del tempo tipico di formazione del cambio di fase è detta *legge di Arrhenius*.

$$\tau = \tau_0 \exp(\beta F_B)$$

Questa legge fu formulata per la prima volta da Arrhenius per le reazioni chimiche, in cui il sistema deve superare una barriera energetica, in particolare riveste ruolo importante nella sintesi industriale dell'ammoniaca<sup>6</sup>

La cosa interessante per le transizioni di fase del primo ordine è che se  $\Delta T$  è abbastanza piccolo, avere una transizione spontanea è impossibile in tempi umani. Tuttavia esistono dei modi per *catalizzare* le transizioni. La presenza di impurezze come granelli di plover favorisce la transizione: un granello di polvere microscopico può fare in modo che, lungo la sua superficie, si formi

<sup>5</sup>In realtà poiché tutto il discorso è stato fatto approssimando all'ordine più basso non nullo basta che  $\sigma$  non si annulli intorno alla temperatura critica.

<sup>6</sup>Questo ha permesso alla germania di fare la prima guerra mondiale, grazie alla possibilità di produrre i nitrati industrialmente la germania ha potuto sintetizzare la polvere da sparo e non importarla (c'era il blocco navale).

un piccolo strato di ghiaccio tale da favorire la formazione di bolle dal raggio maggiore del raggio critico.

Abbiamo discusso dell'acqua sottoraffreddata, il ghiaccio soprarisaldato è molto raro. Il motivo è che intorno alla sua superficie si forma uno strato di molecole d'acqua<sup>7</sup>. Quello che avviene è che il cubetto di ghiaccio è pertanto sempre circondato da una sottile membrana di acqua<sup>8</sup>. Se scaldiamo il ghiaccio, il liquido che lo circonda penetra nel ghiaccio generando la nucleazione. Si può generare ghiaccio sovracritico usando un laser che si focalizza in un punto interno, dove non sono presenti goccioline d'acqua.

### 1.3 Transizioni di fase del secondo ordine

Altri esempi di transizione di fase sono i fenomeni magnetici. Un materiale come il ferro ha comportamenti magnetici differenti se si trova al di sopra o al di sotto di una temperatura critica, detta temperatura di Curie. Se osserviamo la magnetizzazione in funzione della temperatura otteniamo un punto in cui sparisce:

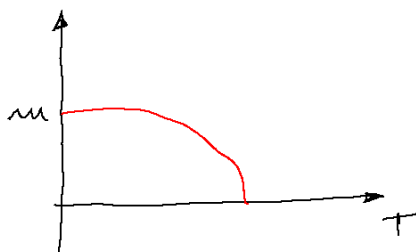


Figura 1.5: Schema della magnetizzazione in un materiale ferromagnetico.

La magnetizzazione si avvicina a zero con una legge approssimativamente di potenza:

$$m \sim (T - T_c)^{\frac{1}{3}} \quad (1.7)$$

I materiali che soddisfano questa relazione si chiamano ferromagnetici. La fase con temperatura  $T \geq T_c$  è la fase paramagnetica. La proprietà del ferro non sono fortemente differenti nelle due fasi.

( DA CHIARIRE QUESTO PASSAGGIO )

Possiamo ripetere il calcolo della nucleazione immaginando che si generi una regione ferromagnetica all'interno di una paramagnetica. In questo caso, poiché il passaggio avviene con continuità, la magnetizzazione per  $T \sim T_c$  è circa nulla (1.7). Per avere fluttuazioni di magnetizzazione occorre che siano coinvolti regioni molto grandi. Questo comportamento è caratteristico delle

<sup>7</sup>Questo avviene perché il contributo di superficie di aumento dell'energia libera è minore, dovuto al fatto che solo una parte della bolla è a contatto con il ghiaccio.

<sup>8</sup>Questo è il motivo per cui se avviciniamo due cubetti di ghiaccio tendono a attaccarsi, ed è il motivo per cui a volte mettendo un dito a contatto con il ghiaccio questo rimane piacevolmente appiccicato.



transizioni di fase del secondo ordine, in cui il passaggio da una fase avviene con continuità, e possiamo avere fluttuazioni nel sistema caratterizzate da un raggio molto grande e magnetizzazione molto piccola.

$$mR^3 \sim 1 \quad R \gg 1$$

Questo implica che la transizione di fase è anticipata. Se definiamo la suscettività magnetica, che corrisponde alla derivata della magnetizzazione rispetto ad un campo magnetico  $h$ :

$$\chi_M = \frac{\partial m}{\partial h}$$

Più ci avviciniamo a  $T_c$  più basta un piccolo campo magnetico per generare enormi fluttuazioni (Figura 1.6).

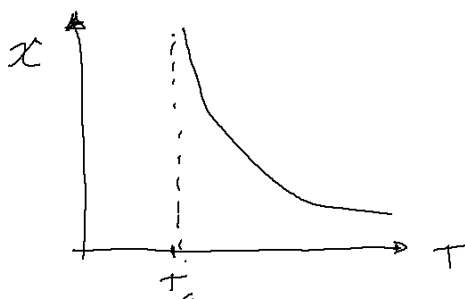


Figura 1.6: Schema della suscettività magnetica, che mostra un andamento a temperature in cui il sistema è paramagnetico che anticipano la transizione di fase, infatti in corrispondenza della temperatura critica il sistema presenta una discontinuità di secondo tipo.

$$\chi = \frac{C}{(T - T_c)^\gamma} \quad \gamma \sim 1.24$$

La transizione di fase viene anticipata da  $\chi$ , facendo misure solo per  $T > T_c$  possiamo ricavare la temperatura della transizione di fase con un fit. Si può costruire una teoria che permetta di capire in modo qualitativa e quantitativa questo tipo di fenomeno.

Quello che avviene è che l'esponente  $\gamma$  anche in materiali con strutture molto differenti tra loro è sempre lo stesso, è una variabile del tutto universale per tutte le sostanze che hanno una transizione ferromagnetica, a prescindere dalla temperatura a cui avviene questa transizione o dal tipo di magnetizzazione del materiale.

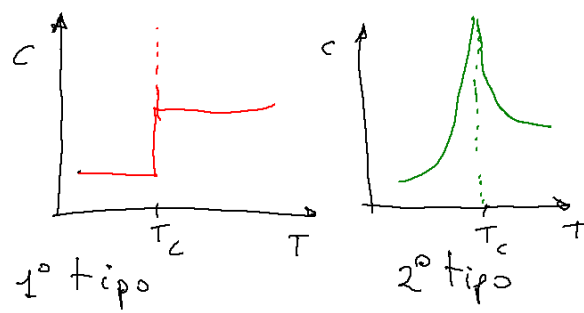


Figura 1.7: Confronto tra l'andamento del calore specifico in una transizione del primo tipo e del secondo tipo.

## Capitolo 2

# Transizione ferromagnetica

La transizione ferromagnetica è l'esempio più semplice di transizione di fase del secondo ordine.

### 2.1 Fenomenologia

La transizione ferromagnetica è caratterizzata empiricamente dall'esistenza di una magnetizzazione residua (in assenza di campi magnetici esterni) del materiale, per temperature inferiori di una temperatura critica  $T_c$ , detta temperatura di Curie (Figura 2.1)

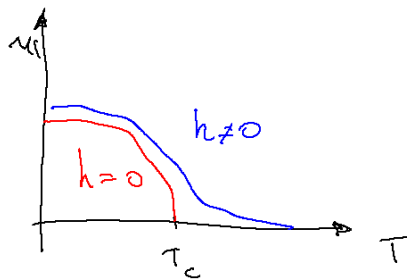


Figura 2.1: Sotto una temperatura critica di Curie il sistema dispone di una magnetizzazione spontanea.

A caratterizzare il processo che determina la transizione ferromagnetica è la curva di isteresi. Per ciascun valore del campo magnetico esterno esistono più possibili valori della magnetizzazione, e lo stato che occupa il sistema è dato dalla sua “storia” (Figura 2.2).

Nei materiali reali la curva di isteresi dipende da molti dettagli microscopici, come impurezze e struttura reticolare. Esistono materiali con curve di isteresi molto diverse tra loro, che danno luogo a una fenomenologia sfruttata in molte applicazioni tecnologiche<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Ad esempio i microfoni ad alta fedeltà sfruttano materiali con piccolissimi cicli di isteresi.

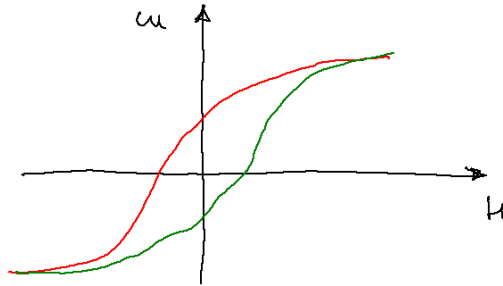


Figura 2.2: Curva di isteresi, la magnetizzazione del materiale è graficata in funzione del campo magnetico esterno.

La transizione ferromagnetica non ha un calore specifico latente: l'energia non presenta discontinuità intorno alla temperatura di Curie (Figura 2.3)

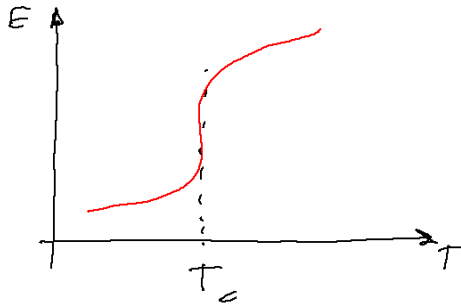


Figura 2.3: Schema dell'energia in funzione della temperatura in un materiale ferromagnetico vicino alla temperatura di Curie.

Il calore specifico del materiale diverge in corrispondenza della transizione, anche se la divergenza è in prima approssimazione logaritmica<sup>2</sup> (Figura 2.4).

L'altra grandezza che è molto importante è la funzione di risposta in magnetizzazione rispetto al campo magnetico esterno  $h$  applicato.

$$\chi_s = \left( \frac{\partial m}{\partial h} \right)_{h=0} \quad (2.1)$$

La suscettività è reale solo nella regione  $T > T_c$  (quando  $m = 0$  per  $h = 0$ ), e diverge per  $T \rightarrow T_c^+$  (Figura 2.5).

Un altro grafico utile per caratterizzare la transizione magnetica è l'andamento della magnetizzazione  $m$  in funzione del campo magnetico alla temperatura di Curie (Figura 2.6). Per  $h = 0$   $m = 0$  (siamo ancora nella fase paramagnetica) e la suscettività (la derivata nell'origine, eq. 2.1) diverge; è presente un flesso verticale.

<sup>2</sup>Una divergenza logaritmica è molto difficile da ricavare sperimentalmente.

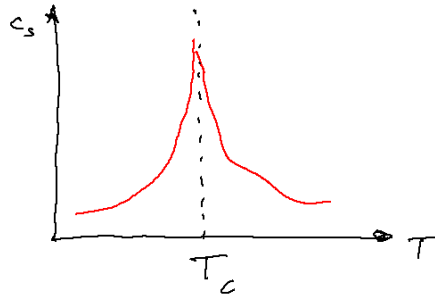


Figura 2.4: Il calore specifico ha una divergenza molto lenta del tipo  $\ln |T - T_c|$ , prima di essere sicuri che effettivamente diverga bisogna andare a temperature molto simili a  $T_c$ .

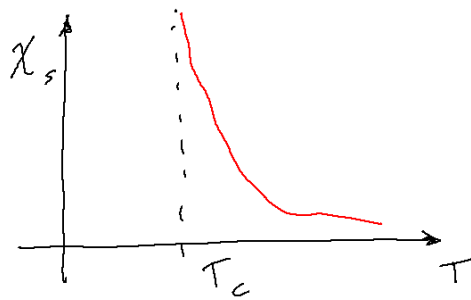


Figura 2.5: La suscettività diverge a  $T_c$ .

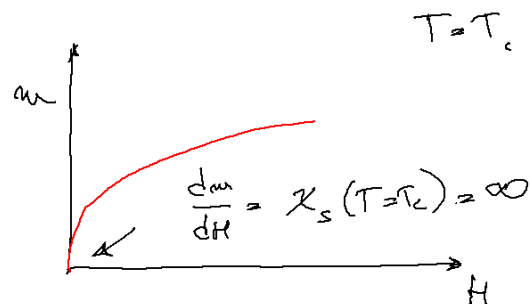


Figura 2.6: Al punto critico basta una piccolissima in campo magnetico e si ottiene una risposta enorme, infatti in zero abbiamo una derivata infinita.

Si può studiare il materiale da un punto di vista microscopico con lo scattering dei neutroni. Si formano delle regioni (domini di Waiss) di una certa grandezza  $\xi$  in cui i momenti magnetici dei singoli atomi sono tutti allineati. La lunghezza di correlazione  $\xi$  diverge per  $T = T_c$  in modo molto simile alla suscettività.

Fittando opportunamente i dati sperimentali si scopre che tutti questi andamenti si comportano per  $T \rightarrow T_c$  in modo polinomiale. Questa caratteristica implica che il sistema acquisisce a  $T_c$  l'invarianza di scala, e il sistema ha correlazioni a lungo raggio<sup>3</sup>.

La magnetizzazione residua spontanea<sup>4</sup> è caratterizzata da un andamento asintoticamente polinomiale, con coefficiente  $\beta$ :

$$m \propto |T - T_c|^\beta \quad \beta \approx 0.34$$

Anche il calore specifico diverge con una legge polinomiale.

$$|T - T_c|^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln(T - T_c)} = 1 - \alpha \ln |T - T_c| + \alpha^2 \ln^2 |T - T_c| + o(\alpha^2)$$

Abbiamo specificato in Figura 2.4 che la divergenza avveniva in modo logaritmico. In realtà, se  $\alpha$  è molto piccolo prima che il termine al secondo ordine diventi non trascurabile deve verificarsi:

$$-\alpha \ln |T - T_c| \sim 1$$

Se  $\alpha \sim 0.01$  la temperatura alla quale siamo in grado di percepire la differenza rispetto ad un andamento logaritmico è:

$$-0.01 \ln |T - T_c| \sim 1 \quad \ln |T - T_c| \sim -100$$

$$|T - T_c| \sim e^{-100} \sim 10^{-44} \text{ K}$$

Non abbiamo nessun mezzo tecnologico in grado di compiere misure di temperatura con tale precisione, sperimentalmente è impossibile distinguere l'andamento logaritmico da quello polinomiale, se  $\alpha$  è piccolo.

Gli altri andamenti polinomiali sono i seguenti:

$$\chi = \frac{1}{(T - T_c)^\gamma} \quad \gamma = 1.24$$

$$m = H^{\frac{1}{\delta}} \quad \delta \approx 5$$

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad \nu \approx 0.62$$

Questi esponenti sono indipendenti dalle caratteristiche del materiale, sono delle grandezze che caratterizzano tutte le transizioni di fase ferromagnetiche. Occorre sviluppare un modello teorico che sia in grado di prevedere leggi.

<sup>3</sup>Le leggi di potenza sono leggi a coda larga, per approfondire sul comportamento di queste leggi si vedano le referenze [2] e [3].

<sup>4</sup>Trascurando l'isteresi.

## 2.2 Teoria microscopica

Cerchiamo di elaborare un modello microscopico che sia indipendente dal dettaglio del singolo materiale, per avere idee generali<sup>5</sup>. Il ferromagnete è formato da una serie di atomi nello stato fondamentale con un momento angolare totale non nullo. Il momento angolare totale coincide con il momento orbitale (il momento angolare di spin tende ad antiallineare i dipoli in un sistema antiferromagnete), che genera un momento magnetico atomico.

Il sistema modellizzato è un solido, i cui atomi contigui interagiscono attraverso la sovrapposizione delle funzioni d'onda elettroniche, generando un'energia di scambio, che vincola la posizione reciproca dei momenti angolari.

L'energia minima (per i ferromagneti) dei due atomi è la situazione in cui i momenti magnetici puntano alla stessa direzione (questo dipende da tutti i dettagli degli integrali di scambio). L'energia nel caso allineato è minore dell'antiallineato:

$$E_{\uparrow\uparrow} < E_{\uparrow\downarrow}$$

Solo i materiali che soddisfano questa caratteristica possono essere ferromagnetici. Il fenomeno è puramente quantistico; nel mondo classico non si può spiegare il ferromagnetismo. L'energia che permette la formazione dei domini di Weiss è solo elettrica, non magnetica.

L'effetto magnetico sull'orientamento del dipolo è una piccola componente relativistica trascurabile.

$$E \propto q \quad H \propto q \frac{v}{c}$$

Se  $v \ll c$  non abbiamo produzione di campo magnetico. Per renderci conto di ciò basta confrontare gli ordini di grandezza della forza esercitata da due cariche da un Culomb di carica elettrica poste ad un metro di distanza con quella di due fili di rame percorsi da un Ampere di corrente.

Le forze in gioco nella fisica dello stato solido sono puramente elettriche perché gli effetti relativistici sono trascurabili.

Inoltre il contributo magnetico riduce l'energia della configurazione antiferromagnetica (Figura 2.7).

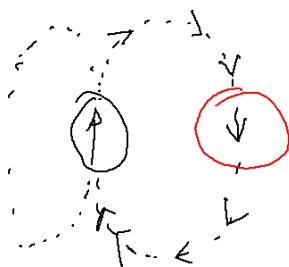


Figura 2.7: La presenza di un dipolo magnetico tende a dare un contributo antiferromagnetico.

<sup>5</sup>Eviteremo quindi di approfondire il discorso dell'isteresi perché è fortemente dipendente dalle caratteristiche di ciascun singolo materiale.

L'energia associata al campo magnetico è proporzionale al quadrato del campo stesso

$$E \propto \int dx H^2(x)$$

A brevi distanze il contributo magnetico è completamente trascurabile, tuttavia nella soluzione ferromagnetica, la presenza di tanti dipoli allineati genera un effetto macroscopico su lunghe distanze, generando un campo magnetico totale non trascurabile. Una zona adiacente subisce questo effetto e tende a disporsi in modo da antiallineare tutti i suoi dipoli con le regioni limitrofe, magnetizzandosi nel verso opposto (domini di Weiss).

La magnetizzazione residua è la parziale cancellazione della magnetizzazione di tutte le regioni.

Il processo di isteresi nasce dalle proprietà della superficie di separazione tra domini. L'interfaccia tra domini ha un costo di energia libera, che si riduce in presenza di impurezze: se al posto di un atomo di ferro ci sono atomi non ferromagnetici (come il carbonio) il costo di energia libera è minore e il confine tende a passare per tutte le impurezze.

L'applicazione di un campo magnetico esterno tende a spostare l'interfaccia in modo da aumentare la dimensione della regione allineata al campo magnetico. Lo spostamento dell'interfaccia non avviene in maniera continua, ma passa bruscamente tra due particolari cammini con molte impurezze. La configurazione di energia libera ha tanti minimi locali, di profondità simile. Lo stato del sistema è bloccato su un minimo. Applicando un campo magnetico cambiamo la profondità relativa dei vari minimi fin quando una fluttuazione non riesce a farci uscire dal minimo locale verso una configurazione energeticamente più conveniente. Se spegnamo il campo magnetico il sistema rimane sull'ultimo minimo visitato, e può richiedere parecchio tempo prima di tornare spontaneamente nello stato a minore energia libera.

Possiamo immaginare una pallina (lo stato del sistema) situata in una fossa di una superficie con due conche (l'energia libera). Incliniamo il sistema (applicazione del campo magnetico) fin quando la pallina casca nell'altro buco. Quando riportiamo la superficie di appoggio orizzontalmente la pallina rimane nella sua posizione (Figura 2.8).

Sperimentalmente si possono ottenere informazioni sullo spostamento dell'interfaccia misurando il rumore prodotto da una bobina magnetica collegata ad un altoparlante. Si applica sul sistema da studiare un campo magnetico e si misura il cambiamento repentino di magnetizzazione, quando si modula il campo magnetico si sente un rumore molto forte dovuto all'impulsività del cambiamento di magnetizzazione. Da questo rumore si caratterizza il sistema magnetico, per avere informazioni microscopiche su come si spostano le barriere, senza bisogno di ricorrere a microscopi.

## 2.3 Modello di Ising

Il modello di Ising è il primo modello quantistico sviluppato nel 1925 che descrive la transizione di fase magnetica. Gli "attori" del modello sono chiamati



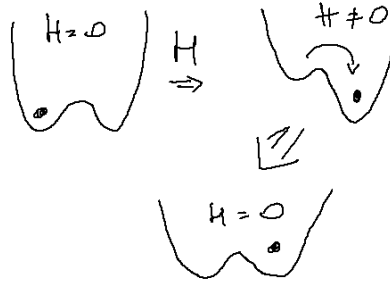


Figura 2.8: Schema del ciclo di isteresi. La posizione della pallina rappresenta l'interfaccia tra i domini, che può spostarsi rigidamente passando per le impurezze. Esiste un campo magnetico di "rottura" che può spostare l'interfaccia, che rimane nella posizione nuova anche se togliamo il campo magnetico, lasciando una magnetizzazione residua.

impropriamente<sup>6</sup> *spin*. Questi vettori sono posizionati su reticoli, generalmente cubici o triangolari.

L'hamiltoniana è composta da due contributi, un termine di interazione *spin-spin* (che tende ad allinearli), e un termine di interazione con un campo magnetico esterno.

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{|i-j|=1} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i$$

La somma sulle coppie è fatta sui primi vicini, che distano 1 sul reticolo; il fattore 1/2 davanti serve per evitare di contare due volte ciascun termine. Il campo magnetico  $h_i$  che agisce sull' $i$ -esimo spin tende ad allinarlo verso la propria direzione. Molto spesso  $h_i$  è una costante (se è dato da una sorgente macroscopica). L'interazione a primi vicini è data dall'integrale di scambio della funzione d'onda.

Questi spin rappresentano le magnetizzazioni locali che, in principio, possono puntare in tutte le direzioni. In realtà le anisotropie indotte dal reticolo favoriscono alcune direzioni rispetto ad altre. Se la magnetizzazione tende ad essere orientata solo in due direzioni possiamo considerare lo *spin* uno scalare:

$$\sigma_i = \pm 1$$

Questa scelta corrisponde a materiali fortemente anisotropi, e bisogna ammettere che è difficile pensare di fare una scelta più semplice. Questo è il modello di Ising. La versione di Heisenberg è quella in cui  $\sigma$  diventa un vettore:

$$\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\} \quad |\vec{\sigma}| = 1$$

L'hamiltoniana dipende dal prodotto scalare degli spin.

$$\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$$

<sup>6</sup>Abbiamo visto nella Sez. 2.2 che per materiali ferromagnetici domina il contributo di momento angolare orbitale. Aver capito che non è lo spin degli elettroni ma il momento orbitale a generare questo effetto è avvenuto solo intorno agli anni 40, ben dopo la formulazione di Ising del modello.

Il modello di Heisenberg si applica a materiali più isotropi, mentre quello di Ising a materiali di fortemente anisotropi. Calcoliamo la funzione di partizione:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]}$$

Se il sistema lo studiamo a volume finito come mettiamo le condizioni a contorno? Si può mettere il sistema all'interno di una scatola di lato  $L$ .

$$N = L^d$$

Possiamo scegliere di limitare i vicini dei siti al bordo, o imporre condizioni toroidali (periodiche al contorno). Le condizioni periodiche a contorno sono un artificio matematico molto utile, perché altrimenti bisognerebbe distinguere l'energia dei siti bulk da quella di superficie, è evidente che a grande volume la superficie è trascurabile. Questo ci dà anche l'invarianza di traslazione che semplifica notevolmente la soluzione.

Ciascun sito può trovarsi in 2 stati, abbiamo  $N$  siti, il numero di configurazioni possibili (su cui sommare  $Z$ ) è

$$2^N = 2^{L^d}$$

Anche in due dimensioni ( $d = 2$ ) e con solo 8 siti per lato ( $L = 8$ ) il numero di configurazioni è proibitivo per qualunque approccio computazionale:

$$2^{8^2} = 2^{64} \approx 2 \cdot 10^{19}$$

Esistono però dei trucchi. Il primo è tentare di usare un'astuzia matematica che permetta in qualche modo di poter riassumere la funzione di partizione, nel 43 si è riusciti a trovarlo per le due dimensioni.

Dato che le soluzioni analitiche sono rare ed estremamente preziose, l'altro trucco è quello di fare qualche approssimazione. L'approssimazione ci può portare ad un'illuminazione dell'*insight* fisico per cui avvengono determinati fenomeni. La prima approssimazione che si usa è basata sulla teoria di campo medio. Questa teoria è stata introdotta da Curie e Weiss in modo non formale.

### 2.3.1 Teoria di campo medio

Per semplificare la notazione possiamo introdurre una matrice energetica:

$$J_{ik} = \begin{cases} J & |j - k| = 1 \\ 0 & |j - k| \neq 0 \end{cases}$$

E riscrivere l'hamiltoniana:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} J_{ik} \sigma_i \sigma_k - \sum_i h_i \sigma_i$$

L'espressione della magnetizzazione di Curie-Weiss è la seguente

$$m = \tanh \left( \beta \sum_k J_{ik} m_k + \beta h_i \right) \quad (2.2)$$

Fissato un sito, quanti sono i suoi primi vicini? In un reticolo cubico per ciascuna direzione ogni sito ha due vicini:

$$m = \tanh[\beta(2dJm + h)]$$

Questa è l'equazione di campo medio ottenuta verso la fine dell'ottocento da Curie e Waiss. Si può derivare questa equazione in modo controllato, per ricavare le correzioni di ordine. Data un'approssimazione, se non si sanno valutare le correzioni è difficile capire quando l'approssimazione funziona.

L'energia libera  $F$  all'equilibrio corrisponde al minimo su tutte le distribuzioni di probabilità:

$$F = \min F[P] \quad F[P] = E[P] - \frac{1}{\beta} S[P]$$

Questo principio variazionale può essere utilizzato non solo come principio costitutivo della meccanica statistica, ma anche per fare i conti. I principi variazionali sono estremamente utili perché permettono di migliorare la soluzione esatta.

Immaginiamo di voler stimare  $f^*$ , minimo di  $f(x)$ . Se sappiamo calcolare  $f(x)$  solo per una data  $x$ , di certo vale che:

$$f^* \leq f(x_0)$$

Questo principio è anche verificabile sperimentalmente. Immaginiamo che il minimo si trova in un punto  $x = x^*$ . Supponiamo che siamo in grado di arrivare abbastanza vicino al minimo:

$$f(x^* + \varepsilon) = f(x^*) + O(\varepsilon^2)$$

Se abbiamo la posizione del minimo giusta al 10% la funzione  $f^*$  è calcolata al 1%. Queste cose funzionano molto bene in meccanica quantistica.

Il livello energetico dello stato fondamentale può essere stimato con il principio variazionale:

$$H|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$$

Per l'atomo di Elio non si sa risolvere questa equazione esattamente, la funzione d'onda dipende da sei variabili, di cui tre se ne possono eliminare (sfruttando le simmetrie). Tuttavia data una generica funzione d'onda  $\psi$  è sempre vero che:

$$E_0 \leq \langle \psi | H | \psi \rangle \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

Possiamo fare una prima approssimazione:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$$

Questa funzione d'onda è un'approssimazione brutale della funzione d'onda originale del sistema, tuttavia il risultato in energia dista da quello sperimentale per meno del 4%. Siccome ci troviamo intorno al minimo dell'energia anche un discostamento grande della funzione d'onda da quella reale riproduce un errore più piccolo (di un ordine superiore) nell'energia.

Applichiamo il principio variazionale al modello di Ising. Immaginiamo che la probabilità di avere un sistema in una data configurazione sia fattorizzata come prodotto delle probabilità di trovare ciascun singolo sito in un determinato stato. Questa assunzione equivale a dire che ciascuno spin sia indipendente dagli altri.

$$P[\sigma_1, \dots, \sigma_n] = \prod_{i=1}^N P(\sigma_i) \quad \sigma_i = \pm 1$$

Possiamo parametrizzare questa variabile attraverso la magnetizzazione del singolo sito  $m$ :

$$P_+^{(i)} + P_-^{(i)} = 1$$

Il valore atteso dello spin nell' $i$ -esimo sito è la magnetizzazione:

$$m_i = \langle \sigma_i \rangle = P_i^+ - P_i^-$$

Invertendo queste due relazioni possiamo riscrivere la probabilità in funzione di un solo parametro  $m_i$  di facile interpretazione.

$$P_i^+ = \frac{1 + m_i}{2} \quad P_i^- = \frac{1 - m_i}{2}$$

Se la distribuzione di probabilità è fattorizzabile otteniamo:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_k \rangle = m_i m_k$$

Il contributo di interazione *spin-spin* dell'energia è:

$$E = - \sum_{ik} \frac{1}{2} J_{ik} \sigma_i \sigma_k$$

Usando una distribuzione fattorizzabile il valore atteso di  $E$  diventa il seguente:

$$E[P] = -\frac{1}{2} \sum_{ik} m_i m_k J_{ik}$$

Supponiamo che la magnetizzazione non dipende dal sito.

$$m_i = m$$

$$E[P] = -\frac{1}{2} m^2 \sum_{ik} J_{ik}$$

Dobbiamo quindi contare solo i termini non nulli della sommatoria. Immaginiamo di essere un sistema con condizioni periodiche al contorno.

$$L^d = N$$

L'indice  $i$  assumere  $N$  valori, per ogni  $i$   $k$  può essere solo i primi vicini,  $2d$  (due vicini per ogni direzione indipendente nel reticolo).

$$E[P] = -m^2 dJ$$

Se ci aggiungiamo il termine di campo magnetico esterno:

$$E[P] = -m^2 dJ - \sum_i h_i m_i = -m^2 dJ - Nhm$$

L'energia diminuisce all'aumentare della magnetizzazione (come ci si aspetta in un sistema ferromagnetico). Calcoliamo l'entropia. L'entropia di una distribuzione può essere scritta sfruttando la definizione di Shannon (Se la  $P$  può essere fattorizzata il suo logaritmo può essere spezzata nella somma delle entropie di singolo sito).

$$S[P] = -\langle \ln P \rangle = -\sum_{i=1}^N \langle \ln P_i(\sigma_i) \rangle = -\sum_{i=1}^N [P_i^+ \ln P_i^+ + P_i^- \ln P_i^-]$$

L'entropia è la somma di tante entropie locali, se esplicitiamo la magnetizzazione si ottiene:

$$S[P] = \sum_{i=1}^N \mathcal{S}(m_i) \quad \mathcal{S}(m) = -\frac{1+m}{2} \ln \left( \frac{1+m}{2} \right) - \frac{1-m}{2} \ln \left( \frac{1-m}{2} \right)$$

Da cui si ricava l'energia libera:

$$F(m) = N \left[ -Dm^2 - hm - \frac{1}{\beta} \mathcal{S}(m) \right]$$

È chiaro che l'energia è il fattore dominante a basse temperature ( $\beta \rightarrow \infty$ ), mentre l'entropia domina ad alte temperature ( $\beta \rightarrow 0$ ). È facile immaginare qualitativamente l'esistenza della temperatura critica  $T_c$  che fa da spartiacque tra il reggime ferromagnetico (dominato dall'energia) e quello paramagnetico (dominato dall'entropia). Se vogliamo capire il comportamento del sistema in presenza di un campo magnetico costante occorre trovare il minimo di questa funzione e studiarne le proprietà al variare dei parametri esterni del sistema ( $h$  e  $\beta$ ). Prima di affrontare la minimizzazione studiamo  $\mathcal{S}(m)$ . Per  $|m| > 1$  la funzione non ha senso, ma questo è ovvio perché  $m$  è la media di  $\sigma$ . La  $\mathcal{S}(m)$  ai valori estremi può essere calcolata:

$$P_+ = 1 \quad P_- = 0$$

$$\mathcal{S}(1) = 1 \ln 1 + 0 \ln 0$$

Se consideriamo la funzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

Quindi otteniamo

$$\mathcal{S}(\pm 1) = 0$$

L'altra cosa interessante è che

$$\mathcal{S}(m) > 0 \quad \forall m \in (-1, 1)$$

La funzione è evidentemente simmetrica

$$\mathcal{S}(m) = \mathcal{S}(-m) \quad \mathcal{S}(0) = \ln 2$$

E possiamo calcolare la sua derivata:

$$\mathcal{S}'(m) = -\frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{1+m}{2} \right) - \ln \left( \frac{1-m}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+m}{1-m} \right) = -\operatorname{arctanh} m$$

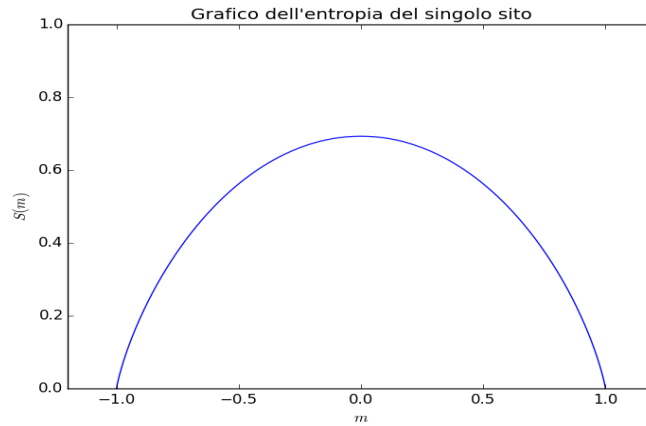


Figura 2.9: Grafico dell'entropia del singolo sito  $\mathcal{S}(m)$ .

Dimostriamo quest'ultima uguaglianza algebrica.

$$y = \operatorname{arctanh} m \quad m = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

Dobbiamo risolvere questa equazione:

$$m = \frac{1 - e^{-2y}}{1 + e^{-2y}} \quad m(1 + e^{-2y}) = 1 - e^{-2y}$$

$$e^{-2y}(m + 1) = 1 - m$$

$$e^{-2y} = \frac{1 - m}{m + 1}$$

$$-2y = \ln \left( \frac{1 - m}{1 + m} \right)$$

$$y = \operatorname{arctanh} m = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - m}{1 + m} \right)$$

Ora possiamo inserire questo risultato per cercare il minimo della  $F(m)$ :

$$F'(m) = -2dm - h + \frac{1}{\beta} \operatorname{arctanh} m = 0$$

Controlliamo i punti stazionari. Questa equazione può essere risolta implicitamente:

$$m = \tanh [\beta(2dm + h)] \quad (2.3)$$

Abbiamo ritrovato l'equazione (2.2)

Per interpretare questa soluzione studiamo il problema ad un solo sito. L'hamiltoniana è

$$H = -h\sigma$$

La magnetizzazione è data da:

$$m = \langle \sigma \rangle = \frac{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}} = \tanh(\beta h) \quad (2.4)$$

Confrontando le equazioni (2.3) e la (2.4) possiamo definire un campo magnetico efficace  $h_{eff}$  che agisce sul sito.

$$m = \tanh(\beta h_{eff}) \quad h_{eff} = 2dm + h$$

Ossia la presenza di una magnetizzazione degli spin vicini induce un campo magnetico efficace sugli stessi spin. Per trovare il minimo assoluto non abbiamo bisogno di preoccuparci dei bordi ( $S'(m)$  diverge nel bordo).

Il numero di punti stazionari dovrà essere un numero dispari (a meno di doppi zeri)

Vediamo che succede nel caso  $h = 0$ :

$$m = \tanh(2d\beta m) = 2d\beta m + o(m^2)$$

Questa soluzione può essere trovata graficamente (Figura 2.10)

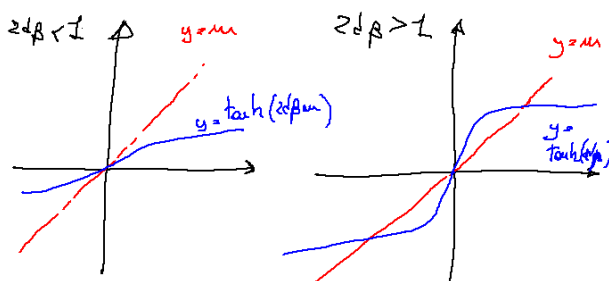


Figura 2.10: Schema della soluzione in assenza di campo magnetico esterno. Abbiamo due casi, a seconda se la pendenza della tangente iperbolica è maggiore o minore della bisettrice.

Esiste una temperatura critica al di sopra del quale abbiamo soluzioni  $m \neq 0$ , nell'ipotesi di campo medio. Le possibili configurazioni dell'energia libera sono riportate in Figura 2.11, 2.12 e 2.13.

Al punto critico ci aspettiamo che in corrispondenza del minimo l'energia libera sia:

$$F(m = 0) = c + O(m^4)$$

Cosa avviene quando inseriamo un campo magnetico? L'aggiunta di un campo magnetico corrisponde a aggiungere una retta al grafico, spostando tutti i minimi nel verso del campo magnetico.

$$F(m) = F_{h=0}(m) - hm$$

Se si guardano la posizione dei punti estremali della  $F$  in funzione del campo magnetico si ha una curva che descrive l'isteresi (Figura 2.14).

Anche in questo caso esiste una regione metastabile, in cui il sistema tenderà a decadere spontaneamente con un fenomeno simile alla nucleazione<sup>7</sup>. Questo grafico è in accordo qualitativamente con il fenomeno dell'isteresi: quando si

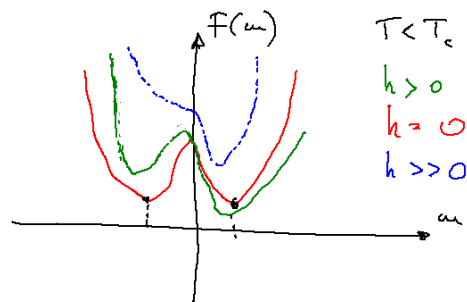


Figura 2.11: Grafico dell'energia libera in presenza di soluzione ferromagnetica. Come si vede la presenza di un campo magnetico sbilancia le soluzioni a  $m \neq 0$  rendendo uno dei due minimi metastabile (isteresi). Per grossi campi magnetici la soluzione metastabile sparisce.

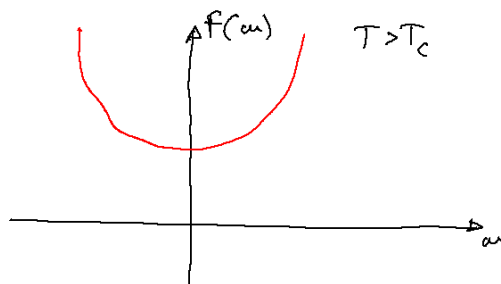


Figura 2.12: Energia libera nello stato paramagnetico ( $h = 0$ ). La presenza di un campo  $h$  sposta la posizione del minimo di poco nella direzione del campo applicato.

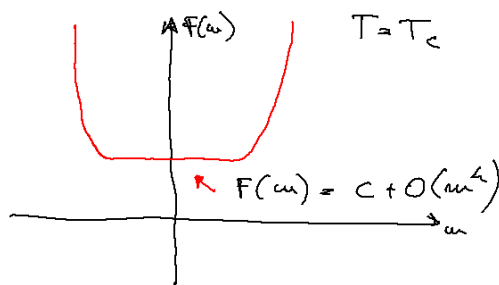


Figura 2.13: Energia libera al punto critico. In questa condizione si annulla anche la derivata seconda e terza dell'energia libera intorno al minimo, facendo in modo che la risposta del sistema anche a piccoli campi magnetici diverga (il minimo si sposta come la radice cubica della perturbazione, che ha derivata infinita in zero).



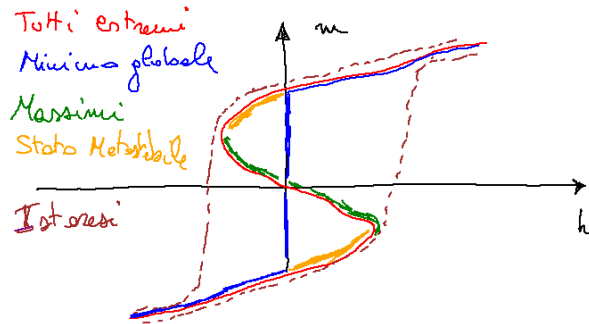


Figura 2.14: Insieme delle soluzioni di  $m$  per un dato  $h$ , per  $h$  molto grande c'è solo una soluzione, con  $m$  allineato ad  $h$ . Se guardiamo il minimo globale è una transizione del primo ordine. Tuttavia esistono stati metastabili.

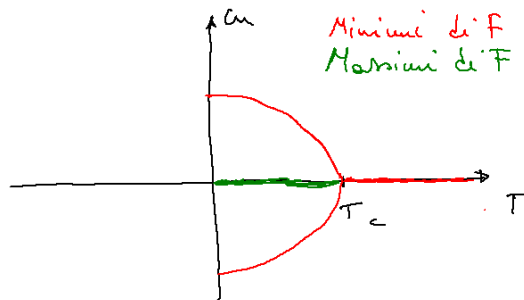


Figura 2.15: Presenza di una magnetizzazione spontanea sotto alla temperatura critica.

riduce  $h$  si percorre lo stato metastabile fino a decadere improvvisamente nella magnetizzazione inversa.

Possiamo studiare come si avvicina a zero la magnetizzazione vicino al punto critico (Figura 2.15).

$$m = \tanh(zm) \quad z = 2\beta d \quad (2.5)$$

Cosa succede quando  $z = 1 + \varepsilon$  (soluzioni per  $T < T_c$ )? Per piccoli  $m$  possiamo sviluppare in serie la tangente iperbolica:

$$\begin{aligned} m &= zm - \frac{1}{3}(zm)^3 \\ \frac{1}{3}z^3m^3 &= (z-1)m \quad z = 1 + \varepsilon \\ \frac{1}{3}z^3m^2 &= \varepsilon \\ m &= \sqrt{3\varepsilon} \end{aligned}$$

La magnetizzazione si avvicina alla temperatura critica con un andamento in radice quadrata.

$$m \propto (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$

Da cui l'esponente che controlla l'annullamento della magnetizzazione spontanea  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{2}$$

Questo risultato era all'epoca eccezionale, in discreto accordo con gli scarsi dati sperimentali. Alla luce delle misure più precisi di oggi questo non è vero. Il campo medio cattura qualitativamente il comportamento dei fenomeni. Però non descrive quantitativamente  $\beta$  (più prossimo ad  $1/3$ ), inoltre nel sistema ad una dimensione predice una transizione magnetica che non esiste (la soluzione analitica si discosta molto da quella approssimata con il campo medio).

### 2.3.2 Derivazione di Curie-Waiss

L'equazione di campo medio fu originariamente ricavata da *Curie* e *Waiss* differentemente. Data l'hamiltoniana del sistema.

$$H = \frac{1}{2} \sum_{ik} J_{ik} \sigma_i \sigma_k - \sum_i h_i \sigma_i$$

In approssimazione di campo medio è risolta dall'equazione:

$$m = \tanh(\beta h_i^{eff}) \quad h_i^{eff} = h_i + \sum_k J_{ik} m_k$$

Questa espressione si ottiene minimizzando l'energia libera in un sottospazio finito delle possibili soluzioni<sup>8</sup>. Curie e Waiss ragionarono in un modo più semplice. Se il sistema avesse un solo spin, l'hamiltoniana sarebbe:

$$H = -\sigma \hat{h}$$

<sup>7</sup>Per descrivere la nucleazione magnetica l'approssimazione di campo medio non basta e bisogna andare ad ordini superiori.

<sup>8</sup>L'approssimazione introdotta è dovuta al fatto di non rappresentare tutte le possibili soluzioni.

La magnetizzazione di questo sistema è facile da calcolare:

$$m = \langle \sigma \rangle = \frac{e^{\beta \hat{h}} - e^{-\beta \hat{h}}}{e^{\beta \hat{h}} + e^{-\beta \hat{h}}} = \tanh(\beta \hat{h})$$

L' $i$ -esimo spin però risente dell'interazione con i suoi vicini, descritta dall'hamiltoniana completa<sup>9</sup>:

$$H_i = - \left( h_i + \sum_k J_{ik} \sigma_k \right) \sigma_i$$

Confrontando le due hamiltoniane possiamo associare un campo magnetico efficace risentito dall' $i$ -esimo spin:

$$\hat{h}_i^{eff} = h_i + J_{ik} \sigma_k$$

In generale l'energia dell' $i$ -esimo spin dipende da quella di tutti i suoi vicini, possiamo però immaginare di “mediare” in qualche modo questa energia e associare a ciascuno spin l'energia media risentita da tutti gli spin. Il campo  $h^{eff}$  rappresenta il campo medio presente sull' $i$ -esimo sito.

Questa derivazione è quella originaria di Curie e Waiss, e spiega perché si chiama approssimazione di campo medio. Lo spin risente di un campo esterno dipendente dal tempo, che viene approssimato con il suo valore medio.

## 2.4 Funzione di risposta

Calcoliamo la risposta del sistema a piccoli campi magnetici esterni. Risolvere l'equazione di campo medio può essere molto difficile, in particolare quando dipendono dal sito. Il numero di soluzioni in questo caso diventa dell'ordine

$$e^{CN}$$

Con  $C$  una costante e  $N$  il numero di siti. Possiamo risolvere l'equazione in un caso semplice; mettiamoci nelle condizioni:

$$T > T_c \quad \beta < \beta_c \quad h = 0$$

L'equazione di campo medio diventa:

$$m = \tanh(\beta h_i^{eff})$$

Per  $h = 0$  la soluzione è banale.

$$m = 0$$

Mettiamo un  $h$  molto piccolo

$$h = \varepsilon \quad m_i = O(\varepsilon)$$

Sviluppiamo la tangente iperbolica:

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

---

<sup>9</sup>Lo spin  $i$  è fissato.

Fermiamoci al termine lineare, l'equazione finale è:

$$m_k = \beta \left( h_k + \sum_l J_{kl} m_l \right) + O(m^3)$$

Abbiamo messo un campo magnetico non nullo solo in un sito  $k$ , in realtà questa equazione può essere facilmente generalizzata per generici  $h$  infinitesimi. Questo sistema di equazioni è lineare con  $N$  incognite. Per fortuna la matrice  $J_{ik}$  ha una forma molto semplice e il sistema è invariante per traslazione.

Facciamo il conto nel caso unidimensionale. Poiché la matrice dipende solo dalla distanza otteniamo:

$$m_k = \beta h_k + \beta \sum_l J(k-l) m_l \quad (2.6)$$

Riconosciamo la convoluzione tra  $J$  ed  $m$ :

$$m_k = \beta h_k + \beta (J \otimes m)_k$$

Questa operazione si semplifica in trasformata di Fourier:

$$\tilde{m}(p) = \beta \tilde{h}(p) + \beta \tilde{J}(p) \tilde{m}(p)$$

L'equazione nello spazio degli impulsi è diagonale e può essere risolta facilmente:

$$\tilde{m}(p) = \frac{\beta \tilde{h}(p)}{1 - \beta \tilde{J}(p)} \quad (2.7)$$

Dove la trasformata di Fourier è definita:

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx} f(x)$$

E la trasformata di Fourier inversa è:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ipx} \tilde{f}(p)$$

Se la funzione è definita solo su un set discreto di punti (come nel nostro caso) la trasformata diventa una serie:

$$\tilde{f}(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-ipk}$$

Questa è una definizione perfetta di trasformata di Fourier, stiamo assumendo che la spaziatura del reticolo sia unitaria. Si nota immediatamente che:

$$\tilde{f}(p + 2\pi) = \tilde{f}(p)$$

La trasformata di Fourier è periodica con periodo  $2\pi$ , basta quindi calcolarla in un intervallo che ha lunghezza  $2\pi$ . Normalmente l'intervallo è

$$p \in [-\pi, \pi]$$

Questa zona è detta prima zona di Brillouine. Per le funzioni discrete è possibile definire una trasformata inversa in questo modo:

$$f(k) = \frac{1}{V_b} \int_B dp e^{ipk} \tilde{f}(p)$$

Dove l'integrale è esteso su tutta la prima zona di Brillouine, di cui  $V_b$  è il volume. Nel caso unidimensionale  $V_b = 2\pi$  (sempre nel caso di spaziatura unitaria<sup>10</sup> in  $k$ ). Nel caso di un reticolo quadrato la prima zona di Brillouine è un quadrato di lato  $2\pi$  (Figura 2.16)

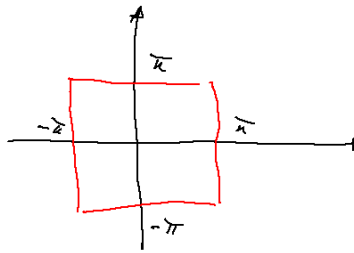


Figura 2.16: Schema della prima zona di Brillouine per un reticolo quadrato bidimensionale.

In un reticolo cubico tridimensionale la trasformata inversa diventa:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x dp_y dp_z e^{i(p_x k_x + p_y k_y + p_z k_z)} f(\vec{p})$$

La zona di Brillouine può avere forme più o meno complicate a seconda della geometria del reticolo. Tuttavia, poiché siamo interessati principalmente al comportamento a  $p$  piccoli, non faremo caso al dettaglio della forma della zona di Brillouine<sup>11</sup>.

Calcoliamo la trasformata di Fourier della  $J(k)$ . In una dimensione:

$$J(k) = \begin{cases} 1 & k \in \{-1, 1\} \\ 0 & k \notin \{-1, 1\} \end{cases}$$

$$\tilde{J}(p) = e^{ip} + e^{-ip} = 2 \cos(p)$$

In due dimensioni (per reticoli quadrati) gli unici termini diversi da zero sono:

$$J(1, 0) = J(-1, 0) = J(0, 1) = J(0, -1) = 1$$

$$\tilde{J}(p_x, p_y) = 2 \cos(p_x) + 2 \cos(p_y)$$

<sup>10</sup>Altrimenti basta fare un cambio di unità di misura.

<sup>11</sup>Lo studio della forma della prima zona di Brillouine è importantissimo per capire la geometria della sfera di Fermi, e inferire le proprietà elettriche del sistema (conduttore, isolante o semiconduttore). Il ferromagnetismo è poco influenzato dalla forma reticolare, mentre l'*antiferromagnetismo* (spin si anti allineano) no. In reticoli quadrati esiste uno stato fondamentale in cui gli spin sono sempre antiallineati con i primi vicini, mentre nel reticolo triangolare no. La forma del reticolo è determinante per la descrizione di fenomeni antiferromagnetici.

In  $D$  dimensioni si estende:

$$\tilde{J}(\vec{p}) = 2 \sum_{\nu=1}^D \cos(p_\nu)$$

Possiamo riscrivere l'equazione (2.7) introducendo la funzione di risposta lineare  $\tilde{\chi}(p)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{m}(p) &= \tilde{h}(p)\tilde{\chi}(p) \\ \tilde{\chi}(p) &= \frac{\beta}{1 - 2\beta \sum_{\nu} \cos(p_\nu)} \end{aligned}$$

Nella regione di risposta lineare la trasformata di Fourier di  $\tilde{m}$  è modulata da una funzione di risposta che è  $p$  dipendente. Questo ha senso quando la  $\tilde{\chi}$  è maggiore o uguale a zero<sup>12</sup>.

$$1 - 2\beta \sum_{\nu=1}^D \cos(p_\nu) \geq 0$$

Per verificare che questa condizione sia positiva basta che verifico cosa succede per  $p = 0$

$$1 - 2\beta D \geq 0$$

Poiché la temperatura critica è identificata dall'equazione (2.5):

$$1 = 2D\beta_c$$

Questa condizione corrisponde al caso:

$$\beta \leq \beta_c \quad T \geq T_c$$

Se introduciamo un campo  $h$  che si modula poco nello spazio, la magnetizzazione si concentra intorno a  $p \rightarrow 0$  e la suscettività diventa una costante:

$$\chi = \tilde{\chi}(p = 0) = \frac{1}{1 - 2\beta D} \sim \frac{1}{(T - T_c)}$$

Il campo medio predice un esponente di

$$\gamma = 1$$

Si può fare la trasformata inversa:

$$\begin{aligned} G_k = \chi_k &= \frac{1}{2\pi} \int_B dp e^{ipk} \tilde{\chi}(p) \\ m_k &= \chi_k \otimes h_k \end{aligned}$$

Se siamo in grado di calcolare la  $G_k$  possiamo riscrivere in maniera esplicita:

$$m_k = \sum_l G(k-l)h_l$$

---

<sup>12</sup>La magnetizzazione del sistema ha stessa direzione e verso del campo magnetico applicato.

Se mettiamo il campo magnetico diverso solo in un punto (detto punto zero).

$$h_l = \varepsilon \delta_{l0}$$

Si ottiene:

$$m_k = G(k)\varepsilon$$

La  $G$  è la risposta del sistema ad una perturbazione concentrata in un punto.

$$G(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_B \frac{e^{ipk}}{1 - 2\beta \sum_{\nu=1}^d \cos(p_\nu)} dp$$

Il problema è praticamente risolto, dobbiamo capire come questo integrale come si comporta. Facciamo alcune considerazioni generali sulle proprietà di analiticità delle trasformate di Fourier:

$$\tilde{f}(p) = \int dx f(x) e^{-ipx}$$

$$\tilde{f}(0) = \int dx f(x)$$

Se sviluppiamo intorno a piccoli  $p$

$$\tilde{f}(p) = \tilde{f}(0) + p\tilde{f}'(0) + \frac{p^2}{2}\tilde{f}''(0)$$

$$\tilde{f}(p) = \int dx f(x) \left[ 1 - ipx - \frac{p^2 x^2}{2} \right] = \int f(x) dx - ip \langle x \rangle - \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle p^2 + \dots$$

Se esistono tutte le derivate la funzione è analitica e quindi il comportamento nell'intorno di  $p = 0$  contiene tutte le informazioni sul comportamento della funzione anche a grande distanza. Se abbiamo una funzione del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

La trasformata di Fourier non è analitica. In effetti siamo in grado di calcolare questa trasformata di Fourier:

$$\tilde{f}(p) = c_1 e^{-c_2|p|}$$

Che non è chiaramente una funzione differenziabile. Supponiamo di prendere una funzione

$$f(x) \leq Ae^{-B|x|}$$

C'è un teorema che dice che se una funzione è ben definita dentro un dominio semplicemente connesso e differenziabile in quel dominio è anche analitica in quel dominio. Si vede che per  $p$  reale la trasformata si comporta bene, se  $p$  è complesso c'è presente un termine esponenziale che può far divergere l'integrale. Se la funzione  $f(x)$  è a supporto compatto, allora la trasformata di Fourier è sempre analitica.

Se  $f(x) = 0$  per  $|x| > A$  allora  $\tilde{f}(p)$  è analitica in tutto  $\mathbb{C}$ . Se la funzione è limitata da

$$f(x) \leq Ae^{-B|x|}$$

La funzione è analitica su una striscia con  $|\Im(p)| < B$ . Sapendo le proprietà di analiticità della trasformata di Fourier ci interessano quali sono le proprietà della funzione nello spazio originale. Se la funzione ha due singolarità nei punti

$$p = (0, m)$$

La trasformata va a grandi  $x$  a zero come

$$e^{-|x|m}$$

L'esistenza di una singolarità complessa mi dice come decade a grande distanza, a seconda del polo cambia il dettaglio dell'esponenziale, se il polo è del primo ordine abbiamo esattamente questo tipo di esponenziale:

$$\frac{1}{p^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{m} e^{-m|x|}$$

In tre dimensioni invece si ha:

$$\int \frac{d^3 p}{p^2 + m^2} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \propto \frac{e^{-m|x|}}{|x|}$$

Possiamo approfittare di queste proprietà per inferire qualcosa sulla  $G(k)$ . Sviluppiamo per piccoli  $p$ :

$$G(k) \approx \int_B \frac{d^D p e^{ipx}}{1 - 2\beta D + \beta \sum_{\nu} p_{\nu}^2 + O(p^4)}$$

Estendiamo per semplicità l'integrale su tutto lo spazio.

$$G(k) \approx \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p e^{ipk}}{1 - 2\beta D + \beta p^2 + O(p^4)}$$

$$p^2 = \sum_{\nu} p_{\nu}^2$$

Anche qui abbiamo due poli del primo ordine, il comportamento a grandi  $k$  deve essere del tipo

$$G(k) = e^{-\frac{|x|}{\xi}} \quad \xi = \sqrt{\frac{\beta}{1 - 2\beta D}}$$

La  $G$  va a zero molto rapidamente ad alte temperature, e la  $\xi$  rappresenta la lunghezza di correlazione, e la lunghezza di correlazione diverge come

$$\xi \sim \frac{1}{(T - T_c)^{\frac{1}{2}}}$$

La lunghezza identificata con  $\xi$  attualmente è la distanza massima<sup>13</sup> dal luogo della perturbazione alla quale è presente una risposta del sistema. Questa lunghezza diverge alla temperatura critica con un esponente di 0.5 secondo l'approssimazione di campo medio.

<sup>13</sup>Oltre questa distanza la risposta cade esponenzialmente.



### 2.4.1 Fluttuazioni

Vediamo come la risposta del sistema è direttamente collegata alle fluttuazioni, e cerchiamo di interpretare la  $\xi$  come lunghezza di correlazione del sistema (lunghezza tipica delle fluttuazioni).

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{\sum_c \exp(-\beta H[\sigma] + \beta \sum_k \sigma_i \sigma_k) \sigma_i}{\sum_c \exp(-\beta H[\sigma] + \beta \sum_k \sigma_i \sigma_k)}$$

Chiamiamo  $f[\sigma]$  il fattore di Boltzman per semplicità:

$$f_c[\sigma] = \exp\left(-\beta H[\sigma] + \beta \sum_k \sigma_i \sigma_k\right)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{\sum_c f_c[\sigma] \sigma_i}{\sum_c f_c[\sigma]}$$

Se calcoliamo la derivata del valore atteso dello spin rispetto alla perturbazione otteniamo:

$$\frac{\partial f_c[\sigma]}{\partial h_k} = \beta \sigma_k f_c[\sigma]$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial h_k} = \beta \frac{\sum_c \sigma_i \sigma_k f_c[\sigma] (\sum_{c'} f_{c'}[\sigma]) - \sum_c \sigma_i f_c[\sigma] \sum_{c'} \sigma_k f_{c'}[\sigma]}{(\sum_c f_c[\sigma])^2}$$

Riconoscendo i termini si ottiene:

$$\frac{\partial \langle m_i \rangle}{\partial h_k} = \beta [\langle \sigma_i \sigma_k \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_k \rangle]$$

Questa è una regola del tutto generale che viene dalla meccanica statistica. La risposta della magnetizzazione è legata alla fluttuazione della funzione di spin.

Per capire meglio il significato di questa relazione si può definire il prodotto connesso tra due operatori  $A$  e  $B$ :

$$\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle = \langle AB \rangle_c$$

Se gli operatori  $A$  e  $B$  fossero indipendenti il loro prodotto connesso sarebbe nullo. Questa grandezza rappresenta quanto sono dipendenti le due quantità.

$$\frac{\partial \langle m_i \rangle}{\partial h_k} = \beta \langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c \quad (2.8)$$

Questa equazione è valida all'equilibrio ed è detta **teorema di fluttuazione e dissipazione**.

Questa relazione sembra introdurre un paradosso: quando abbiamo costruito l'approssimazione di campo medio avevamo supposto che gli spin fossero scorrelati, se questo fosse vero, il teorema di fluttuazione e dissipazione prevederebbe una risposta nulla in magnetizzazione. Tuttavia siamo riusciti a ricavare ugualmente un'espressione per la funzione di risposta.

Questo apparente paradosso è dovuto all'utilizzo del principio variazionale, che permette di approssimare l'energia con un ordine maggiore rispetto alla configurazione. In un principio variazionale.

$$E = \langle \psi | H | \psi \rangle \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

Se lo stato è identificato a meno di un errore  $\varepsilon$ , l'energia, che si trova in un minimo, lo è a meno di  $\varepsilon^2$ .

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \varepsilon \quad E = E_0 + O(\varepsilon^2)$$

Quindi il valore dell'energia è approssimata molto meglio della singola funzione d'onda. Lo stato dei singoli spin è approssimato malissimo dalla teoria di campo medio. L'*FDT*<sup>14</sup> Calcola la risposta a partire dallo stato, che è un ordine più basso rispetto al calcolo della risposta a partire da un principio variazionale.

Il teorema di Fluttuazione e dissipazione giustifica l'aver chiamato  $\xi$  lunghezza di correlazione, perché rappresenta la distanza tipica di correlazione degli spin. Si può provare a procedere inserendo la correlazione trovata adesso negli spin e ricalcolare nuovamente  $\partial_h m$ . Questo è molto difficile perché non è evidente costruire una teoria perturbativa. Per costruire una teoria perturbativa occorre trovare un parametro "piccolo" attorno al quale possiamo sviluppare queste quantità. Questa teoria esiste ma è un artificio matematico complicato che non tratteremo.

## 2.5 Sviluppo ad alte e basse temperature

Possiamo provare a ottenere degli sviluppi perturbativi ad alte e basse temperature. Se abbiamo un modello risolubile per un determinato set di parametri è probabile che sia possibile fare uno sviluppo perturbativo attorno a quella soluzione.

Poniamo  $\beta = 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ) e cerchiamo di calcolare la funzione di partizione del sistema.

$$Z(\beta = 0) = \sum_{\langle \sigma \rangle} e^{-\beta H[\sigma]} = 2^N$$

$$\frac{1}{N} \ln Z = \ln 2$$

Possiamo trovare la densità di entropia:

$$S(\beta = 0) = \frac{S_t(\beta)}{N} = \ln 2$$

Ogni punto può avere due configurazioni e sono tutti equiprobabili. Possiamo cercare di costruire uno sviluppo perturbativo in potenze di  $\beta$ . Siamo interessati alla suscettività<sup>15</sup>.

$$\chi(\beta) = \beta + a_2\beta^2 + a_4\beta^4 + \dots$$

Si possono fare tutta una serie di approssimazioni per calcolare in modo efficiente questi coefficienti, quando l'algebra diventa estremamente più complicata. Attualmente questo conto è stato risolto fino al coefficiente  $a_{28}$ .

Il motivo per cui i fisici dello scorso secolo hanno speso moltissimo tempo per tentare di calcolare questi coefficienti è il loro legame con gli esponenti critici: il teorema del confronto di *Appel*.

<sup>14</sup>Teorema di fluttuazione e dissipazione (*Fluctuation-Dissipation Theorem*).

<sup>15</sup>Appaiono solo esponenti pari nel caso di un reticolo cubico semplice, per altri reticoli gli sviluppi possono essere completi.

**Teorema 2.5.1** (Appel's comparison theorem). *Siano  $f(z)$  e  $g(z)$  funzioni complesse analitiche dentro un cerchio di raggio  $r$ , con un'unico polo dello stesso ordine sul bordo del cerchio:*

$$f(z), g(z) \sim (R - z)^{-\gamma}$$

Allora i coefficienti del loro sviluppo di Taylor sono uguali per  $k \rightarrow \infty$ .

$$f(z) = \sum_k a_k z^k \quad g(z) = \sum_k b_k z^k \quad a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b_k$$

Se conoscessimo lo sviluppo in  $\beta$  a tutti gli ordini conosceremmo esattamente l'esponente critico. Tuttavia avendo un numero finito di ordini non è banale estrarre queste informazioni.

Le informazioni più interessanti estraibili da uno sviluppo in serie sono il raggio di convergenza e l'esponente critico:

$$R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+2}}$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{A_{n+2} A_{n-2}}{A_n^2} + 1$$

Quindi già fino all'ordine 28 si può sperare di estrapolare quello che avviene per  $k \rightarrow \infty$ . Con questo metodo gli esponenti critici sono noti con precisione di pochi decimi percentuali.

Questo approccio di calcolo è estremamente opaco: manca la comprensione della fisica dietro gli esponenti critici, perché è un conto di forza bruta. È impossibile inoltre capire per quale motivo  $\gamma$  è indipendente dalla forma del reticolo.

Un altro caso estremamente interessante è la temperatura nulla. In questo caso tutti gli spin sono allineati:

$$E_t = -\frac{1}{2} \sum_k \sigma_i \sigma_j J_k$$

L'energia totale è

$$E_t = -DN$$

Nel limite  $T \rightarrow 0$  l'energia per sito è pari al numero di dimensioni.

$$E = \frac{E_t}{N} = -D$$

Possiamo fare ora uno sviluppo per bassa temperatura. Questo conto è più istruttivo, l'obiettivo è quello di riallacciarsi ad un certo punto allo sviluppo ad alta temperatura.

Le uniche configurazioni che sopravvivono è tutti gli spin allineati o up o down. Da cui la funzione di partizione è

$$Z = 2e^{N\beta D}$$

Il coefficiente moltiplicativo 2 può essere buttato (è una costante additiva nelle funzioni di stato).

$$\frac{\ln Z}{N} = \beta D$$

Questo risultato è vero nel limite  $\beta \rightarrow \infty$ . Vogliamo calcolare le correzioni a questo termine. Quando alziamo la temperatura alcuni spin iniziano a rigirarsi.

Ogni volta che rovesciamo uno spin l'energia aumenta (e diminuisce la probabilità di trovarsi in questo stato a  $T$  bassa). Possiamo scrivere la funzione di partizione. La prima perturbazione è una configurazione con un solo spin rovesciato. Qual è la variazione di energia? Questo spin da un contributo all'energia che è positivo e vale  $2D$  (ha  $2D$  vicini). Quindi rispetto allo stato tutti gli spin allineati, lo stato con uno spin antiallineato ha in più  $4D$  di energia (un salto da  $-2D$  a  $2D$ ). Abbiamo  $N$  possibili spin possibili da rovesciare:

$$\begin{aligned} E_0 &= -DN & E_1 &= -DN + 4D \\ Z &= e^{-\beta E_0} + N e^{-\beta E_1} = e^{\beta DN} + N e^{\beta(DN-4D)} \\ Z &= e^{N\beta D} [1 + N e^{-4D\beta}] \end{aligned}$$

Per grandi valori di  $\beta$  il secondo esponenziale va a zero. Possiamo pensare di usare quell'esponenziale come termine perturbativo. Tuttavia l' $N$  davanti è fastidioso, per  $N \rightarrow \infty$  fa esplodere il termine perturbativo. Ovviamente a questo problema sviluppando l'entropia per sito.

$$\frac{\ln Z}{N} = \frac{1}{N} [N\beta D + \ln(1 + N e^{-4D\beta})]$$

Lavoriamo ad  $N$  finito e facciamo lo sviluppo perturbativo, e poi successivamente il limite  $N \rightarrow \infty$ . Questo scambio di limiti permette di risolvere il problema.

$$\frac{\ln Z}{N} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \beta D + e^{-4D\beta}$$

Questo mi elimina la dipendenza da  $N$ . Bisogna verificare che questo sia uno sviluppo perturbativo ragionevole. Vediamo che succede nel caso in cui consideriamo due difetti (due spin negativi in un mare di spin positivi).

In questo caso la situazione è più complicata. I due spin che rovesciamo possono toccarsi o meno. I due spin separati necessitano di un'energia pari a  $8D$  per essere rovesciati. Se però i due spin si toccano l'energia necessaria è  $8D - 4$ .

Se scriviamo tutte a sieme queste configurazioni si ottiene

$$Z(N, \beta) = e^{\beta DN} [1 + N e^{-4D\beta} + \#_1 e^{-8D\beta} + \#_2 e^{-8D\beta + 4\beta}]$$

I coefficienti  $\#_1$  e  $\#_2$  rappresentano quante configurazioni possibili esistono nel caso di due spin che non si toccano e quello in cui si toccano. Bisogna fare un'analisi combinatoria per capire quante sono il numero di configurazioni dei due tipi.

$$\#_1 + \#_2 = \frac{N(N-1)}{2}$$

Possiamo determinare quanti sono quelli adiacenti. Il primo spin ha  $N$  possibili posizioni, mentre il secondo lo posso scegliere solo tra i siti vicini (che sono  $2D$ )

$$\begin{aligned} \#_2 &= \frac{N2D}{2} = ND \\ \#_1 &= \frac{N(N-1) - 2ND}{2} \end{aligned}$$

Passiamo all'entropia per sito:

$$\frac{\ln Z}{N} - \beta D = \frac{1}{N} \ln \left[ 1 + Ne^{-4D\beta} + \left( \frac{N(N-1) - 2ND}{2} \right) e^{-8D\beta} + NDe^{-8D\beta+4\beta} \right]$$

Dobbiamo usare lo sviluppo del logaritmo al secondo ordine per  $\beta \rightarrow \infty$ .

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2}$$

L'unico termine al quadrato che rimane in questo sviluppo è  $e^{-4D\beta}$ , infatti tutti i doppi prodotti e gli altri quadrati hanno un ordine superiore.

$$\ln Z - \beta DN \rightarrow Ne^{-4D\beta} - \frac{1}{2}N^2e^{-8D\beta} + \left( \frac{N^2}{2} - \frac{1+2D}{2}N \right) e^{-8D\beta} + DN e^{-8\beta D+4\beta}$$

Si può vedere che la dipendenza da  $N^2$  è effettivamente annullata, e questo ci assicura la convergenza per  $N \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln Z}{N} = D\beta + e^{-4\beta D} - \frac{1+2D}{2}e^{-8D\beta} + De^{-8D\beta+4\beta}$$

Questa serie è una serie in cui i termini successivi diventano piccoli. Questo sviluppo concettualmente è molto semplice, per procedere basta rovesciare tre spin nel sistema; possono essere tutti staccati, due attaccati e uno staccato o tutti e tre attaccati. Con buona pazienza si può andare avanti fino all'ordine voluto.

La temperatura critica e gli esponenti critici calcolati in questo modo sono compatibili negli errori con quelli che si calcolano nel limite di alta temperatura (Figura 2.17).

Il problema di questo conto è quello di tentare di stabilire degli errori. Se si vuole dare una stima dell'errore si prova a fittare i risultati con una funzione

$$c + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n}$$

E si vede il valore asintotico, facendo un altro fit

$$c + \frac{c_1}{n+b}$$

Abbiamo differenti tecniche che possono essere usati per estrapolare il risultato finale. Si fa una stima dell'errore usando una decina o ventina di tecniche differenti e guardando quanto varia il risultato si calcola l'errore con la deviazione standard.

Si può chiamare  $t = e^{-4\beta}$  (parametro perturbativo). In un reticolo bidimensionale cubico semplice la magnetizzazione è:

$$m = 1 - 2t^3 - 12t^5 + 14t^6 - 90t^7 + \dots + 338095596t^{20}$$

Avendo un informazione parziale si ha un informazione approssimata di dove sono queste singolarità e quali sono questi esponenti. Per arrivare a  $t^{20}$  bisogna prendere 5 o 6 spin rovesciati. Per motivi tecnici lo sviluppo ad alta temperatura è più semplice da calcolare per grandi esponenti, quindi si sono spese più risorse in quella direzione.

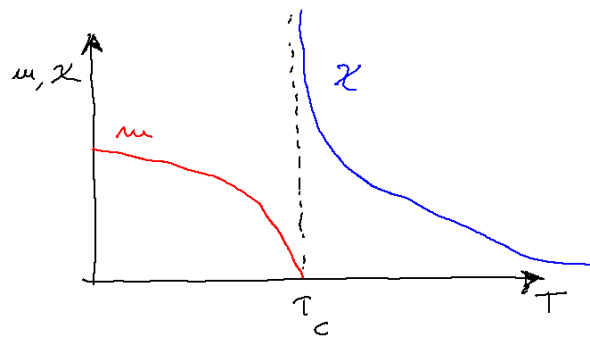


Figura 2.17: Calcolo della magnetizzazione e suscettività con lo sviluppo a bassa e alta temperatura. La temperatura critica e gli esponenti devono raccordarsi correttamente.

Se si cambia tipologia del reticolo i conti vanno rifatti nuovamente, la temperatura critica cambia nettamente, ma gli esponenti critici rimangono gli stessi.

Questa teoria non permette di capire perché questo avvenga. Per avere una comprensione fisica del fenomeno occorre sviluppare un modello alternativo che possa essere risolto analiticamente.

## Capitolo 3

# Modelli perturbativi

Il modello di Ising non può essere risolto analiticamente in un numero arbitrario di dimensioni. È molto difficile avere informazioni sul funzionamento fisico del sistema da soluzioni approssimate, come gli sviluppi ad alte e basse temperature. In questo capitolo introduciamo dei modelli modificati che permettono un calcolo esplicito della funzione di partizione. Preferiamo perdere in realismo per giungere ad una soluzione analitica esatta, dalla quale partire per un successivo sviluppo perturbativo.

### 3.1 Modello Gaussiano

Il più semplice derivato del modello di Ising è il modello gaussiano, in cui gli *spin* del sistema sono variabili continue, che possano assumere valori da  $-\infty$  a  $+\infty$ , caratterizzati da una distribuzione di probabilità *a priori*<sup>1</sup> gaussiana:

$$p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2/2} \quad \langle \sigma^2 \rangle = 1 \quad \langle \sigma^4 \rangle = 3$$

Il modello di Ising è approssimato correttamente fino al quarto momento della distribuzione di probabilità (per il modello di Ising tutti i momenti pari sono 1).

Calcoliamo la funzione di partizione:

$$Z = \int \frac{d\sigma_1 \cdots d\sigma_2}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^2 + \frac{\beta}{2} \sum_{ik} J_{ik} \sigma_i \sigma_k + \beta \sum_i h_i \sigma_i \right] \quad (3.1)$$

L'oggetto in questione è un integrale gaussiano, che può essere risolto analiticamente. La differenza con il modello di Ising si ottiene sostituendo alla sommatoria su tutti gli spin un integrale pesato sulla probabilità gaussiana:

$$\sum_{\sigma_i = \pm 1} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma_i^2/2}$$

---

<sup>1</sup>La distribuzione è *a priori* in quanto non è inclusa nell'hamiltoniana del sistema, ma viene introdotta *ad hoc* dal modello, senza nessuna apparente origine fisica.

### 3.1.1 Calcolo dell'integrale gaussiano

Affrontiamo passo per passo il calcolo dell'integrale (3.1). L'integrale gaussiano più semplice è il seguente (la cui dimostrazione può essere trovata in qualunque libro di analisi).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

Partendo da questo risultato possiamo procedere a successive complicazioni.

$$\int dx e^{-\frac{Ax^2}{2}}$$

Per fare questo conto facciamo una sostituzione.

$$y = x\sqrt{A} \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{A}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{A}}$$

Vediamo un integrale un po' più complicato

$$\int dx \exp\left(-\frac{1}{2}Ax^2 - Bx\right)$$

$$y = \sqrt{A}x + \frac{B}{\sqrt{A}} \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{A}}$$

$$\int dx \exp\left(\underbrace{-\frac{1}{2}Ax^2 - Bx - \frac{B^2}{2A} + \frac{B^2}{2A}}_{-\frac{1}{2}y^2}\right)$$

$$\int dx \exp\left(-\frac{1}{2}Ax^2 - Bx\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \exp\left(\frac{B^2}{2A}\right)$$

Tutto questo ha senso solo nel caso  $A > 0$ .

Possiamo sviluppare in serie di Taylor in tutti e due i lati (in  $B$ ):

$$\sqrt{\frac{2\pi}{A}} \sum_l \frac{1}{l!} \frac{B^{2l}}{(2A)^l} = \sum_k \frac{(-1)^k B^k}{k!} \int dx e^{-\frac{x^2}{2A}} x^k$$

Possiamo identificare i termini dello stesso ordine in potenza di  $B$  da entrambi i lati. Vediamo subito che i contributi a destra con  $k$  dispari sono tutti nulli (infatti l'integrando è antisimmetrico per  $k$  dispari).

$$\sqrt{\frac{2\pi}{A}} \sum_l \frac{1}{l!} \frac{B^{2l}}{(2A)^l} = \sum_k \frac{(-1)^{2k} B^{2k}}{(2k)!} \int dx e^{-\frac{x^2}{2A}} x^{2k}$$

Possiamo confrontare le due formule, quello che otteniamo sono tutti gli integrali:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{A}} \frac{1}{k!} \frac{1}{(2A)^k} = \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} \int dx \exp\left(-\frac{x^2}{2A}\right) x^{2k}$$



$$\sqrt{\frac{2\pi}{A}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)!} \frac{1}{(2A)^{\frac{k}{2}}} = \frac{1}{k!} \int dx \exp\left(-\frac{x^2}{2A}\right) x^k$$

Da cui si ottiene la formula dell'integrale gaussiano.

$$\sqrt{\frac{A}{2\pi}} \int dx \exp\left(-\frac{x^2}{2A}\right) x^k = \frac{k!}{\left(\frac{k}{2}\right)!} \frac{1}{(2A)^{\frac{k}{2}}}$$

Usando le identità del doppio fattoriale (o semifattoriale)

$$k!! = 2^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2}\right)! \quad k! = k!!(k-1)!!$$

Dove il doppio fattoriale è definito:

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n & \text{per } n \text{ dispari} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

Si può riscrivere

$$\sqrt{\frac{A}{2\pi}} \int dx \exp\left(-\frac{x^2}{2A}\right) x^k = A^{-\frac{k}{2}} (k-1)!!$$

$$\langle x^k \rangle_A = A^{-\frac{k}{2}} (k-1)!!$$

### Integrale gaussiano di una forma quadratica

Dobbiamo integrare una gaussiana in uno spazio  $n$ -dimensionale.

$$\int dx_1 \cdots dx_n \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ik} A_{ik} x_i x_k\right)$$

La matrice  $A$  è simmetrica<sup>2</sup>. Le matrici reali simmetriche godono del teorema spettrale, che assicura l'esistenza di una base ortonormale in cui la matrice è diagonale. Facciamo un cambio di variabili (rotazione e al più inversione degli assi) per porci in questo sistema di riferimento.

$$\int dy_i \exp\left(\sum_{i=1}^N \frac{y_i^2}{2} \lambda_i\right)$$

Questi integrali ora sono indipendenti, i coefficienti  $\lambda_i$  sono gli autovalori della matrice,  $y_i$  sono gli autovettori.

$$\int dy_i \exp\left(\sum_{i=1}^N \frac{y_i^2}{2} \lambda_i\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{(\prod_i \lambda_i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det A}}$$

La cosa che serve per fare l'integrale è conoscere il determinante della matrice. Perché questi integrali abbiano senso tutti i  $\lambda_i > 0$ , questo vuol dire che la matrice  $A$  è definita positiva.

$$\langle x|A|x \rangle > 0 \quad \forall |x \rangle$$

<sup>2</sup>O può essere simmetrizzata, infatti qualunque matrice può essere scritta come somma di due matrici, una simmetrica e una antisimmetrica. Poiché il termine  $x_i x_j$  è simmetrico il suo prodotto righe per colonne con parte antisimmetrica di  $A$  da zero.

Procediamo al calcolo di una forma quadratica generalizzata:

$$\int dx_1 \cdots dx_n \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{ik} A_{ik} x_i x_k - \sum_i B_i x_i \right)$$

Si può procedere a risolvere questo integrale attraverso una trasformazione. Possiamo definire l'inverso di una matrice.

$$\sum_k A_{ik} A_{kl}^{-1} = \delta_{il}$$

Possiamo introdurre il concetto di autovettori (autovettori disgiunti).

$$A_{ik} = \sum_s \lambda^{(s)} \psi_i^{(s)} \psi_k^{(s)}$$

La matrice inversa può essere riscritta come:

$$A_{ik}^{-1} = \sum_s \frac{1}{\lambda^{(s)}} \psi_i^{(s)} \psi_k^{(s)}$$

Se abbiamo una funzione continua definita sui reali (o complessi), possiamo definire la funzione applicata alla matrice nel seguente modo:

$$f(A)_{ik} = \sum_s f(\lambda^{(s)}) \psi_i^{(s)} \psi_k^{(s)}$$

Facciamo ora una sostituzione.

$$y_i = x_i + \sum_k (A^{-1})_{ik} B_k$$

Passiamo in notazione di Dirac per semplificare

$$|y\rangle = |x\rangle + A^{-1} |B\rangle$$

Riscriviamo l'integrale

$$\int dx_1 \cdots dx_n \exp \left( -\frac{1}{2} \langle x|A|x\rangle + \langle B|x\rangle \right)$$

Dove tutte le matrici sono hermitiane (simmetriche) e i vettori reali. Calcoliamo

$$\langle y|A|y\rangle = \langle x|A|x\rangle + \langle x|AA^{-1}|B\rangle + \langle B|A^{-1}A|x\rangle + \langle B|A^{-1}AA^{-1}|B\rangle$$

$$\langle y|A|y\rangle = \langle x|A|x\rangle + 2 \langle B|x\rangle + \langle B|A^{-1}|B\rangle$$

Tornando all'espressione iniziale (completiamo il quadrato)

$$\int dx_1 \cdots dx_n \exp \left( \underbrace{-\frac{1}{2} \langle x|A|x\rangle - \langle B|x\rangle - \frac{1}{2} \langle B|A^{-1}|B\rangle}_{-\frac{1}{2} \langle y|A|y\rangle} + \frac{1}{2} \langle B|A^{-1}|B\rangle \right)$$

Abbiamo anche in questo caso completato il quadrato. Il risultato finale è:

$$\int dx_1 \cdots dx_n \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{ik} A_{ik} x_i x_k - \sum_i B_i x_i \right) = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det A}} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{ik} B_i A_{ik}^{-1} B_k \right) \quad (3.2)$$

A volte questa formula è scritta diversamente, e si usa al posto del determinante di  $A$  la seguente espressione:

$$\det A = \exp [\text{Tr} (\ln A)]$$

Questo è banale nella base in cui la matrice è diagonale, ma poiché tutte le operazioni sono invarianti per qualunque trasformazione unitaria, vale in ogni base. Anche in questo caso è possibile sviluppare in potenze il lato destro e sinistre, e si ha come risultato:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^N}} \int dx \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_i x_i x_k A_{ik} \right) &= 1 \\ \langle x_i x_k \rangle &= A_{ik}^{-1} \\ \langle x_i x_k x_l x_m \rangle &= A_{ik}^{-1} A_{lm}^{-1} + A_{il}^{-1} A_{km}^{-1} + A_{im}^{-1} A_{kl}^{-1} \\ \langle x_i x_k x_l x_m x_r x_s \rangle &= A_{ik}^{-1} A_{km}^{-1} A_{rs}^{-1} + \cdots \end{aligned}$$

Ci sono  $5!!$  termini, che sono date da tutte le possibili permutazioni (15). In generale il numero di termini che appaiono è  $(n-1)!!$ , proprio come avevamo ottenuto nel caso in cui  $A$  era uno scalare.

## 3.2 Funzione di partizione

La funzione di partizione del modello gaussiano può essere calcolata come:

$$Z = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int \prod_{i=1}^N d\sigma_i \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \beta \sum_{ik} J_{ik} \sigma_i \sigma_k + \beta \sum_i h_i \sigma_i \right)$$

Possiamo scrivere la cosa in modo più compatto introducendo una matrice:

$$M_{ik} = \delta_{ik} - \beta J_{ik}$$

Con questa sostituzione la funzione di partizione risulta essere:

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int \prod_{i=1}^N d\sigma_i \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_i M_{ij} \sigma_j + \beta \sum_i h_i \sigma_i \right)$$

L'integrale della funzione di partizione può essere fatto utilizzando la formula 3.2:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\det M}} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{ik} h_i M_{ik}^{-1} h_k \right)$$

Abbiamo risolto il problema. Adesso abbiamo la funzione di partizione del modello! In realtà dobbiamo prima calcolare il determinante e l'inverso della matrice  $M$ . La matrice  $M$  è in realtà funzione solo della distanza tra  $i$  e  $k$ :

$$M_{i-k} = \delta_{i-k,0} - \beta J_{i-k}$$

Questo sistema può essere risolto calcolando autovalori e autovettori della matrice, da cui poi invertirla. Questa matrice dei coefficienti è la stessa che appare nel calcolo della funzione di risposta in approssimazione di campo medio per Ising (2.6).

$$M_{ik} = G_{i-k} = \int \frac{1}{(2\pi)^D} dp \exp(ipk) \tilde{G}(p)$$

Di cui conosciamo già la soluzione:

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{1 - 2\beta \sum_{\nu=1}^D m p_{\nu}}$$

Per il teorema di fluttuazione e dissipazione possiamo collegare la matrice  $M$  alla correlazione spin-spin (2.8):

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = M_{ik}^{-1}$$

La funzione di correlazione degli spin gaussiani diventa uguale alla funzione di correlazione di campo medio. Quindi il modello gaussiano le funzione di correlazioni esatte sono le stesse di quelle dell'approssimazione di campo medio per Ising.

$$\tilde{G}(0) = \frac{1}{1 - 2D\beta} \quad 2D\beta \leq 1$$

Poiché la correlazione deve essere sempre positiva, questo modello vale solo per  $T > T_c$ . Il modello riproduce correttamente il comportamento ad alta temperatura, ma l'integrale della funzione di partizione non converge a bassa temperatura. Il modello gaussiano riproduce la teoria di campo medio nella zona di alta temperatura ma fallisce completamente nel descrivere la transizione di fase, perché non esiste sotto la temperatura critica.

### 3.2.1 Interpretazione del modello gaussiano

Per ovviare a questo problema immaginiamo di avere un modello (senza campo magnetico) in cui sull' $i$ -esimo sito abbiamo  $n$  spin con

$$n = 1, \dots, M$$

Immaginiamo che l'interazione dia origine al termine di Boltzmann:

$$\exp\left(\frac{\beta}{2} \frac{1}{M} \sum_{iknn'} J_{ik} \sigma_i^n \sigma_k^{n'}\right)$$

Su ogni sito ci mettiamo  $n$  coppie dello spin, e tutti gli spin interagiscono gli uni con gli altri. La magnetizzazione  $m_i$  dell' $i$ -esimo sito è il valore atteso dello spin su quel sito:

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^M \sigma_i^n$$

L'hamiltoniana può essere riscritta:

$$\sum_{ik} J_{ik} m_i m_k$$

Per il teorema del limite centrale la distribuzione delle  $m$  per  $M \rightarrow \infty$  è una gaussiana (nella fase di alta temperatura, in cui l'agitazione termica spezza le forti correlazioni dell'interazione sito-sito). Questo è quindi un modo per costruire il modello gaussiano a partire da quello di Ising

### 3.3 Modello di Landau-Ginzburg

Il modello gaussiano non è affidabile per basse temperature, occorre creare un nuovo modello che sia più realistico. L'idea di Landau-Ginzburg è quella di prendere la media degli spin che occupano una data regione, e definire un campo  $\varphi(x)$  che rappresenta la magnetizzazione media su questi spin. L'hamiltoniana della funzione  $\varphi(x)$  non è nota a priori. L'idea di Landau è di indovinare una forma ragionevole dell'hamiltoniana tenendo conto delle simmetrie del problema; introducendo la più semplice hamiltoniana che preveda la transizione di fase del secondo ordine (non basta un termine quadratico in  $\varphi$ , altrimenti ci riconduciamo al modello gaussiano).

Questo modello può essere scritto introducendo nell'hamiltoniana una correzione di quarto ordine in  $\varphi$  rispetto al modello gaussiano in modo da far convergere l'integrale anche per basse temperature, e poi partire dalla soluzione analitica del modello gaussiano per giungere, attraverso uno sviluppo perturbativo nel termine al quarto ordine, a soluzioni più realistiche.

Dobbiamo scrivere un hamiltoniana per  $\varphi$ :

$$H_{eff}(\varphi) = \int dx \left[ \frac{1}{2} \tau \varphi^2(x) + \frac{1}{4!} g \varphi^4(x) + \frac{1}{2} \sum_{\mu} (\partial_{\mu} \varphi(x))^2 - h(x) \varphi(x) \right]$$

Il termine quadratico in  $\varphi$  è presente anche nel modello gaussiano, abbiamo aggiunto un termine al quarto ordine. Il termine con la derivata prima al quadrato introduce un costo di energia di interfaccia, cambiamenti repentini della "magnetizzazione"  $\varphi$  hanno un alto costo in energia. Questo termine tende a smussare la soluzione. L'ultimo termine ci dà l'effetto del campo magnetico esterno. Il coefficiente  $\tau$  è legato alla temperatura con la seguente espressione:

$$\tau \propto (T - T_c)$$

Il modello gaussiano è un caso particolare del modello di Landau-Ginzburg per  $g = 0$ . Potremo aggiungere anche termini più grandi come  $\varphi^6$ , ci fermiamo però a  $\varphi^4$  perché l'hamiltoniana può essere risolta in modo più semplice. Il modello di Landau-Ginzburg ha un'importanza storica soprattutto per la superconduttività. L'idea di Landau-Ginzburg era quella di descrivere la superconduttività attraverso un processo di condensazione di Bose-Einstein. La  $\varphi(x) \in \mathbb{C}$  era un parametro per descrivere la funzione d'onda condensata, e cercarono di scrivere la più semplice (all'ordine più basso in  $\varphi$ ) azione che prevedesse una condensazione di Bose-Einstein.

$$\frac{1}{2} \tau (\varphi(x) \bar{\varphi}(x))^2 + \frac{1}{4!} g (\varphi \bar{\varphi})^4 + \frac{1}{2} \sum_{\mu} \partial_{\mu} \varphi(x) \partial_{\mu} \bar{\varphi}(x)$$

In presenza di campo magnetico esterno (assente nel modello originale) occorre modificare il termine con le derivate della  $\varphi$  in questo modo:

$$\sum_{\mu} (\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) \varphi(x) (\partial_{\mu} - ieA_{\mu}) \bar{\varphi}(x)$$

Derivare microscopicamente l'equazione di Landau-Ginzburg è estremamente complicato, tuttavia ci sono molti fenomeni che si possono spiegare assumendo l'equazione di Landau-Ginzburg vera, per cui è un modello di semi-alto livello che descrive abbastanza bene la fenomenologia dei superconduttori, e delle transizioni ferromagnetiche.

Cerchiamo la configurazione  $\varphi$  che minimizza l'hamiltoniana.

$$\frac{\delta H}{\delta \varphi(x)} = \tau \varphi(x) + \frac{g}{3!} \varphi^3(x) - \nabla^2 \varphi(x) - h(x) = 0$$

Questa espressione si ottiene facendo una variazione (nulla all'infinito) di

$$\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi \quad \delta H = \int dx \frac{\delta H}{\delta \varphi(x)} \delta\varphi(x)$$

Il termine più rognoso è il terzo (quello con il laplaciano), vediamo di ricavarlo esplicitamente:

$$\int dx \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu} [\partial_{\mu}(\varphi + \delta\varphi)]^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mu} (\partial_{\mu}\varphi)^2 \right\} = \int \sum_{\mu} \partial_{\mu}\varphi \partial_{\mu}\delta\varphi dx + O(\delta\varphi^2)$$

Questo termine deve essere integrato per parti, il termine integrato si annulla (variazione nulla agli estremi):

$$\sum_{\mu} \int \partial_{\mu}^2 \varphi(x) \delta\varphi(x) dx = - \int \nabla^2 \varphi(x) \delta\varphi(x) dx$$

Cerchiamo soluzioni con campo magnetico nullo e  $\varphi$  costante:

$$\varphi(x) = \varphi \quad \tau\varphi + \frac{g}{6}\varphi^3 = 0$$

Esiste una soluzione banale e due non banali.

$$\varphi = 0 \quad \varphi = \pm \sqrt{-\frac{6}{g}\tau}$$

Le soluzioni  $\varphi \neq 0$  esistono solo per  $\tau < 0$  (ossia  $T < T_c$ ). Notiamo che per avere soluzioni  $\tau < 0$  è necessario il termine  $\varphi^4$  nell'hamiltoniana ( $g$ ), se  $g$  fosse nullo questa soluzione non esisterebbe.

Studiamo ora cosa succede in presenza di un piccolo campo magnetico ad alta temperatura (trascuriamo il termine  $\varphi^4$ ):

$$\tau\varphi(x) - \nabla^2\varphi(x) = h(x)$$

$$(\tau - \nabla^2)\varphi(x) = h(x)$$

Questa equazione può essere risolta trovando una funzione di Green  $G(x-y)$  in grado di invertire l'operatore differenziale applicato alla  $\varphi$ :

$$(\tau - \nabla_x^2)G(x) = \delta(x) \quad \varphi(x) = \int dy G(x-y)h(y)$$

L'equazione per  $G(x)$  può essere risolta nel dominio degli impulsi:

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{\tau + p^2}$$

Questa è la stessa soluzione che si ricava dall'approssimazione di campo medio nel modello di Ising. Per  $g \rightarrow 0$  abbiamo il limite della teoria di campo medio, quando  $g \neq 0$  si può studiare il sistema reale a temperatura finita. Se  $g$  è piccolo possiamo sviluppare una teoria perturbativa attorno a questo parametro<sup>3</sup>.

Procediamo al calcolo della funzione di partizione:

$$Z = \int d[\varphi] \exp(-H_{eff}[\varphi])$$

La funzione di partizione è scritta come un integrale funzionale, svolto tutte le possibili funzioni  $\varphi$ . Analogamente possiamo definire il valore atteso

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle = \frac{\int d[\varphi] \varphi(x)\varphi(0) \exp(-H[\varphi])}{Z}$$

Per passare ad una scrittura più familiare si può introdurre un reticolo con spaziamento  $a$ , e identificare la posizione  $\vec{x} = \vec{k}a$ .

L'integrale funzionale diventa la somma su tutti i possibili valori di  $\varphi$  sul reticolo.

$$H_{eff} = a^D \sum_i \left[ \frac{\tau}{2} \varphi_i^2 + \frac{g}{4!} \varphi_i^4 + \sum_{\mu} \left( \frac{\varphi_{\mu+i} - \varphi_i}{a} \right)^2 - h_i \varphi_i \right]$$

Dove abbiamo usato la convenzione:

$$\varphi(\vec{k}i) = \varphi_{\vec{k}}$$

Mettere o non mettere il reticolo è un fatto noioso, l'introduzione del reticolo non è fondamentale ma comodo per definire alcuni conti.

### 3.3.1 Sviluppo diagrammatico

Introduciamo una tecnica perturbativa vincente, che permette di introdurre i diagrammi di Feynman per la fisica della materia. Si può partire dalla soluzione del modello gaussiano:

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = G(x-y)$$

$$\langle \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(t) \rangle = G(x-y)G(z-t) + G(x-z)G(y-t) + G(x-t)G(y-z)$$

<sup>3</sup>La teoria delle perturbazione fu usata per la prima volta in meccanica celeste studiando l'effetto delle piccole perturbazioni della massa di Giove su quella degli altri pianeti.

E così via (in generale sono  $n!!$  termini). Abbiamo già dimostrato che la funzione di Green  $G(x)$  è la stessa che risolve l'equazione di campo medio per Ising, ossia la funzione di risposta del sistema:

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int dp \frac{\exp(ipx)}{p^2 + \tau}$$

La funzione di partizione può essere fattorizzata in un contributo presente anche nel modello Gaussiano, per uno aggiuntivo:

$$Z = \int d[\varphi] \exp(-H_0[\varphi]) \exp\left[-\int \frac{g}{4!} \varphi^4(x) dx\right]$$

Possiamo sviluppare il termine in  $g$  in serie di potenze:

$$\exp\left[-\int \frac{g}{4!} \varphi^4(x) dx\right] = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{g}{4!}\right)^k \left[\int dx \varphi^4(x)\right]^k$$

Usiamo la notazione di valore atteso con uno zero per specificare il calcolo fatto a  $g = 0$

$$\langle A \rangle_0 = \frac{\int d\varphi \exp[-H_0(\varphi)] A(\varphi)}{\int d\varphi \exp[-H_0(\varphi)]}$$

Al primo ordine si ottiene

$$\begin{aligned} \exp\left[-\int \frac{g}{4!} \varphi^4(x) dx\right] &= 1 - \frac{g}{4!} \int dx \varphi^4(x) + O(g^2) \\ \langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_1 &= \frac{\int d\varphi \exp[-H_0(\varphi)] \left(1 - \frac{g}{4!} \int dx \varphi^4(x)\right) \varphi(x)\varphi(0)}{\int d\varphi \exp[-H_0(\varphi)] \left(1 - \frac{g}{4!} \int dx \varphi^4(x)\right)} \end{aligned}$$

Che possiamo riscrivere come il rapporto di due valori attesi fatti nel modello gaussiano (considerando solo  $H_0$  come hamiltoniana, con  $g = 0$ ):

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_1 = \frac{\langle \varphi(x)\varphi(0) \left[1 - \frac{g}{4!} \int dy \varphi^4(y)\right] \rangle_0}{\langle 1 - \frac{g}{4!} \int dy \varphi^4(y) \rangle_0} \quad (3.3)$$

Possiamo calcolare denominatore e numeratore in maniera esplicita, poiché sono valori attesi dei campi  $\varphi$  calcolati nel modello gaussiano. Tuttavia esiste un teorema ricorsivo (può essere dimostrato banalmente in questo caso) che permette di semplificare notevolmente il calcolo.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(t)\varphi(u)\varphi(w) \rangle_0 &= G_0(x-y) \langle \varphi(z)\varphi(t)\varphi(u)\varphi(w) \rangle_0 + \\ &+ G_0(x-z) \langle \varphi(y)\varphi(t)\varphi(u)\varphi(w) \rangle_0 + \\ &+ G_0(x-t) \langle \varphi(y)\varphi(z)\varphi(u)\varphi(w) \rangle_0 + \\ &+ G_0(x-u) \langle \varphi(y)\varphi(z)\varphi(t)\varphi(w) \rangle_0 + \\ &+ G_0(x-w) \langle \varphi(y)\varphi(z)\varphi(t)\varphi(u) \rangle_0 \end{aligned}$$



Si sceglie un determinante campo e si “contrae” quel campo con tutti gli altri (scrivendo la funzione di Green delle due variabili dei campi contratti) per il valore atteso dei restanti campi. Questo risultato è noto come **teorema di Wick**<sup>4</sup>.

Grazie al teorema di Wick è possibile calcolare facilmente il denominatore.

$$\left\langle 1 - \frac{g}{4!} \int dy \varphi^4(x) \right\rangle_0$$

Dove possiamo scrivere

$$\varphi^4(y) = \varphi(y)\varphi(y)\varphi(y)\varphi(y)$$

Possiamo procedere alle contrazioni (sottintendiamo che tutti i valori attesi sono sul modello gaussiano):

$$\langle \varphi^4(y) \rangle = 3G(y-y) \langle \varphi(y)\varphi(y) \rangle = 3G^2(0)$$

$$\left\langle 1 - \frac{g}{4!} \int dy \varphi^4(x) \right\rangle_0 = 1 - \frac{g}{4!} \int dy 3G^2(0)$$

Procediamo a calcolare il numeratore; il termine con più campi è:

$$\langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y) \rangle$$

Contraiamo il campo  $\varphi(x)$ .

$$\langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y) \rangle = G(x) \langle \varphi^4(y) \rangle + 4G(x-y) \langle \varphi(0)\varphi^3(y) \rangle$$

Contraendo successivamente i valori attesi rimanenti si ottiene:

$$\langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y) \rangle = G(x)3G^2(0) + 12G(x-y)G(y)G(0)$$

Da cui otteniamo che il valore atteso del prodotto di due campi al primo ordine è:

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_1 = \frac{G(x) - \frac{g}{4!} \int dy [3G^2(0)G(x) + 12G(x-y)G(y)G(0)]}{1 - \frac{g}{4!} \int dy 3G^3(0)}$$

Il primo termine dell'integrando non dipende da  $x$ :

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_1 = \frac{G(x) \left[ 1 - \frac{g}{4!} V 3G^2(0) \right] + \frac{g}{4!} \int dy 12G(x-y)G(y)G(0)}{1 - \frac{g}{4!} V 3G^2(0)}$$

Ricordiamo che tutto questo è uno sviluppo al primo ordine in  $g$ , pertanto possiamo riscrivere il denominatore:

$$\frac{1}{1 - Ag} = 1 + Ag + O(g^2)$$

<sup>4</sup>Da Giancarlo Wick, fisico torinese che scoprì questa proprietà per le funzioni di Green in teoria dei campi.

$$\left\{ G(x) \left[ 1 - \frac{g}{4!} V 3G^2(0) \right] + \frac{g}{4!} \int dy 12G(x-y)G(y)G(0) \right\} \left[ 1 + \frac{g}{4!} V 3G^2(0) \right] + O(g^2)$$

Tenendo solo i termini al primo ordine nel prodotto otteniamo:

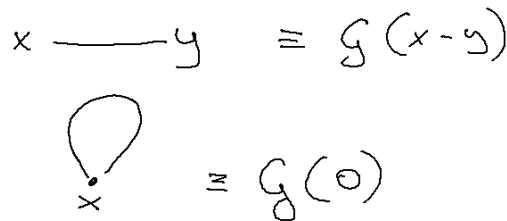
$$G(x) \left[ 1 - \frac{g}{4!} V 3G^2(0) \right] + G(x) \frac{g}{4!} V 3G^2(0) + \frac{g}{4!} \int dy 12G(x-y)G(y)G(0) + O(g^2)$$

In questo modo i due termini che divergono con  $V$  si cancellano a vicenda, e il risultato finale è:

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_1 = G(x) + \frac{g}{2} \int dy G(x-y)G(y)G(0)$$

Si nota immediatamente che per  $g = 0$  si ritrova il risultato gaussiano, in questo modo abbiamo calcolato la prima correzione perturbativa. Naturalmente si può andare oltre e calcolare le correzioni per valori più alti di  $g$ , tuttavia i conti diventano molto laboriosi. Possiamo semplificarli nettamente utilizzando un approccio grafico.

Si può usare un metodo grafico, ciascuna contrazione si rappresenta come una linea che unisce gli argomenti dei campi (Figura 3.1)



$$x \text{ --- } y \equiv G(x-y)$$

$$\text{loop with } x \equiv G(0)$$

Figura 3.1: Nei diagrammi di Feynmann una linea che unisce due punti è una contrazione tra due campi, e in formule è rappresentata da una funzione di Green.

La regola di Wick può essere riscritta con dei disegni, illustrando tutte le possibili contrazioni tra i campi (Figura 3.2).

Il valore atteso di due campi al primo ordine può essere riscritto in termini diagrammatici (Figura 3.3)

La correzione rispetto al primo ordine è data dal diagramma in Figura 3.4.

Mentre il termine aggiuntivo che abbiamo visto elidersi con il denominatore è rappresentato da un diagramma esposto in Figura 3.5.

Tutti i diagrammi sconnessi (Figura 3.5) si cancellano sempre con i contributi del denominatore. I diagrammi sconnessi danno sempre un contributo che diverge con il volume (una delle variabili non è presente nell'integrando). Per fortuna esiste un teorema per il quale tutti i diagrammi sconnessi si cancellano sempre tra numeratore e denominatore.

Si può anche arrivare ad ordini successivi, ad esempio al secondo ordine apparirà un integrale del tipo:

$$\int dy_1 dy_2 \langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y_1)\varphi^4(y_2) \rangle = 8G(x-y_1) \underbrace{\langle \varphi(0)\varphi^3(y_1)\varphi^4(y_2) \rangle}_{G(y_1)\langle \varphi^3(y_1)\varphi^3(y_2) \rangle + \dots} + \dots$$

$$\langle \cdot \cdot \cdot \cdot \rangle = \diagup + \diagdown + \curvearrowright$$

Figura 3.2: Applicazione diagrammatica del teorema di Wick: i campi sono rappresentati dai quattro puntini disegnati, la media dei campi è data dalla somma di tutte le possibili contrazioni a coppie.

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle = \frac{\overset{x}{\bullet} \xrightarrow{\quad} \overset{0}{\bullet} - \frac{3g}{4!} \int dy \text{diagram} - \frac{12g}{4!} \overset{0}{\bullet} \xrightarrow{\quad} \overset{x}{\bullet}}{1 - \frac{g}{4!} \int dy \text{diagram}}$$

Figura 3.3: Riscrittura diagrammatica dell'espressione (3.3).

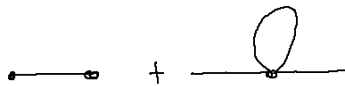


Figura 3.4: Correzione diagrammatica al primo ordine  $G(x-y)G(0)G(y)$ . Questo è il diagramma che sopravvive, e non si cancella con il denominatore.



Figura 3.5: Diagramma sconnesso del denominatore. Questo diagramma presenta una divergenza in volume, e si cancella tra numeratore e denominatore. La sua scrittura in funzioni di Green è  $G(0)^2$ .

Il primo termine è dato dal prodotto delle seguenti funzioni di Green.

$$G(x - y_1)G(y_1 - y_2)^3G(y_2 - 0) \quad (3.4)$$

Che è rappresentato da un diagramma di Feynman mostrato in Figura 3.6

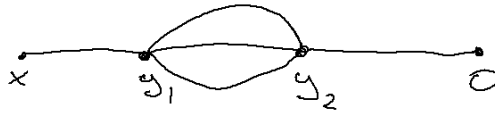


Figura 3.6: Schema di un diagramma del secondo ordine che rappresenta l'equazione 3.4.

### 3.3.2 Calcolo al secondo ordine

Procediamo al calcolo della correlazione al secondo ordine.

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle_2 = \frac{\int d\varphi \exp[-H_0(\varphi)] \left( 1 - \frac{g}{4!} \int dy \varphi^4(y) + \frac{g^2}{2(4!)^2} \int dy dz \varphi^4(y)\varphi^4(z) \right) \varphi(x)\varphi(0)}{\int d\varphi \exp[-H_0(\varphi)] \left( 1 - \frac{g}{4!} \int dy \varphi^4(y) + \frac{g^2}{2(4!)^2} \int dy dz \varphi^4(y)\varphi^4(z) \right)}$$

In questa espressione è presente sia il termine di ordine zero, che i termini del primo ordine che abbiamo già calcolato. Isoliamo solo i termini al secondo ordine:

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle_2 \approx \frac{g^2}{2(4!)^2} \int dy dz \langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y)\varphi^4(z) \rangle$$

Abbiamo già nominato nella scorsa sezione l'esistenza di un teorema per il quale il denominatore si semplifica con tutti i diagrammi sconnessi del numeratore. Possiamo dare per buono questo risultato e limitarci a calcolare i diagrammi connessi legati a questo termine. Procediamo a fare tutte le possibili contrazioni: contraiamo  $\varphi(x)$  e  $\varphi(0)$  per ottenere il primo termine della seguente espressione, e le contrazioni tra  $\varphi(x)$  con  $\varphi(y)$  o  $\varphi(z)$  per il secondo termine.

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle_2 = \frac{1}{(4!)^2} \left[ \frac{1}{2}G(x-0) \langle \varphi^4(y)\varphi^4(z) \rangle + 4G(x-y) \langle \varphi^3(y)\varphi^4(z)\varphi(0) \rangle \right] \quad (3.5)$$

Poiché  $y$  e  $z$  sono variabili mute è possibile sommare le due integrazioni, il 4 davanti è dovuto alle contrazioni con 4 termini per campo, diviso per il fattore  $1/2$ .

Questi due termini possono essere rappresentati diagrammaticamente come in Figura 3.7.

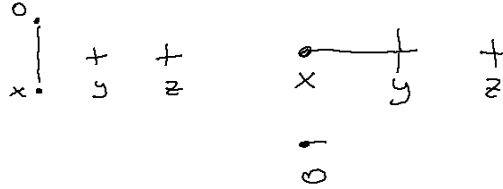


Figura 3.7: Diagrammi per l'equazione 3.5. I campo contratti sono rappresentati dalle linee, i campi che devono essere ancora contratti da delle croci, con tante linee uscenti quante sono le rimanenti contrazioni da fare. Si evince subito che il primo termine può dare origine solo a diagrammi sconnessi, infatti la contrazione tra  $x$  e  $0$  è sconnessa da tutto il resto e non può essere più connessa (non ci sono più contrazioni disponibili per questi campi).

Il primo termine è certamente un diagramma sconnesso (vedi Figura 3.7), che quindi si semplifica con il denominatore.

Possiamo procedere mantenendo solo il secondo termine. Contraiamo il campo  $\varphi(0)$ : la contrazione con  $\varphi(y)$  può essere effettuata 3 volte, mentre quella con  $\varphi(z)$  4.

$$\frac{1}{(4!)^2} [12G(x-y)G(y-0) \langle \varphi^2(y)\varphi^4(z) \rangle + 16G(x-y)G(z-0) \langle \varphi^3(y)\varphi^3(z) \rangle] \quad (3.6)$$

Anche in questo caso in Figura 3.8 è raffigurata la rappresentazione diagrammatica.

Focalizziamoci sul primo termine, contraiamo i due  $\varphi(y)$  e  $\varphi(y)$  con  $\varphi(z)$ :

$$\langle \varphi^2(y)\varphi^4(z) \rangle = G(y-y) \langle \varphi^4(z) \rangle + 4G(y-z) \langle \varphi(y)\varphi^3(z) \rangle$$

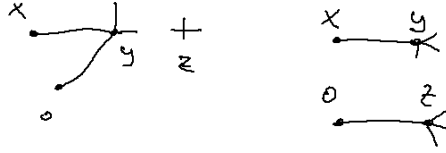


Figura 3.8: Diagrammi collegati all'equazione (3.6). Rispetto alla Figura 3.7 abbiamo connesso una delle linee libere in due modi possibili.

Sostituendo nell'equazione 3.6 si ottiene (solo per il primo termine)

$$\frac{1}{(4!)^2} [12G(x-y)G(y-0)G(y-y) \langle \varphi^4(z) \rangle + 48G(x-y)G(y-0)G(y-z) \langle \varphi(y)\varphi^3(z) \rangle + \dots] \quad (3.7)$$

Questi diagrammi sono rappresentati in Figura 3.9.

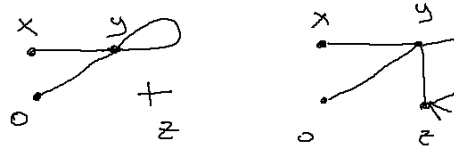


Figura 3.9: Diagrammi associati all'equazione 3.7, è evidente che il primo termine da origine ad un diagramma sconnesso.

Si vede facilmente che il primo termine è sconnesso e può essere buttato. I termini che restano sono:

$$\frac{1}{(4!)^2} [48G(x-y)G(y-0)G(y-z) \langle \varphi(y)\varphi^3(z) \rangle + 16G(x-y)G(z-0) \langle \varphi^3(y)\varphi^3(z) \rangle] \quad (3.8)$$

Calcoliamo le contrazioni dell'ultimo termine:

$$\langle \varphi^3(y)\varphi^3(z) \rangle = 2G(y-y) \langle \varphi(y)\varphi^3(z) \rangle + 3G(y-z) \langle \varphi^2(y)\varphi^2(z) \rangle \quad (3.9)$$

Il primo termine è la contrazione tra due campi  $\varphi(y)$  (due possibili) mentre l'altro è la contrazione tra un campo  $\varphi(y)$  e  $\varphi(z)$ . I diagrammi di questa contrazione sono riportati in Figura 3.10.

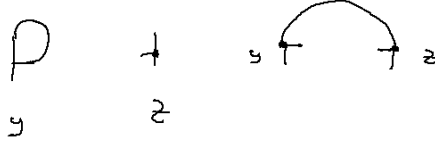


Figura 3.10: Diagrammi relativi all'equazione 3.9.

Possiamo andare avanti

$$\langle \varphi^3(y)\varphi^3(z) \rangle = 6G(y-y)G(y-z) \underbrace{\langle \varphi^2(z) \rangle}_{G(z-z)} + 3G(y-z) [G(y-y) \langle \varphi^2(z) \rangle + G(y-z) \langle \varphi(y)\varphi(z) \rangle]$$

$$\langle \varphi^3(y)\varphi^3(z) \rangle = 9G(y-y)G(z-z)G(y-z) + 6G^3(y-z) \quad (3.10)$$

I diagrammi finali per questo termine sono riportati in Figura 3.11.



Figura 3.11: Diagrammi dell'equazione 3.10.

Questi diagrammi possono essere ricongiunti con i termini iniziali (Figura 3.12).

Sostituendo le espressioni finali dell'equazione (3.10) nell'equazione (3.8) si arriva all'ultima contrazione:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_2 = & \frac{g^2}{(4!)^2} [144G(x-y)G(y-y)G(y-z)G(z-z)G(z-0) + \\ & + 144G(x-y)G(y-z)^2G(z-z)G(y-0) + \\ & + 96G(x-y)G(y-z)^3G(z-0)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Come si vede questi termini rispecchiano i tre diagrammi rimasti, ciascuno con la sua molteplicità (il numero di modi possibili in cui si ottiene quel diagramma collegando tra loro i punti). Eseguendo la divisione per il quadrato di

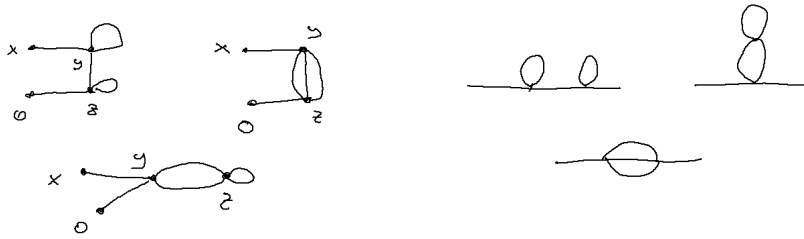


Figura 3.12: Diagrammi finali per i processi del secondo ordine, a destra disegnati in forma più convenzionale., le rispettive contrazioni sono raffigurate nell'equazione (3.11).

4! (576) si ottengono i fattori:

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_2 = \frac{g^2}{4} G(x-y)G(y-y)G(y-z)G(z-z)G(z-0) + \quad (3.12)$$

$$+ \frac{g^2}{4} G(x-y)G(y-z)^2 G(z-z)G(y-0) + \quad (3.13)$$

$$+ \frac{g^2}{6} G(x-y)G(y-z)^3 G(z-0) \quad (3.14)$$

I fattori di molteplicità corretti sono alla fine  $1/4$  per i primi due diagrammi e  $1/6$  per l'ultimo. Spesso per comodità grafica i diagrammi vengono assimilati a dei composti chimici (in modo da poterli ricordare facilmente). Un esempio per questo caso è riportato in Figura 3.13

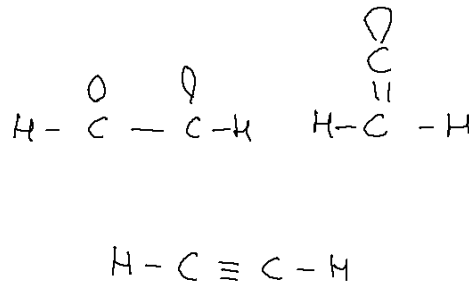


Figura 3.13: Schema dei diagrammi in Figura 3.12 interpretati come composti chimici.

Per fare il calcolo velocemente basta scrivere tutti i possibili diagrammi connessi. Per trovare il fattore di molteplicità davanti esiste una regoletta: La molteplicità del diagramma è l'inverso della dimensione del suo gruppo di simmetria.

Il gruppo di simmetria del diagramma corrisponde a tutte le trasformazioni su cui il diagramma è simmetrico. Ad esempio ogni bolla possiamo scambiare tra loro due linee senza che il diagramma si modifichi. Infatti i due diagrammi con due bolle hanno molteplicità  $\frac{1}{4}$  ( $\frac{1}{2}$  per ciascun coppia), mentre quello con



tre linee ha molteplicità  $\frac{1}{6}$  (abbiamo 6 modi possibili di scambiare a coppie tre linee).

Siccome il calcolo del fattore moltiplicativo è comune fonte di errori (non sempre è banale riconoscere simmetrie nel diagramma) è bene verificare questi fattori con il calcolo simbolico.

### 3.3.3 Diagrammi nello spazio di Fourier

Il problema del calcolo della correlazione non è finito. Abbiamo trovato un'espressione che consente il calcolo esplicito della correlazione, ma ancora dobbiamo svolgere il conto.

Tutti i diagrammi che rappresentano i termini della correlazione sono riproposti in Figura 3.14.

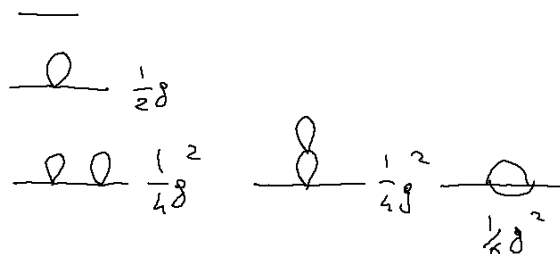


Figura 3.14: Tutti i diagrammi della correlazione fino al secondo ordine.

Il primo termine è il contributo gaussiano (ordine zero).

$$G(x)$$

Il primo ordine in  $g$  già presenta dei problemi:

$$-\frac{1}{2}g \int dy G(x-y)G(y)G(y-y) \quad (3.15)$$

Non è affatto banale svolgere questo integrale, anche perché le funzioni  $G(x)$  per quanto note sono funzioni di Bessel, di difficile trattazione analitica.

È più conveniente lavorare nella base degli impulsi, dove abbiamo un'espressione più semplice per la funzione di risposta.

$$\tilde{G}(\vec{p}) = \frac{1}{p^2 + \mu}$$

La cui trasformata è una funzione di Bessel non banale<sup>5</sup>.

$$G(y-y) = G(0) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int dp \tilde{G}(p)$$

<sup>5</sup>Ricordiamo che è in uno spazio tridimensionale, se fosse monodimensionale la trasformata di Fourier sarebbe un semplice esponenziale.

L'altro termine è un prodotto di convoluzione:

$$\int dy G(x-y)G(y) = G(x) \otimes G(x)$$

Che può essere riscritto nello spazio di Fourier come il prodotto fra le trasformate. Da cui l'equazione 3.15 nello spazio delle  $\vec{p}$  diventa:

$$-\frac{g}{2}\tilde{G}(p)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} G(q) \quad (3.16)$$

Vediamo il primo termine del secondo ordine (3.12):

$$G^2(0) \int dy dz G(x-y)G(y-z)G(z-0) = G^2(0) [G(x) \otimes G(x) \otimes G(x)]$$

Anche questa è una convoluzione multipla, passando alle trasformate di Fourier si ottiene (tralasciando i fattori  $2\pi$  e le molteplicità del diagramma):

$$\left[ \int dq \tilde{G}(q) \right]^2 \tilde{G}^3(p) \quad (3.17)$$

Procedendo in modo simile si ottiene la trasformata del secondo diagramma (3.13):

$$\tilde{G}(p)^2 \int dq \tilde{G}(q)^2 \int dk \tilde{G}(k) \quad (3.18)$$

Per fare anche l'integrale dell'ultimo termine occorre applicare proprio la definizione di trasformata di Fourier:

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int dq \exp(iqx) \tilde{G}(q)$$

Da cui per il terzo diagramma (3.14) si ottiene:

$$\tilde{G}(p)^2 \int dq_1 dq_2 \tilde{G}(q_1) \tilde{G}(q_2) \tilde{G}(p - q_1 - q_2) \quad (3.19)$$

Si può tirare fuori una regola generale per il calcolo dei diagrammi nello spazio degli impulsi. Ogni linea è *orientata*, e vi è associato un impulso  $\vec{p}$ . Bisogna imporre, orientando le linee, che la somma degli impulsi (entranti e uscenti con il giusto segno) su ogni vertice sia nullo (Figura 3.15)

Una volta che abbiamo imposto la conservazione degli impulsi, integriamo su tutti gli impulsi liberi.

Andando ad ordini successivi troviamo  $n$  vertici liberi (con  $n$  ordine del diagramma), e due estremi fissati. In Figura 3.18 è mostrato un diagramma al terzo ordine

Lo sviluppo perturbativo diventa qualcosa di estremamente automatizzabile, si possono costruire i vari termini e fare i vari integrali.

Abbiamo spostato il problema di fare gli integrali sugli impulsi. Bisogna iniziare a vedere se le formule che abbiamo ottenuto sono sensate.

Uno sviluppo perturbativo può infatti avere dei problemi di divergenze. Immaginiamo di avere un integrale del genere:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \frac{1}{1+gx}$$

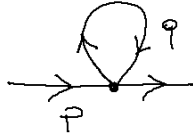


Figura 3.15: Diagramma al primo ordine con gli impulsi. Il risultato è mostrato nell'equazione 3.16.

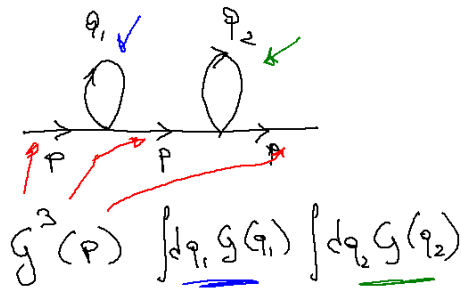


Figura 3.16: Schema del diagramma negli impulsi al secondo ordine, riferito all'equazione (3.17).

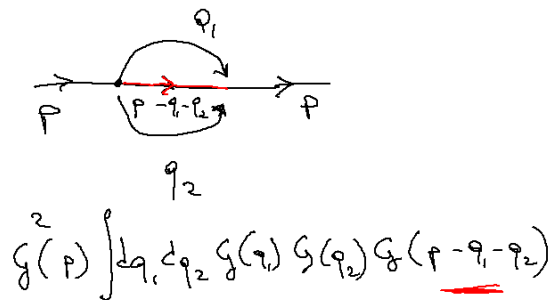


Figura 3.17: Schema del diagramma al secondo ordine riferito all'equazione (3.19).

$$G^2(p) \int dq_1 dq_2 dq_3 G(q_1) G(q_2) G(q_3) \cdot \frac{g^3}{4} - G(p-q_1-q_2) G(p-q_1-q_3)$$

Figura 3.18: Diagramma al terzo ordine, con relativo integrale.

Questo per  $g$  positivo è assolutamente regolare. Questa La funzione integranda è sviluppabile in serie di Taylor:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \sum_k (-g)^k x^k = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} (1 - gx + g^2 x^2 + \dots)$$

È evidente che mentre l'integrale originale converge questo sviluppo ha termini che divergono.

Occorre prestare attenzione, perché il nostro conto abbia senso occorre verificare a mano la convergenza degli integrali calcolati.

Prendiamo l'espressione della funzione di risposta:

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 + \mu}$$

E inseriamola nel primo contributo non banale (primo ordine).

$$-\frac{g}{2} \tilde{G}(p)^2 \int \frac{d^D q}{q^2 + \mu}$$

Di può passare in variabili sferiche:

$$\int \frac{d^D q}{q^2 + \mu} = S_D \int_0^\infty \frac{dq q^{D-1}}{q^2 + \mu} \quad (3.20)$$

Questo integrale è certamente divergente per  $\mu \rightarrow 0$ , e possiamo dimostrarlo in questo modo; dimostriamo che qualunque integrale di questo tipo è divergente.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$$

La dimostrazione è banale, facciamola in un modo più elegante. Supponiamo che questo non sia vero ed esista un  $\alpha$  che fa convergere l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

Calcoliamo la primitiva, poiché l'integrale non diverge per ipotesi togliamo i termini infiniti.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} = 0$$

Se l'integrale fosse convergente sarebbe nullo, ma poiché la funzione integranda è strettamente positiva l'integrale deve essere un numero positivo diverso da zero: c'è un assurdo.

Ora, riprendendo la formula (3.20), possiamo dividere il problema della convergenza a grandi e piccoli  $q$ . L'integrale converge a grandi  $q$  per  $D < 2$ . Questa divergenza è spuria, non è essenziale alla natura del problema, il motivo è che questo tipo di teoria descrive il comportamento a piccoli  $q$ . Questo integrale è formalmente divergente per dimensioni maggiore o uguali a 2, ma la divergenza non è problematica. Per reticoli l'estremo di integrazione è tagliato dalla prima zona di Brilluine, per sistemi continui possiamo immaginare di aggiungere un termine  $q^4$  al denominatore.

Questo termine  $q^4$  può essere ottenuto aggiungendo al modello di Landau Ginzbur un nuovo contributo a grandi  $q$  all'hamiltoniana del sistema.

$$H = \int dx \frac{(\nabla^2 \varphi)}{\Lambda^2}$$

Questo aggiunge al denominatore della  $G$  il termine  $\Lambda^2 q^4$  che mi assicura la convergenza all'infinito anche per dimensioni maggiori di 2.

Possiamo vedere che cosa succede nel limite  $\mu = 0$  (nel punto critico). Quello che avviene è che il comportamento affinché l'integrale sia convergente bisogna chiedere che  $D > 2$ . Questi sono problemi veri che dovremo affrontare nel dettaglio. Se associamo  $q$  alla lunghezza d'onda della luce, le divergenze a grandi  $q$  sono normalmente chiamate divergenze ultraviolette, e a piccoli  $q$  si chiamano divergenze infrarosse.

### Regola di Feynman per l'integrazione

Feynman è autore di una piccola regoletta di integrazione che può a volte risultare comoda per facilitare il conto di un integrale.

$$1 = \int_0^\infty da e^{-a}$$

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty da e^{-Aa}$$

Una frazione può essere riscritta con un integrale esponenziale. Utilizzando una rappresentazione integrale dell'integrando potremo essere in grado di guadagnare in semplicità.

Ad esempio l'integrale del diagramma (3.19) può essere computato in questo modo:

$$\int dq_1 dq_2 \frac{1}{q_1^2 + \mu} \frac{1}{q_2^2 + \mu} \frac{1}{(p - q_1 - q_2)^2 + \mu}$$

Usando la rappresentazione di Feynman:

$$\int dq_1 dq_2 da db dc \exp \{ -a(q_1^2 + \mu) - b(q_2^2 + \mu) + c[(q_1 + q_2 - p)^2 + \mu]^2 \}$$

Possiamo fare gli integrali sugli  $q$  che sono gaussiani:

$$\int_0^\infty \frac{dadbc}{(ab+bc+ca)^{D/2}} \exp \left[ -(a+b+c)\mu - \frac{abc}{ab+bc+ca} p^2 \right]$$

Questa formula finale ha una dipendenza molto semplice, questa espressione è abbastanza comoda per lavorarci e per poterla trattare numericamente o vedere possibili divergenze. Questo trucco di Feynman è comodo per portare l'integrale in espressione di questo tipo. Esiste anche una regola grafica per ottenere direttamente gli integrali secondo questa formula.

### 3.3.4 Tecniche perturbative e convergenza

È interessante chiedersi se lo sviluppo perturbativo converge alla funzione giusta. Se lo sviluppo perturbativo non converge, cosa ci facciamo?

Dal punto di vista matematico dire che una funzione è una serie asintotica corrisponde a dire che la differenza tra la funzione e la serie troncata è di ordine  $N+1$ .

$$F(g) - \sum_{k=0}^N f_k g^k = O(g^{N+1})$$

Tuttavia anche quando esiste lo sviluppo perturbativo della serie non è detto che questo converga alla funzione voluta, un esempio è lo sviluppo della seguente funzione

$$F(g) = \exp \left[ -\frac{1}{g^2} \right] \quad (3.21)$$

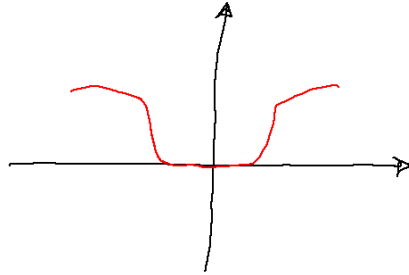


Figura 3.19: Grafico della funzione 3.21.

Tutti i coefficienti dello sviluppo sono convergenti (e convergono a zero), tuttavia la funzione a cui converge lo sviluppo (una funzione identicamente nulla) non corrisponde con la funzione originale.

Per cercare di capire se ci sono problemi di questo tipo, vediamo di calcolare il modello di Landau-Ginzburg in un solo punto.

$$F(g) = \int d\varphi \exp \left[ -\frac{\mu}{2} \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4 \right]$$

Domandiamoci se possiamo svilupparla in serie di Taylor. Studiamo l'andamento del  $k$ -esimo termine della serie

$$F(g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k g^k$$

$$f_k = \left(\frac{-1}{24}\right)^4 \frac{1}{k!} \underbrace{\int d\varphi e^{-\varphi^2} (\varphi^4)^k}_{(4k-1)!!}$$

$$(2k)!! = 2k(2k-2)(2k-4)\dots = 2^k k!$$

Nella forma di Stirling otteniamo

$$(2k)!! = 2^k \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Da cui il termine  $f_k$  va come:

$$f_k \sim \frac{1}{k!} \frac{(2k)^{2k}}{k^k} \sim k^k \sim k!$$

$$f_k = (-A)^k k!$$

Una serie i cui termini crescono fattorialmente ha raggio di convergenza nullo:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_k}{f_{k+1}} \sim \frac{1}{k} = 0$$

I coefficienti della serie perturbativa divergono come  $k!$  (questo è dovuto al fatto che il numero di diagrammi che ci sono compensa il termine  $k!$  al denominatore).

Il motivo fisico per cui la funzione non converge è il seguente: se la serie fosse convergente la funzione sarebbe analitica in un cerchio di raggio  $R$ . Tuttavia poiché c'è un termine  $\varphi^4$  nell'hamiltoniana, con  $g$  negativo questo termine all'esponenziale fa divergere l'integrale, quindi l'integrale non è analitico nel semipiano negativo della  $g$  (Figura 3.20).

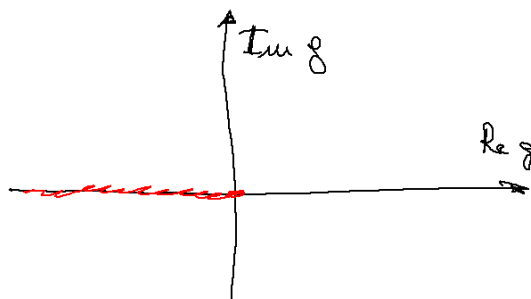


Figura 3.20: Schema di analiticità della partizione  $Z$  in funzione di  $g$ .

In questo caso esiste uno sviluppo perturbativo della funzione, ma la sua risommazione non converge alla funzione voluta. Cosa possiamo fare con questa serie perturbativa non convergente?

La nostra funzione è analitica in un dominio di tipo a torta (Figura 3.21). Per questo tipo di funzioni esiste un teorema che permette di ricavare informazioni sulla funzione che stiamo calcolando.

**Teorema 3.3.1 (Watson).** *Se prendiamo una funzione analitica in un dominio a pacman ed esiste una funzione  $H(g)$  che soddisfa la disuguaglianza:*

$$|F(g) - H(g)| \leq N! A g^N r^N$$

Allora  $H(g)$  è unica.

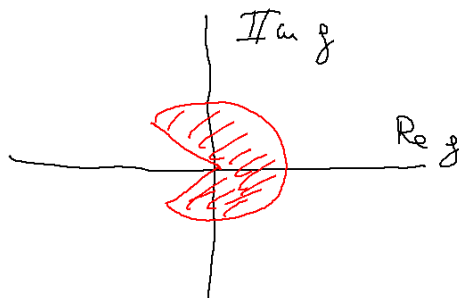


Figura 3.21: Dominio di analiticità a torta (o pacman), richiesto dalle ipotesi del teorema di Watson (3.3.1).

Se le ipotesi del teorema sono soddisfatte avremo l'unicità della soluzione in quel dominio. Possiamo quindi espandere la funzione in serie

$$\left| F(g) - \sum_{n=0}^N f_n g^n \right| \leq A g^{N+1} r^{N+1} (N+1)!$$

Se si applica questo teorema alle funzioni di correlazione si può dimostrare questa disuguaglianza, pertanto l'espansione perturbativa, pur non convergendo al risultato corretto, contiene tutte le informazioni corrette della vera funzione di correlazione.

Lo sviluppo in serie non è l'unico sviluppo possibile per una funzione. Infatti il troncamento dello sviluppo in serie tende sempre ad esplodere per grandi o piccoli  $x$ . Esistono sviluppi differenti che approssimano meglio la funzione a grande distanza.

**Teorema 3.3.2 (Padé).** *Sia una funzione  $F(g)$  analitica in variabile complessa con un taglio sull'asse reale negativo.*

$$F(g) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} 0$$

Possiamo scriverla con una rappresentazione integrale:

$$F(g) = \int_0^\infty \frac{dg' A(g')}{g + g'}$$



Dove

$$A(g') = \# \mathfrak{S}F(g')$$

Con  $\#$  un fattore proporzionalità.

Se  $A(g') \geq 0$  esiste una successione di funzioni convergente alla funzione, detti approssimanti di Padé.

Quando non si riesce a determinare la convergenza degli approssimanti di Padé analiticamente, si possono sempre scrivere gli approssimanti per poi stimarne la convergenza a posteriori.

L'approssimante di Padé sono in generale molto buoni. Lo sviluppo in Taylor ha un problema del troncamento. Se  $g$  è molto grandi  $g^N$  è molto grande. Inoltre per funzioni molto semplici come il logaritmo, il raggio di convergenza del polinomio di Taylor è limitato.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^k}{k}$$

La serie di Taylor non può essere usato al di fuori del raggio di convergenza. Gli approssimanti di Padé convergono ben al di là del raggio di convergenza della serie di Taylor.

Gli approssimanti di Padé sono delle funzioni costruite in questo modo:

$$P_1(x) = \frac{f_0}{1 - \frac{f_1}{f_0}x}$$

Dove i fattori  $f_i$  sono gli  $i$ -esimi coefficienti della relativa serie di Taylor.

Si può verificare facilmente che il primo approssimante descrive correttamente la funzione ad un ordine  $O(x^2)$ .

$$P_1(x) - f(x) = O(x^2)$$

Allo stesso modo possiamo ricostruire il secondo approssimante di Padé:

$$P_2(x) = \frac{f_0 + ax}{1 + bx}$$

I coefficienti  $a$  e  $b$  devono essere scelti in modo da ottenere un'approssimazione della funzione corretta al secondo ordine.

$$P_2(x) - f(x) = O(x^3)$$

All'ordine successivo aggiungiamo un termine al denominatore:

$$P_3(x) = \frac{f_0 + ax}{1 + bx + cx^2}$$

E poi un altro termine al numeratore.

$$P_4(x) = \frac{f_0 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2}$$

Dobbiamo aggiungere coefficienti in modo da avere per ogni ordine  $n + 1$  parametri liberi (in modo che la differenza tra funzione e approssimante sia sempre di ordine  $n + 1$ ).

Nel caso di approssimanti dispari il polinomio al denominatore ha un ordine maggiore del polinomio al numeratore, per quelli parti i due polinomio hanno lo stesso grado.

I comportamenti dei determinanti sono molto più smussati rispetto ad una serie di Taylor troncata, perché per grandi  $x$  non divergono.

Il teorema di Padé ha come corollario che se gli approssimanti convergono, si comportano in questo modo:

$$F_{2k-3}(g) \leq F_{2k-1}(g) \leq F(g) \leq F_{2k}(g) \leq F_{2k-2}(g)$$

Ossia gli approssimanti del Padé dispari sono una successione decrescente, mentre gli approssimanti del padé pari sono una successione crescente. Presi due qualunque approssimanti del Padé di diversa parità, la funzione da approssimare è compresa tra i due.

Esistono molti trucchi noti che permettono di trattare serie che non convergono con gli approssimanti di Padé. In genere si usano tanti differenti metodi di approssimazione, e poi si stima quello corretto facendo una media, e si calcola l'errore compiuto con la deviazione standard.

Un modo alternativo consiste nell'usare la somma di Borel: Se valgono le ipotesi del teorema di Borel (3.3.1), allora la serie è sommabile alla Borel:

$$F(g) = \sum_{k=0}^{\infty} (-g)^k f_k$$

Si può definire una funzione di Borel unica.

$$B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k f_k}{k!}$$

La funzione  $B(z)$  converge più facilmente di  $F(g)$  del suo sviluppo in Taylor (grazie alla presenza del  $k!$ ).  $B(z)$  è analitica in una regione più grande della  $F(z)$ , per cui il raggio di convergenza del suo sviluppo è maggiore (Figura 3.22). Ma nota la  $B(z)$  si può ricalcolare la  $F(g)$  attraverso un'operazione di trasformata (detta trasformata di Borel):

$$F(g) = \int_0^{\infty} dz B(zg) e^{-z}$$

Sebbene  $B$  è analitica non è detto che la  $F$  lo sia, perché è integrata.

Una delle tecniche più diffuse per ricostruire la funzione originale è quella di usare la trasformata di Borel, approssimandola con gli approssimanti di Padé; sostanzialmente otteniamo un prolungamento analitico sulla serie di Borel (che è convergente in una regione più grande di  $F$ ) in modo da poter ottenere uno sviluppo di  $F$  che converga oltre il raggio di convergenza della serie di Taylor<sup>6</sup>.

### 3.3.5 Risommazioni parziali e Self-Energia

Applichiamo queste tecniche per capire cosa avviene nel punto critico. Mettiamoci in dimensione  $D = 2$ . La funzione di correlazione all'ordine zero, nello

<sup>6</sup>Il successo di questo metodo non è mai assicurato, e dipende dalla regolarità della funzione  $F(g)$

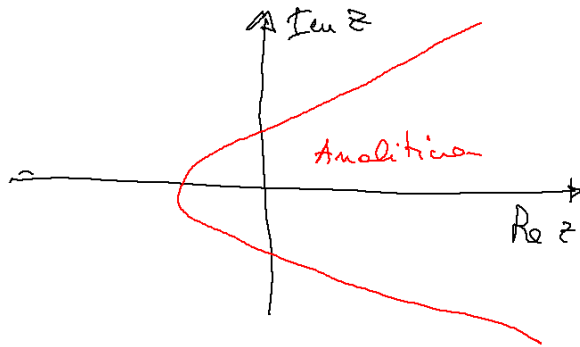


Figura 3.22: Schema dell'analiticità della trasformata di Borel della funzione  $F(g)$ .

spazio di Fourier è:

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2}$$

Guardando il diagramma al primo ordine (Figura 3.23) possiamo scrivere l'integrale.

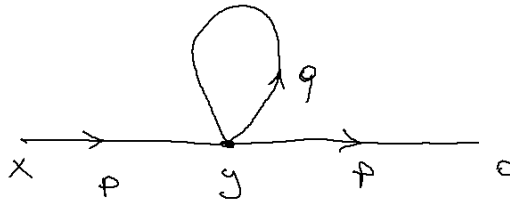


Figura 3.23: Diagramma al primo ordine nello spazio di Fourier.

$$G^2(p) \int \frac{d^D k}{k^2} \quad D = 2$$

Concentriamoci sull'integrale.

$$\int_0^\infty \frac{d^2 k}{k^2}$$

Già in dimensione due questo termine diverge intorno a zero. Si può verificare facilmente che in qualunque dimensione c'è questo stesso problema (andando all'ordine opportuno).

Il diagramma mostrato in Figura 3.24 divergerà in qualunque dimensione (aumentando opportunamente il numero di cappi).

Il suo integrale viene:

$$\int \frac{dk}{(p-k)^2} \left( \int \frac{dq}{\left(\frac{k}{2}-q\right)^2 \left(\frac{k}{2}+q\right)^2} \right)^N$$

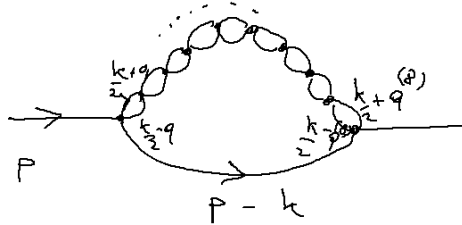


Figura 3.24: Diagramma divergente.

Con  $N$  numero di cappi al numeratore. Possiamo fare il caso con due cappi esplicitamente per trovarlo. Questi sono diagrammi a salciccia. La cosa interessante è come l'integrale  $I(k)$  per  $k \rightarrow 0$ , con  $I(k)$  definito:

$$I(k) = \int \frac{d^D q}{\left(\frac{k}{2} - q\right)^2 \left(\frac{k}{2} + q\right)^2}$$

Possiamo trovare la dipendenza da  $k$  della primitiva attraverso l'analisi dimensionale; nella regione convergente questo diagramma deve comportarsi nel seguente modo:

$$I(k) \sim \frac{1}{k^{4-D}}$$

Per  $D < 4$  l'integrale è convergente a grandi  $q$ , ma diverge se  $k \rightarrow 0$ . In tre dimensioni otteniamo un comportamento

$$I(k) = \frac{1}{k}$$

Se prendiamo il diagramma al 4 ritroviamo tre volte questo integrale (tre cappi), per cui sull'integrale finale apparirà un termine:

$$I^3(k) \sim \frac{1}{|k|^3}$$

Da cui il diagramma completo al quarto ordine sarà:

$$\int \frac{d^3 k}{|k|^3} \frac{1}{(k-p)^2}$$

Che diverge senz'altro per  $k = 0$ . Se ammettessimo anche dimensioni non intere per  $D < 4$  esiste sempre un ordine a cui appare un diagramma divergente.

Al punto critico i termini dello sviluppo perturbativo divergono, e la serie non è convergente.

Esistono varie tecniche che si possono utilizzare per risolvere questo problema, una delle tecniche più di moda è la risommazione parziale dei diagrammi. Invece di prendere tutti i diagrammi ai vari ordini possiamo risommare tutti i diagrammi di una data classe. In questo modo possiamo sommare un sottoinsieme di diagrammi ad ogni ordine.

La scelta dei diagrammi da risommare è arbitraria. Il modo semplice è quello di fare i diagrammi facili. I diagrammi più semplici in assoluto sono quelli ottenuti mettendo in fila dei cappi; il termine al primo ordine diventa:

$$\Sigma = gC \int \tilde{G}_0(p) d^D p$$

Un diagramma con più cappi in fila è molto semplice perché fattorizzabile nel prodotto di tanti diagrammi al primo ordine un unico cappio.

Ad esempio un diagramma del quarto ordine con 4 cappi è semplicemente:

$$G_0(p)^5 \Sigma^4$$

Una volta che sappiamo calcolare il diagramma al primo ordine sappiamo il risultato di tutti i diagrammi ad ogni ordine.

Possiamo sommarli tutti per ottenere il risultato finale:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{G}_0(p)^{k+1} \Sigma^k = \frac{1}{G_0^{-1}(p) - \Sigma}$$

La prima risommazione generale che possiamo fare è questa. Basta calcolare un unico diagramma e poi si risomma il diagramma portandolo al denominatore. Questo tipo di risommazione è del tutto generale. Possiamo infatti immaginare di includere nella  $\Sigma$  anche diagrammi ad ordini superiori. Ad esempio se prendiamo i diagrammi del secondo ordine mostrati in Figura 3.25 otteniamo un'altra espressione per  $\Sigma$ .

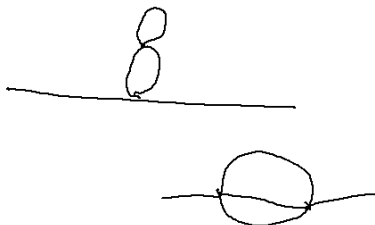


Figura 3.25: Diagrammi irriducibili al secondo ordine.

Questi diagrammi sono detti *irriducibili*, perché non possono essere fattorizzati nel prodotto di due diagrammi di ordine più basso. Se adesso chiamiamo  $\Sigma(p, g)$  la somma tutti i diagrammi irriducibili ad una linea (o ad una particella), possiamo risommare tutti i possibili diagrammi usando la serie geometrica:

$$\frac{1}{G_0^{-1}(p) - \Sigma(p, g)}$$

Questo corrisponde a prendere tutti i diagrammi irriducibili, e comporre tutti gli altri diagrammi possibili combinando linee  $G_0(p)$  con tutti i possibili diagrammi

in  $\Sigma$ . Per ragioni legate alla teoria dei campi per le particelle  $\Sigma$  è detta *self-energia*.

Se confrontiamo la funzione di correlazione risommata, e la confrontiamo con quella di campo medio otteniamo uno shift del punto critico.

$$G_0(p) = \frac{1}{p^2 + \mu} \quad G(p) = \frac{1}{p^2 + \mu - \Sigma}$$

La self energia ha spostato il punto critico a:

$$\mu - \Sigma = 0$$

Se volessimo essere più raffinati potremo arrivare a considerare anche i diagrammi irriducibili al terzo ordine (Figura 3.26).

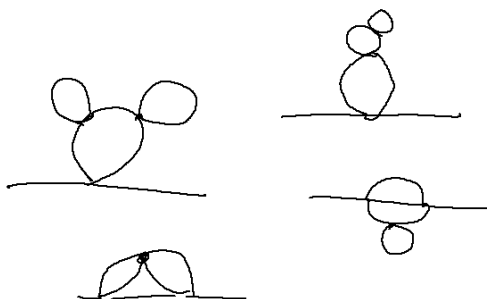


Figura 3.26: Diagrammi irriducibili al terzo ordine.

Possiamo decidere di includere nella *self-energia* solo diagrammi più semplici (come il topolino). Possiamo risommare tutta una classe di diagrammi facili da calcolare. Per fortuna esiste una giustificazione formale a questa operazione di “scegliere” arbitrariamente quali sono i diagrammi facili da risommare.

Se calcoliamo questa risommazione il risultato converge al punto critico, con esponenti diversi da quelli di campo medio (anche se il risultato non è ancora quello corretto). In questo modo siamo riusciti, partendo da una serie non convergente, ad ottenere un'espressione convergente con un risultato interessante (se pur non esatto).

### 3.3.6 Approssimazione di Hartree-Fock

Vediamo più nel dettaglio la costruzione della *self-energia*. La self energia può essere rappresentata da un diagramma a quadratino (Figura 3.27).

Usando la risommazione finale della self energia otteniamo uno spostamento del punto critico:

$$G = \frac{1}{p^2 + \mu - \Sigma}$$

La funzione di correlazione finale ( $G$ ) può essere calcolata con un diagramma pieno (Figura 3.28)

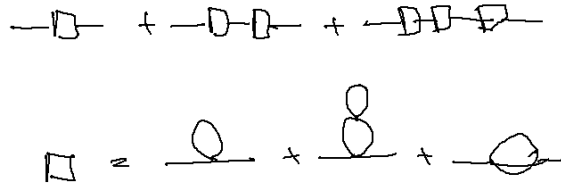


Figura 3.27: Rappresentazione diagrammatica della *self-energia*.

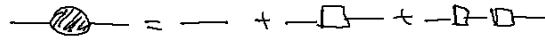


Figura 3.28: Rappresentazione diagrammatica della funzione di correlazione a due campi, usando la *self-energia*.

La self energia rappresenta la somma di tutti i diagrammi **irriducibili**, ossia diagrammi che tagliando una qualunque linea *non* diventano sconnessi.

Se calcoliamo la *self-energia* in teoria delle perturbazioni al primo ordine l'unico diagramma presente è irriducibile (il cappio).

$$\Sigma = -\frac{g}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\Lambda \frac{d^D k}{k^2 + \mu}$$

Dove decidiamo arbitrariamente il taglio  $\Lambda$  per far convergere l'integrale. La funzione di correlazione è:

$$G(k) = \frac{1}{k^2 + \mu - \Sigma} = \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (3.22)$$

$$m^2 = \mu - \Sigma$$

Adesso possiamo immaginare di iterare questo passaggio. Al posto di usare la  $G_0$  per scrivere le linee con cui calcolare i diagrammi di *self-energia* usiamo questa espressione iterativa (3.22). Se prendiamo per *self-energia* solo il diagramma al primo ordine, ma usando questa espressione iterativa per la  $G$  otteniamo una rappresentazione diagrammatica raffigurata in Figura 3.29, dove sono inclusi tutti i possibili diagrammi a cactus.

L'espressione per questa *self-energia* è la seguente<sup>7</sup>:

$$\Sigma = -\frac{g}{2} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\Lambda \frac{d^D k}{k^2 + m^2} \quad (3.23)$$

<sup>7</sup>Abbiamo sostituito a  $\mu$  l'espressione di  $m$ , quindi questa è un'equazione implicita in  $\Sigma$ .

La soluzione di queste due equazioni in funzione di  $g$  non è evidente: la *self-energia* è funzione di  $g$  e  $m$ , che a sua volta dipende da  $g$  attraverso  $\Sigma$ . Questa equazione può essere risolta riscrivendo a sinistra e destra una serie di potenze in  $g$  e uguagliando i termini dello stesso ordine. La risommazione che si ottiene è quella di tutti i possibili diagrammi a *cactus* (Figura 3.29).

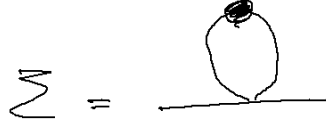


Figura 3.29: Schema dei diagrammi a cactus.

Il denominatore della (3.23) è una lorentziana nello spazio degli impulsi, che nelle posizioni è un esponenziale, il cui coefficiente di attenuamento corrisponde alla lunghezza di correlazione  $\xi$ :

$$\xi^{-2} = m^2$$

Possiamo riscrivere l'integrale (3.23) usando le regole di Feynman:

$$\int \frac{d^D k}{k^2 + m^2} = \int d^D k \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2 + m^2)}$$

$$\int d\alpha \frac{\pi^{D/2}}{\alpha^{D/2}} \exp(-\alpha m^2)$$

Possiamo fare un'analisi dimensionale per risolvere l'integrale; l'esponenziale deve avere argomento adimensionale:

$$[m^2] = -[\alpha] = -1$$

L'integrale ha pertanto dimensione:

$$[\int] = -1 + \frac{D}{2}$$

In  $m^2$  otteniamo:

$$\int d\alpha \frac{\pi^{D/2}}{\alpha^{D/2}} \exp(-\alpha m^2) = \pi^{D/2} m^{2(D/2-1)} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad (3.24)$$

Dove la  $\Gamma$  è la funzione di Eulero.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad (3.25)$$



$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (3.26)$$

Se  $z$  è intero

$$\Gamma(z+1) = z!$$

L'integrale con cui è definita la funzione (3.25) è convergente solo per  $z$  strettamente positivo, tuttavia la proprietà (3.26) può essere usata per calcolare il prolungamento analitico per  $\Gamma$  anche per valori negativi. Poiché la funzione ha però un polo per  $z = 0$ , tutti i valori per  $z$  intero negativo presentano lo stesso polo (3.26).

Questa proprietà può essere sfruttata per dimostrare un interessante relazione che deve soddisfare la  $\Gamma$ :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Infatti possiamo costruire una funzione nel seguente modo.

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$$

Poiché la funzione a sinistra è analitica in tutto  $\mathbb{C}$ , basta dimostrare che le due funzioni (entrambe analitiche) hanno un punto di accumulazione in comune per dimostrarne l'uguaglianza<sup>8</sup>. Il punto di accumulazione è  $z$  reale infinito, infatti entrambe le funzioni hanno zeri per ogni  $z$  intero (positivo o negativo).

Questa relazione permette di ricostruire la  $\Gamma$  per valori negativi conoscendola per valori positivi.

Applichiamo queste relazioni per comprendere meglio il risultato della *self-energia* (equazione 3.24). Affrontiamo ora il caso  $D < 2$ , in cui l'integrale converge per valori grandi di  $k$ .

In questa situazione l'esponente di  $m$  è positivo. Per  $m \rightarrow 0$  questo termine diverge (se  $D < 2$ ). Riscriviamo l'espressione che definisce  $m^2$ .

$$m^2 = \mu + \Sigma = \mu + \frac{g}{2(2\pi)^D} \pi^{D/2} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) m^{2(\frac{D-2}{2})}$$

Nel limite in cui  $m^2 \rightarrow 0$  il termine che viene da  $\Sigma$  diverge, mentre il contributo a sinistra può essere trascurato.

$$\mu = -Cm^{D-2}$$

$$m \propto \left(-\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2-D}}$$

Quindi il modello non ha transizione perché non c'è soluzione per  $m^2 = 0$  (e quindi la funzione di correlazione non diverge mai per  $k \rightarrow 0$ , equazione 3.22).

Vediamo  $D > 2$ . In questo caso l'integrale diverge per  $k \rightarrow \infty$ ; dobbiamo introdurre un estremo superiore  $\Lambda$  di integrazione:

$$D > 2$$

---

<sup>8</sup>In questo caso il fattore  $\pi$  serve perché stiamo considerando tutti punti nulli, quindi la funzione è determinata a meno di una costante moltiplicativa.

$$\Sigma \propto \int_0^\Lambda \frac{d^D k}{k^2 + m^2}$$

In questo caso abbiamo la situazione opposta.

$$\Sigma(m^2) = \int_0^\Lambda \frac{d^D k}{k^2 + m^2} \quad \Lambda \gg m^2 \sim 0$$

Calcoliamo nel limite per  $m \rightarrow 0$

$$\Sigma(0, \Lambda) = \int_0^\Lambda \frac{d^D k}{k^2} < \infty$$

Possiamo calcolare:

$$\frac{d\Sigma}{dm^2} = - \int_0^\Lambda \frac{d^D k}{(k^2 + m^2)^2}$$

Se  $D < 4$  l'integrale converge per  $\Lambda \rightarrow \infty$ , possiamo approssimarlo usando l'analisi dimensionale:

$$\frac{d\Sigma}{dm^2} \approx - \int_0^\infty \frac{d^D k}{(k^2 + m^2)^2} \sim \frac{1}{m^{4-D}} = (m^2)^{\frac{D}{2}-2}$$

Da questa espressione si può risalire all'integrale di partenza:

$$\Sigma(m^2) = \Sigma(0, \Lambda) + \int_0^{m^2} d(m')^2 \frac{d\Sigma}{d(m')^2} = \Sigma(0, \Lambda) + C(m^2)^{\frac{D}{2}-2+1}$$

$$\Sigma(m^2) = \Sigma(0) + C m^{D-2}$$

Questo termine effettivamente converge per  $D > 2$  nel limite  $m \rightarrow 0$ . Possiamo calcolare esplicitamente l'integrale<sup>9</sup>.

$$\Sigma(m, \Lambda) = \frac{g}{2(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) [m^{D-2} - \Lambda^{D-2}]$$

La cosa interessante avviene per  $D \rightarrow 2$ , dove la funzione  $\Gamma$  ha un polo:

$$\frac{1}{\varepsilon} [m^\varepsilon - \Lambda^\varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \ln m - \ln \Lambda = \ln \frac{m}{\Lambda}$$

Per  $D = 2$  la *self-energia*  $\Sigma$  non diverge. Procediamo anche in questo caso a riscrivere l'equazione finale per  $m$ :

$$m^2 = \mu + C + A m^{D-2}$$

Il limite  $m \rightarrow 0$  è facile:

$$\mu = -C$$

Quindi il nuovo punto critico è (per  $D = 4$ )

$$\tilde{\mu} = \mu + C$$

A seconda delle dimensioni domina l'esponente più piccolo di  $m$ :

$$\tilde{\mu} = m^2 \quad D > 4$$

<sup>9</sup>Anche in questo caso conviene passare per la rappresentazione di Feynman.

$$0 = \tilde{\mu} + Am^{D-2} \quad D < 4$$

Per  $D < 4$  otteniamo:

$$m \sim \tilde{\mu}^{\frac{1}{D-2}} \quad \tilde{\mu} = T - T_c$$

Da cui otteniamo la distanza di correlazione:

$$\xi \sim \frac{1}{m} \sim \frac{1}{(T - T_c)^{\frac{1}{D-2}}}$$

Dove abbiamo trovato l'esponente della lunghezza di correlazione in vicinanza della temperatura critica. L'andamento dell'esponente critico  $\nu$  in funzione della dimensione è mostrato in Figura 3.30.

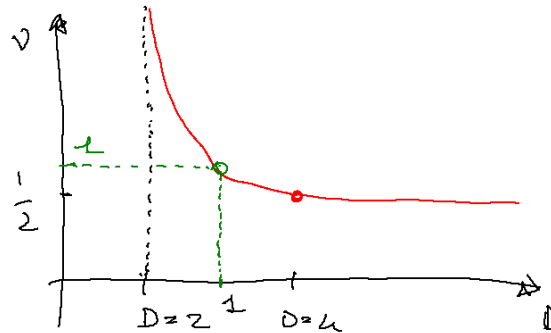


Figura 3.30: Grafico dell'esponente critico della lunghezza di correlazione in funzione della dimensione del sistema. Dal grafico si evince che non c'è transizione di fase per dimensioni minori di 2, e per dimensioni maggiori di 4 l'esponente critico è costante pari a 0.5.

Questa teoria afferma che  $\nu = 1$  per  $D = 3$ , molto lontano dal valore corretto ( $\nu_3 = 0.624$ ). Tuttavia è un calcolo istruttivo che mostra come è possibile ottenere esponenti non banali per dimensioni minori di 4.

### Giustificazione dell'approssimazione

L'approssimazione che abbiamo fatto ci ha portato ad un risultato errato dell'esponente critico (con un errore relativo del 60 %), ha senso provare a continuare su questa strada? Mostriamo ora come in realtà esista un modello analitico che ha questo ottenuto come risultato esatto.

Il modello di Ising è un caso particolare di tutta una schiera di modelli complessi sui fenomeni ferromagnetici. Ad esempio le variabili di spin potrebbero non essere scalari, ma vettori. Un generico modello costruito con hamiltoniane di interazioni tra vettori può avere una simmetria di rotazione rispetto a  $N$  gruppi.

$$\varphi^\alpha(x) \sum_{a=1}^N (\partial_\mu \varphi^a)^2 + \frac{1}{2} \mu \sum_{a=1}^N (\varphi^a(x))^2 + \frac{g}{4!} \left( \sum_{a=1}^N (\varphi^a(x))^2 \right)^2$$

Dove abbiamo scritto i termini di questa hamiltoniana usando l'interazione alla Heisemberg (dove  $N = 3$ ).

$$\vec{\sigma}(x) \cdot \vec{\sigma}(x+n)$$

Se però ammettiamo che il sistema può avere più dimensioni, ad esempio lo spin può essere un ellissoide nello spazio<sup>10</sup> e avere più gradi di libertà (in questo caso  $N = 5$ ).

Possiamo studiare cosa avviene per  $N \rightarrow \infty$ , per farlo conviene aggiungere un fattore  $1/N$  nella costante di accoppiamento. ( $N$  sono il numero di possibili gruppi di interazione degli spin).

Nel limite  $N \rightarrow \infty$  il contributo del diagramma a coppia è  $1/3$ . Altri diagrammi contano con coefficienti differenti (Figura 3.31).

$$\begin{array}{l} \text{---} \bigcirc \text{---} \quad \left( \frac{N+2}{3} \right) \frac{1}{N^2} \\ \text{---} \cup \text{---} \quad \left( \frac{N+2}{3} \right) \frac{1}{N} \end{array}$$

Figura 3.31: Contributi dei diagrammi per  $N \rightarrow \infty$ .

I singoli diagrammi hanno diverse dipendenze da  $N$  quindi nel limite per  $N \rightarrow \infty$  alcuni diagrammi vengono distrutti. La selezione che avevamo fatto per il calcolo della *self-energia*<sup>11</sup> è esatta nel limite di grandi  $N$ . L'approssimazione di Hartree-Fock descrive il sistema analiticamente per  $N \rightarrow \infty$ . Dato che è ragionevole pensare che gli esponenti critici dipendono da  $N$  è chiaro perché non abbiamo ottenuto gli esponenti critici di Ising, ma quelli di Heisemberg nel limite  $N \rightarrow \infty$ .

Questo vuol dire che il modello funziona bene, occorre solo trovare una migliore risommazione per  $\Sigma$  che descriva meglio il modello di Ising.

Nel limite di  $N$  che tende ad infinito sopravvivono solo i diagrammi a cactus, e l'approssimazione fatta sulla *self-energia* trova una giustificazione. Ora però gli esponenti critici dipendono da  $N$  oltre che da  $D$ . Nel limite  $N \rightarrow \infty$  per  $D$  maggiore di 4 sono quelli di campo medio, mentre per  $D < 4$  minore sono non banali. Se  $D \leq 2$  non c'è transizione di fase.<sup>12</sup>

Nel modello a  $N$  generico l'energia di interazione tra coppie di spin dipende dal loro orientamento, poiché gli spin sono vettori. Se chiamiamo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  gli angoli che due spin formano con l'asse orizzontale si può definire l'energia di

<sup>10</sup>Questo equivale a dire che in ciascun sito lo spin non è diretto verso un'unica direzione ma ha componenti anche lungo le direzioni ortogonali a quella dell'asse maggiore.

<sup>11</sup>Avevamo considerato solo i diagrammi a cactus.

<sup>12</sup>Ricordiamo che  $D$  è la dimensione del vettore di spin.

interazione nel seguente modo:<sup>13</sup> :

$$E(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} -\cos(\theta_1 - \theta_2) = -\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 & \text{Ising} \\ A[\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2] + B \cos(\theta_1 - \theta_2) & \text{Heisenberg} \end{cases}$$

Ci sono alcune tecniche che permettono di applicare uno sviluppo perturbativo partendo dal risultato analitico ad  $N \rightarrow \infty$  in ordini di  $\frac{1}{N}$ . I casi di interesse sono quelli con  $N$  piccolo:  $N = 1$  per il modello di Ising;  $N = 2$  per modelli con isotropie planari (film sottili);  $N = 3$  per il modello isotropo di Heisenberg.

I risultati migliori trovati prevedono le seguenti divergenze per le grandezze interessanti<sup>14</sup>:

$$\xi \sim \frac{1}{|T - T_c|} \nu \quad C = \frac{|T - T_c|^{-\alpha} - 1}{\alpha} \underbrace{\sim}_{\alpha \rightarrow 0} \ln(T - T_c)$$

$$\chi \sim \frac{1}{|T - T_c|} \gamma \quad \gamma = \frac{7}{4}$$

$$m \sim |T - T_c|^\beta \quad \text{con} \quad m(H, T_c) = H^\delta \quad \text{con} \quad \delta = \frac{1}{15}$$

Gli esponenti non sono molto diversi da quelli della teoria di campo medio dove:

$$\nu = \frac{1}{2} \quad \gamma = 1 \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \delta = \frac{1}{3}$$

Ora dobbiamo capire come complicare il modello e ricalcolare gli esponenti critici in questo caso.

Esiste un teorema di Mermin-Wagner, il quale afferma che in due dimensioni, se  $N$  è maggiore o uguale a due, non esistono transizioni di fase.

### 3.4 Classi di transizione

Si osserva che gli esponenti critici non dipendono da altri parametri se non  $N$  o  $D$ , ma accomunano un'intera classe di equivalenza di transizioni di fase del secondo ordine molto differenti tra loro.

Un esempio è la transizione liquido-vapore dell'acqua nel piano densità-temperatura: diminuendo la densità dell'acqua si arriva ad una transizione di fase solo se la temperatura è sufficientemente bassa (Figura 3.32).

Dopo una certa temperatura non c'è transizione liquido-gas. Questo perché di fatto liquido e gas sono entrambi fluidi. Diversamente tra un solido e un fluido non può avvenire questo passaggio<sup>15</sup>.

Si può fare una teoria di Landau-Ginzburg per descrivere questa transizione e si scopre che è analoga alla teoria di Ising (ha la stessa forma matematica). Al posto della suscettività possiamo calcolare la compressibilità così via. Gli esponenti critici sono compatibili entro pochi punti percentuali. Un sistema

<sup>13</sup>Si possono anche avere situazioni in cui gli spin vanno rappresentati come onde-D in cui servono 5 componenti.

<sup>14</sup>Oltre alla divergenza ci sono delle costanti da sommare, non specificate in questa rappresentazione.

<sup>15</sup>Infatti solidi e liquidi hanno proprietà microscopiche intrinsecamente differenti, ad esempio i fluidi non possono trasmettere onde trasversali a medio-bassa frequenza.

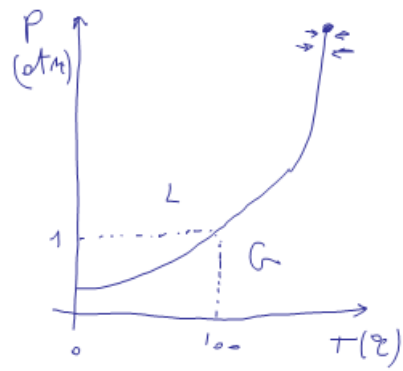
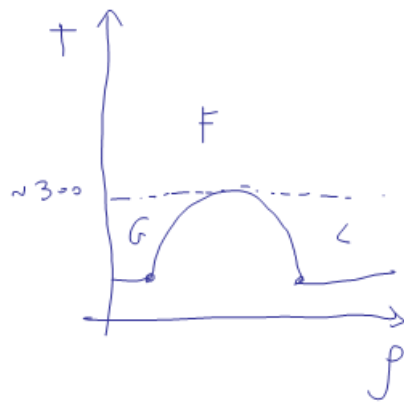


Figura 3.32: Transizione di fase in un sistema acqua-vapore.

magnetico e un sistema fluido hanno gli stessi esponenti critici, appartengono dunque alla stessa classe di transizione.

Si è dedotto che i sistemi sono divisi in classi di universalità, sistemi appartenenti alla stessa classe mostrano gli stessi esponenti critici.

Il punto critico esiste anche nei sistemi fluidi (Figura 3.32) e discrimina se il passaggio tra stato liquido e gassoso debba attraversare una transizione di fase del primo ordine.

Anche i sistemi magnetici mostrano una transizione di fase del primo ordine, che termina nel punto critico.

Un altro sistema che fa parte di questa classe di universalità è l'elio superfluido, che mostra una condensazione di Bose-Einstein.

In realtà con conti successivi più precisi è visto che l'esponente  $\alpha$  critico è 0.01 (Figura 3.33). Tuttavia è molto vicino allo sviluppo di alta (o bassa) temperatura del modello di Landau.

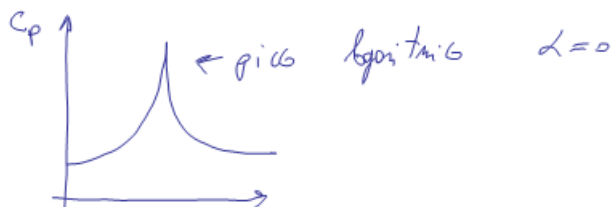


Figura 3.33: Divergenza del calore specifico.

Si è capito che il conto degli esponenti critici è la prima cosa da fare per capire quale classe di universalità descrive il sistema. Calcolare la temperatura critica è molto difficile ma sapendo la classe le cose si possono semplificare.

## Capitolo 4

# Il gruppo di rinormalizzazione

Questa teoria, dovuta a Wilson, è simile a quella di Landau: si divide il reticolo in blocchi di taglia  $L$ , definendo una variabile:

$$b_L = C_L \sum_{i \in B} \sigma_i$$

Quando  $L$  è grande nel blocco sono presenti tanti spin, anche le  $b$  sono grandi. La normalizzazione  $C_L$  fa convergere il risultato per  $L \rightarrow \infty$  (Ad esempio imponendo che  $\langle b^2 \rangle$  sia 1).

$$\langle b_L^2 \rangle = 1 \rightarrow C_L^{-1} = \langle (\sum_i \sigma_i)^2 \rangle = \sum_{i,k} \langle \sigma_i \sigma_k \rangle$$

Ora ci chiediamo che succede alle variabili di blocco per  $L$  che va ad infinito. Possiamo fare una analogia con i pixel del televisore: da vicino vediamo i singoli pixel, poi a mano a mano che ci allontaniamo facciamo medie su regioni sempre più grandi<sup>1</sup>. Se chiamiamo il volume di un blocco  $L^D = V_L$  avremo nei due casi limite:

$$\begin{cases} T = 0 & C_L^{-1} = \sum_{i,k} \langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \sum_{i,k} 1 = V_L^2 \\ T = \infty & C_L^{-1} = \sum_{i,k} \langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \sum_i 1 = V_L \end{cases}$$

Nel primo caso infatti a temperatura nulla il sistema stà nel minimo dell'energia, ossia con tutti gli spin allineati; mentre a temperatura infinita tutti gli spin sono indipendenti e il valore medio è diverso da zero solo se  $i = k$ . Quindi, per  $T = 0$  e  $T \rightarrow \infty$ , le variabili di blocco diventano:

$$b_L = \frac{1}{V_L} \sum_{i \in B} \sigma_i \quad b_L = \frac{1}{\sqrt{V_L}} \sum_{i \in B} \sigma_i$$

Alle quali è possibile associare una distribuzione di probabilità:

$$P(b) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}} & T = \infty \\ \frac{1}{2} \delta(b-1) + \frac{1}{2} \delta(b+1) & T = 0 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Seguendo questa linea possiamo identificare la schermata di un canale in cui non c'è segnale come un modello di Ising a  $T = \infty$



Per  $T$  finito il fattore di rinormalizzazione acquista una dipendenza da  $\beta$  non ovvia. Possiamo dimostrare però che la dipendenza di  $C_L$  dal volume rimane coerente con quanto calcolato nei casi limite se il sistema è sovracritico ( $T > T_c$ ) o sottocritico ( $T < T_c$ ).

$$b_L = \frac{A(\beta)}{\sqrt{V_L}} \sum \sigma_i \quad \text{o} \quad b_L = \frac{B(\beta)}{V_L} \sum \sigma_i$$

Il punto di incontro tra questi due casi ( $T = T_c$ ) ha quindi una dipendenza totalmente non ovvia con il volume. Calcolare l'esponente del coefficiente  $C_L \sim V^\omega$  al punto critico è il passo decisivo per ottenere informazioni essenziali sulla natura del punto critico, e sugli altri esponenti critici.

## 4.1 Normalizzazione ad alta temperatura

Possiamo definire dei blocchi di spin di grandezza  $L^D$ . La variabile di blocco  $\varphi$  è definita come la somma su tutti gli spin all'interno del blocco:

$$\varphi_L^{(n)} = \sum_{k \in B_L} \sigma_k$$

Per ottenere una normalizzazione corretta sulla variabile, dividiamo per la radice della varianza<sup>2</sup>:

$$\langle (\varphi_i^{(L)})^2 \rangle = \langle \left( \sum_x \sigma(x) \right)^2 \rangle = \sum_{x \in B_j} \sum_{y \in B_i} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle$$

Calcoliamo nell'ipotesi  $T > T_c$  (alta temperatura). Esiste una lunghezza di correlazione  $\xi$ : se la distanza tra le posizioni dei due spin è minore della lunghezza di correlazione, la funzione di correlazione è di ordine 1; se invece la distanza è maggiore la funzione di correlazione è di ordine zero. Pertanto all'interno del dominio di integrazione la parte dominante è la regione vicino alla diagonale (Figura 4.1)

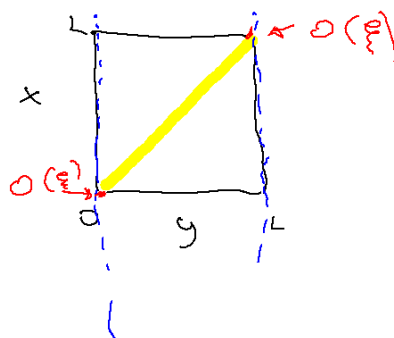


Figura 4.1: Dominio di integrazione per la varianza nel caso unidimensionale.

<sup>2</sup>Il conto seguente vale in una dimensione.

Nel limite  $T \rightarrow \infty$  possiamo usare il teorema del limite centrale: la varianza è proporzionale al numero di punti all'interno del reticolo e gli spin sono scorrelati. Quando ci mettiamo a  $T$  finito le variabili presentano un certo grado di correlazione.

La funzione di correlazione tra due spin corrisponde alla  $G$  del modello di Landau-Ginzburg:

$$\sum_x \sum_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle = \sum_{x,y} G(x-y)$$

Il dominio di integrazione è uniforme su entrambi gli assi (Figura 4.1). In realtà poiché la  $G(x-y)$  è significativamente non nulla solo per  $x \approx y$  possiamo estendere la somma su tutte le possibili  $y$ . In questo modo si commette un errore di ordine 1 (si contano in più le  $y$  vicine ai bordi quando  $x = 0$  e  $x = L$ ).

$$\sum_{0 \leq x \leq L} \sum_{-\infty \leq y \leq \infty} G(x-y) + O(1)$$

Nel limite  $L \rightarrow \infty$  questo contributo è trascurabile. Questa approssimazione può essere fatta anche in dimensioni generiche  $D$ .

$$\sum_{x \in B} \sum_{x \in B} G(x-y) = \sum_{x \in B} \sum_y G(x-y) + O(L^{D-1})$$

A questo punto con un semplice cambio di variabili si ottiene una somma che non dipende da  $x$ :

$$\sum_{0 \leq x \leq L} \sum_{-\infty \leq y \leq \infty} G(x-y) = \sum_{x \in [0, L]} \sum_z G(z) \quad z = x - y$$

La somma della  $G$  corrisponde alla sua trasformata di Fourier calcolata in zero.

$$L \sum_y G(y) = L \tilde{G}(0) + O(1)$$

Lo stesso tipo di argomento in dimensione  $D$ :

$$L^D \tilde{G}(0) + O(L^{D-1})$$

Se calcoliamo la varianza di una variabile di blocco otteniamo lo stesso risultato del limite per  $T \rightarrow \infty$  (la varianza va come il numero di dimensioni) con un coefficiente davanti che è la funzione di correlazione. Infatti a  $T \rightarrow \infty$

$$\tilde{G}(0) = 1$$

Quindi a qualunque temperatura superiore alla temperatura critica il fattore di normalizzazione si comporta, a meno di costanti moltiplicative, con la radice quadrata del termine.

Ricordiamo che il valore della funzione di correlazione è data dalla funzione di risposta (teorema di fluttuazione e dissipazione).

$$\tilde{G}(0) = \frac{\chi}{\beta}$$

Questa argomentazione fallisce al punto critico in cui  $\xi \rightarrow \infty$ , e non è più detto che il termine guadagnato estendendo  $y$  all'infinito sia trascurabile<sup>3</sup>.

Dimostriamo che le variabili di blocco sono scorrelate. Immaginiamo di avere due blocchi non contigui  $B_0$  e  $B_i$ .

$$\sum_{k \in B_0} \sum_{l \in B_i} \langle \sigma_k \sigma_l \rangle$$

Se  $i = 0$  questa quantità è di ordine  $L^D$ , se il blocco  $B_i$  non è contiguo al blocco  $B_0$ , la distanza minima tra due spin dei blocchi è  $L$ , e la funzione di correlazione può essere maggiorata da:

$$G(x, y) \leq e^{-L/\xi} \quad \forall x \in B_0 \quad \forall y \in B_i$$

Siccome  $L \gg \xi$ , la correlazione sommata su tutti gli spin è maggiorabile da:

$$L^{2D} e^{-L/\xi} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

(Dove  $L^{2D}$  è ottenuto sommando su tutti gli spin all'interno dei due blocchi). I blocchi sono scorrelati tra loro. La situazione delicata è quando i blocchi sono contigui, perché c'è una certa regione di bordo in cui la funzione di correlazione è di ordine 1. Possiamo in questo caso immaginare di tagliare da entrambi i lati dei blocchi una regione dell'ordine di  $5\xi$  (Figura 4.2).

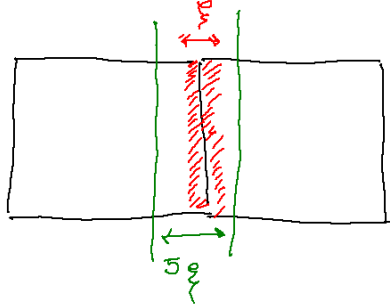


Figura 4.2: Blocchi contigui.

Quindi la funzione di correlazione è zero per i due blocchi tagliati, mentre dell'ordine di  $L^{D-1}$  per i pezzi di bordo; la funzione di correlazione va come  $L^{D-1}$  (solo termini di superficie sono importanti); che è nulla confrontata a  $L^D$  di due blocchi sovrapposti nel limite  $L \rightarrow \infty$ .

Questo concetto può essere formalizzato meglio: tagliamo i due blocchi ad una distanza  $N = L^{\frac{1}{2}}$  dalla superficie di contatto.

$$\sum_{i \in B_1} \sum_{j \in B_2} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \sum_{i \in B_1^{bulk}} \sum_{j \in B_2} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle + \sum_{i \in B_1^{surf}} \sum_{j \in B_2^{bulk}} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle + \sum_{i \in B_1^{surf}} \sum_{j \in B_2^{surf}} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$$

<sup>3</sup>Infatti la funzione  $G(z)$  è non nulla anche per valori molto grandi di  $z$  al punto critico (va a zero con una legge di potenza), quindi non è più dominante il termine intorno all'origine nel calcolo della somma.

La funzione di correlazione ai bordi può essere maggiorata con 1

$$\sum_{i \in B_1^{surf} \ j \in B_2^{surf}} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \leq (N \cdot L^{D-1})^2$$

Le altre funzioni di correlazione sono calcolate tra spin che distano almeno  $N$ :

$$\sum_{i \in B_1^{bulk} \ j \in B_2} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle + \sum_{i \in B_1^{surf} \ j \in B_2^{bulk}} \leq L^{2D} e^{-\frac{N}{\xi}}$$

Da cui otteniamo una maggiorazione della funzione di correlazione:

$$\sum_{i \in B_1 \ j \in B_2} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \leq N^2 L^{2D-2} + L^{2D} e^{-\frac{N}{\xi}}$$

Ora mandiamo  $L \rightarrow \infty$ , ricordando che  $N$  è definito come  $N = L^{\frac{1}{2}}$ :

$$\sum_{i \in B_1 \ j \in B_2} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \leq L^{2D-1} + L^{2D} e^{-\frac{\sqrt{L}}{\xi}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} O(L^{2D-1})$$

Questo termine di correlazione è trascurabile rispetto all'autocorrelazione del blocco, di ordine  $L^{2D}$ , per  $L \rightarrow \infty$ .

Rimane da dimostrare che le variabili di blocco sono distribuite in modo gaussiano.

$$\varphi_i = \sum_{k \in B_i} \sigma_k$$

Un metodo che si può usare, ma è complicato, è calcolare la *scewness* e la *kurtosis* della distribuzione e verificare se corrispondono con quelle di una distribuzione gaussiana.

**Definizione 4.1.1** (Scewness e Kurtosis). *Data una variabile casuale  $\varphi$  si definiscono Scewness (stortezza) e Kurtosis (rigonfiamento) nel seguente modo*

$$s = \frac{\langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^3 \rangle}{\sigma^3} \quad k = \frac{\langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^4 \rangle}{\sigma^4}$$

La *kurtosis* di una gaussiana è pari a 3.

In una gaussiana si possono ricavare tutti i momenti facilmente:

$$\langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^l \rangle = \begin{cases} 0 & l \text{ dispari} \\ \sigma^l (l-1)!! & l \text{ pari} \end{cases}$$

Si possono quindi calcolare tutti i momenti della distribuzione e dimostrare che coincidono con quelli della gaussiana<sup>4</sup>.

Possiamo calcolare la *kurtosis* delle variabili di blocco:

$$\sum_{k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4} \langle \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \sigma_{k_3} \sigma_{k_4} \rangle$$

Questa operazione è abbastanza complicata, perché occorre risolvere tutti i diagrammi a quattro campi. Invece di procedere con questo argomento complesso

<sup>4</sup> Esiste un teorema che asserisce se due distribuzioni hanno tutti i momenti uguali allora coincidono.

(ma possibile) calcolando esplicitamente i momenti della distribuzione, possiamo cercare cosa succede nel limite  $L \rightarrow \infty$ .

Le variabili di blocco sono costruite usando una formula iterativa:

$$\psi^{(n+1)} = \psi_k^{(n)} + \psi_{k+1}^{(n)}$$

Possiamo scrivere l'espressione delle variabili di blocco di ordine  $N$  a partire dalle variabili di ordine  $M$ :

$$\psi^N = \sum_{k=0}^{2^{N-M}} \psi_k^{(M)}$$

Scegliamo  $M = \sqrt{N}$  e facciamo il limite per  $N \rightarrow \infty$ . Anche  $M \rightarrow \infty$ , da cui le variabili di blocco di ordine  $M$  sono scorrelate. La somma di infinite ( $2^{N-M} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$ ) variabili casuali scorrelate è una variabile distribuita gaussianamente per il teorema del limite centrale. Quindi a grandi  $N$  la  $\psi$  ad alte temperature è una variabile gaussiana.

$$\langle \varphi_{B_i}^2 \rangle = L^D \frac{\chi}{\beta} = V \frac{\chi}{\beta}$$

Possiamo ridefinire le variabili di blocco rinormalizzate:

$$\psi_{B_i} = \frac{1}{\sqrt{\langle \varphi_{B_i}^2 \rangle}} \varphi_{B_i}$$

Con normalizzazione:

$$\langle \psi_{B_i}^2 \rangle = 1$$

Possiamo definire l'esponente di rinormalizzazione  $\omega$  delle variabili di blocco:

$$\psi = \frac{c}{V^\omega} \varphi_{B_i}$$

Per  $T > T_c$   $\omega = \frac{1}{2}$ . Questo risultato è dovuto al teorema del limite centrale.

#### 4.1.1 Normalizzazione al punto critico

Al punto critico la lunghezza di correlazione va a zero con una legge di potenza:

$$\langle \sigma_k \sigma_l \rangle = \frac{C}{|k-l|^{D-2+\eta}}$$

Sia

$$\zeta = D - 2 + \eta$$

Il coefficiente di normalizzazione può essere ottenuto dalla varianza della distribuzione:

$$\langle \varphi_B^2 \rangle = \sum_l \sum_k \frac{c}{|l-k|^\zeta}$$

Il contributo per  $l$  e  $k$  lontani diventa abbastanza importante, dell'ordine:

$$\langle \varphi_B^2 \rangle \sim \frac{L^D L^D}{L^\zeta}$$

$$\langle \varphi_B^2 \rangle \sim L^{2D-D+2-\eta} \sim L^{D+2-\eta}$$

Questo comportamento è completamente diverso dal caso  $T > T_c$ . L'esponente  $\omega$  del volume (nella radice della varianza) può essere calcolato:

$$C_L = \frac{1}{\sqrt{\langle \varphi_B^2 \rangle}} \quad C_L \sim \frac{1}{V^\omega}$$

$$\langle \varphi_B^2 \rangle \sim V^{2\omega} \sim L^{2D\omega}$$

$$\omega = \frac{D+2-\eta}{2D} = \frac{1}{2} + \frac{2-\eta}{2D}$$

La potenza  $\eta$  con la quale decresce la correlazione a  $T_c$  influenza la varianza di queste variabili di blocco.

Se proviamo a vedere la funzione di correlazione di due blocchi non contigui

$$\sum_{k \in B_0} \sum_{l \in B_i} \langle \sigma_k \sigma_l \rangle \approx \sum_k \sum_l \frac{1}{(2L)^{D-2+\eta}} \sim O(1) \frac{L^{2D}}{L^{D-2+\eta}}$$

Se adesso la varianza è dominata da punti che sono lontani anche in questo caso avremo dei punti che sono a distanza di ordine  $L$  la funzione di correlazione è dello stesso ordine di grandezza della funzione self. I blocchi sono correlati anche a distanza infinita.

L'argomento che avevamo usato per dimostrare la gaussianità della distribuzione di probabilità fallisce in questo caso. Tuttavia è possibile dimostrare che, per dimensioni  $D \geq 4$ , la distribuzione rimane comunque gaussiana. Il caso  $D < 4$  è più complicato, e sarà affrontato in seguito.

### 4.1.2 Normalizzazione a basse temperature

A basse temperature la funzione di correlazione tra spin è minorata dalla magnetizzazione:

$$\langle \sigma_l \sigma_k \rangle \geq m^2$$

La varianza delle variabili di blocco, sia che venga calcolata sullo stesso blocco, che sia calcolata su blocchi differenti da lo stesso risultato:

$$\sum_{ik} \langle \sigma_l \sigma_k \rangle \approx m^2 \sum_{l,k} = V^2 m^2$$

La distribuzione di probabilità in questo caso è semplice da calcolare. Per via della magnetizzazione residua, nel limite  $L \rightarrow \infty$ , avremo una frazione  $m$  di spin nel blocco allineati in una direzione. Poiché la variabile di blocco è definita come:

$$\varphi = \frac{1}{Vm} \sum_i \sigma_i = \frac{\langle \sigma_i \rangle}{m}$$

Che può assumere come valori solo +1 o -1.

Pertanto la distribuzione dovrà essere bimodale. Per ottenere che è proprio data da due delta dobbiamo calcolare la varianza. La correlazione nella fase di bassa temperatura può essere scritta come:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = m^2 + G_c(i-j)$$

Dove  $G_c(i-j)$  è un termine che decade esponenzialmente. Possiamo quindi fare un cambiamento di variabili:

$$\psi = m + \tilde{\psi} \quad \langle \tilde{\psi} \rangle = 0$$

Dove la  $\tilde{\sigma}$  rappresenta il residuo di magnetizzazione. Con argomenti analoghi a quanto fatto nel caso ad alte temperature si può vedere come, per grandi blocchi, questo tende ad essere una variabile distribuita in modo gaussiano. A questo punto la variabile di blocco è definita come:

$$\psi^{(N)} = \underbrace{\frac{1}{m2^{N-M}}}_{C_L} \sum_{k=0}^{2^{N-M}} \psi_k^{(M)} = \frac{1}{m2^{N-M}} \sum_{k=0}^{2^{N-M}} (m + \tilde{\psi}_k^{(M)}) = 1 + \frac{2^{\frac{N-M}{2}}}{m2^{N-M}}$$

Nel limite per  $N \rightarrow \infty$  il secondo termine (che rappresenta la fluttuazione, ossia la larghezza della gaussiana centrata in  $\pm 1$ ) va a zero, e si ottiene come distribuzione:

$$P(\psi) = \frac{1}{2} [\delta(\psi + 1) + \delta(\psi - 1)]$$

La presenza dei domini di Waiss a  $T < T_c$  fa sì che il sistema si comporti in modo simile a  $T = 0$  (tutti gli spin allineati),

$$\begin{array}{lll} T > T_c & \omega = \frac{1}{2} & \text{Gaussiana} \\ T < T_c & \omega = 1 & \text{Due delta} \\ T = T_c & \omega = \frac{D+2-\eta}{2D} & \text{Distribuzione incognita} \end{array}$$

La situazione è chiara per tutto tranne nel punto critico, perché il coefficiente  $\eta$  è da determinare (è un esponente critico).

## 4.2 Punti di attrazione

Facciamo una piccola premessa matematica necessaria per capire il funzionamento del gruppo di rinormalizzazione. Immaginiamo di avere una funzione  $\vec{x}(t)$  definita da un'equazione differenziale:

$$\dot{\vec{x}}(t) = f(\vec{x})$$

Che possa essere risolta in questo modo:

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^t g[\vec{x}(t')] dt' e^{-|t-t'|}$$

Come si comporta questa funzione per  $t \rightarrow \infty$ ?

Dobbiamo anzitutto supporre che questo andamento esista. Esistono due approcci: cercare di calcolare tutta la traiettoria e fare il limite per  $t \rightarrow \infty$ , oppure, in assenza di oscillazioni eccessive, supporre di finire in uno stato stazionario  $\dot{x}(t \rightarrow \infty) = 0$ .

Se la soluzione di questa equazione è unica, possiamo inferire con certezza che, se esiste un equilibrio, questo si trova nell'unico punto stazionario.

Il caso più semplice è quello di una pallina in una buca di potenziale (con attrito viscoso<sup>5</sup>).

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Indipendentemente dalle condizioni iniziali andremo a finire sul minimo del potenziale (se è unico). Il calcolo della traiettoria è necessario quando ci sono molti minimi, per capire in quale si finisce bisogna calcolare l'intera traiettoria. Esiste tutta una teoria molto estesa su questa tipologia di equazioni. Il fatto che il limite esista non è banale, ad esempio tutte le equazioni hamiltoniane (come l'oscillatore armonico) non hanno questo limite, per via della conservazione dell'energia (il sistema oscilla).

$$\vec{\dot{x}} = A(\vec{x}) \quad \vec{x} = (\vec{q} \ \vec{p})$$

Se ci troviamo in una situazione in cui abbiamo tanti minimi, esisteranno delle "linee" di spartiacque che separano lo spazio delle posizioni in regioni, ciascuna delle quali caratterizzata da un solo minimo (quello in cui arriva il sistema se parte nella regione). Sullo spartiacque deve esistere un punto di massimo (equilibrio instabile, a col di tenda).

Questa analisi può essere estesa al caso in più dimensioni.

$$\vec{\dot{x}} = \vec{A}(\vec{x})$$

Esiste una soluzione stazionaria:

$$A(x^*) = 0$$

Questa soluzione può essere o un punto fisso attrattivo o un punto fisso instabile (la linea di spartiacque). Per capire in quali dei due casi ci troviamo occorre posizionarsi nelle immediate vicinanze del punto, e studiare il moto del sistema.

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}^* + \vec{\delta}(t) \\ \dot{\vec{x}}(t) &= \dot{\vec{\delta}}(t) = \vec{A}(\vec{x}^* + \vec{\delta}) = A'(\vec{x}^*)\vec{\delta} + O(\delta)^2 \end{aligned}$$

Scrivendo questa equazione per tutte le componenti otteniamo che:

$$\dot{\delta}_\nu(t) = \sum_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \delta_\mu(t)$$

È possibile inferire qualcosa sul comportamento asintotico dalle proprietà della matrice  $\partial_\mu A_\nu$ ? Possiamo fare una trasformazione geometrica che diagonalizzi la matrice (supponendo per semplicità che la matrice sia simmetrica, e che quindi questa trasformazione esista).

In questa base l'equazione differenziale è diagonale (con  $\lambda_a$  autovalore della matrice  $\partial_\mu A_\nu$ )

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_a(t) &= \lambda_a \delta_a(t) \\ \delta_a(t) &= \delta_a(0) e^{t\lambda_a} \end{aligned}$$

Se esiste un  $\lambda_a > 0$  allora basta uno scostamento infinitesimo lungo quella direzione per fare esplodere la soluzione, se tutti i  $\lambda_a < 0$  allora la soluzione

<sup>5</sup>La presenza dell'attrito è necessaria per smorzare le oscillazioni del sistema.



è stabile. Se un autovalore è nullo bisogna fare un'analisi più complicata non lineare studiando cosa succede per ordini superiori<sup>6</sup>.

A seconda del numero di autovalori negativi ci sono  $n$  direzioni di stabilità. Tutta questa analisi si può riportare ad un caso a infinite dimensioni.

In questo caso la linea di separazione è una varietà che ha una codimensione 1

**Definizione 4.2.1** (Codimensione). *La codimensione di una varietà è la dimensione dello spazio meno la dimensione dell'oggetto.*

Se si va su uno spazio infinito-dimensionale, sia lo spazio che una superficie in questo spazio hanno infinite dimensioni. In questo caso la codimensione non può essere banalmente la differenza delle dimensioni.

Ovviamente tutta la stessa analisi può essere fatta usando equazioni iterative:

$$\vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n) \quad x_\infty = F(x_\infty)$$

Questo è vero solo nel caso in cui la funzione non ha discontinuità o punti di non derivabilità.

### 4.3 Gruppo di Rinormalizzazione

Dato un sistema di meccanica statistica abbiamo definito le variabili di blocco normalizzate:

$$P(\psi_L)_{L \rightarrow \infty}$$

Rimane da calcolare la normalizzazione corretta alla temperatura critica. Proviamo ad usare un metodo analogo a quello usato per  $T > T_c$ , ossia passare a blocchi di grandezza  $L^{\frac{1}{2}}$  per poi tornare a  $L$ , sfruttando il teorema del limite centrale.

Definiamo una successione crescente di grandezze di blocchi  $L_n$ :

$$L_n = 2^n$$

Il limite  $L \rightarrow \infty$  diventa  $n \rightarrow \infty$ . Possiamo definire la variabile di blocco in modo iterativo (in seguito il caso in una dimensione):

$$\Psi_{2L}(0) = c[\psi_L(0) + \psi_L(1)]$$

In una dimensione la variabile di blocco è la somma delle variabili di blocco più piccole che formano lo spazio (per l'opportuno coefficiente di rinormalizzazione). Le variabili a blocchi possono essere definite quindi in due metodi equivalente: o come somma su tutti gli spin del sistema, o si definisce la variabile di una coppia di siti, e poi in modo iterativo si definiscono tutte le altre come somma delle variabili di blocco più piccole.

Si definisce la prima variabile di blocco come la somma di coppie di spin, poi le nuove variabili di blocco come la somma delle coppie delle variabili precedente. Se abbiamo informazioni su variabili di blocco ad un dato livello, possiamo calcolare tutte le variabili successive senza sapere nulla su quelle precedenti.

<sup>6</sup>Questa analisi esula dal nostro scopo.

Questo vuol dire che la distribuzione di probabilità al blocco  $2L$  deve dipendere solamente dalle distribuzioni delle variabili di blocco al livello precedente.

$$P^{(n+1)}(\varphi_{n+1}) = A [P^n(\varphi_n)] \quad (4.1)$$

Con questo ci riallacciamo a quanto visto per la sezione precedente, e possiamo utilizzare tutta la teoria dei punti fissi per risolvere il limite  $L \rightarrow \infty$ .

La probabilità può essere scritta usando la relazione di Boltzmann

$$P^{(n)}(\psi_n) = \exp [-H_{eff}^n(\psi_n)]$$

Sostituendo nell'equazione (4.1) si ottiene un'equazione iterativa per l'hamiltoniana efficace delle variabili di blocco.

$$H^{(n+1)} = R [H^{(n)}] \quad (4.2)$$

Possiamo provare ad argomentare che questa trasformazione ha tre punti fissi, due attrattivi e uno repulsivo. Quelli attrattivi sono alte temperature e basse temperature, mentre quello instabile è il punto critico.

Questo spazio è enormemente grande<sup>7</sup>. Si può ridurre leggermente togliendo tutte le hamiltoniane che non hanno senso fisico o il cui comportamento termodinamico non esiste.

È immediato verificare che un punto fisso dell'equazione è il caso ad alte temperature, infatti la probabilità gaussiana è autoriproduttrice nell'equazione iterativa:

$$P_n(\psi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\psi_n^2}{2} \right)$$

Questa probabilità è stabile per il teorema del limite centrale, perché se abbiamo delle correlazioni piccole per un dato  $n$ , al passo successivo  $n + 1$  le correlazioni sono abbattute di un fattore  $\sqrt{2^n}$ , quindi è un punto a cui le soluzioni con poche correlazioni tendono a convergere.

Anche a  $T < T_c$  è stabile:

$$P_n(\psi^n) = \frac{1}{2} \prod_i \delta(\psi_i^n - 1) + \frac{1}{2} \prod_i \delta(\psi_i^n + 1)$$

In questo caso sono le fluttuazioni a sparire quando si aumenta  $n$  (il sistema tende a correlarsi sempre di più ad ogni aumento di  $n$ ).

Tra questi due stati attrattivi deve esistere una superficie di separazione. Movendosi sulla superficie di separazione esiste un punto "stabile" (solo nelle direzioni parallele a questa superficie), che è proprio il punto critico.

La vera hamiltoniana del sistema non la conosciamo, in generale è una funzione che, al variare della temperatura, attraversa la linea di separazione, e non passa per nessuno dei punti specifici. Tuttavia per  $L \rightarrow \infty$  tutti i punti dell'hamiltoniana nella regione  $T < T_c$  convergono verso l'attrattore a basse temperature, quelle per  $T > T_c$  convergono verso quello ad alte temperature. Il punto dell'hamiltoniana con  $T = T_c$  (dove l'hamiltoniana attraversa la linea di separazione) converge al punto critico (Figura 4.3)

Per  $L \rightarrow \infty$  l'hamiltoniana condensa in tre punti: punto critico, alta temperatura e bassa temperatura.

<sup>7</sup>Un punto di questo spazio è una possibile hamiltoniana del sistema

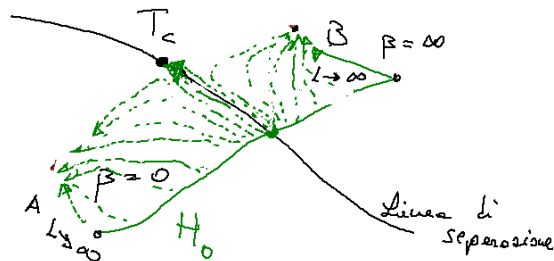


Figura 4.3: Schema dello spazio delle hamiltoniane. In figura sono rappresentate una particolare hamiltoniana, i poli attrattivi e il punto critico sulla linea di separazione. Tutti i punti dell'hamiltoniana convergono in tre punti distinti, indipendentemente dalla forma particolare dell'hamiltoniana.

Quindi tutti sistemi, che hanno hamiltoniane in generale completamente differenti tra di loro, presentano a  $L \rightarrow \infty$  esattamente lo stesso comportamento descritto dal modello di Landau-Ginzburg. In generale attraverseranno la linea di separazione a differenti temperature (ecco perché hanno temperature critiche molto differenti tra loro) ma tutti collasseranno esattamente allo stesso punto critico! Questo spiega perché attorno al punto critico tantissimi sistemi differenti mostrano esattamente gli stessi esponenti. Il dettaglio hamiltoniano ci dice solo la temperatura alla quale si attraversa la linea di separazione (la temperatura critica). Il comportamento a grande scala pertanto è completamente indipendente dal sistema.

Chiaramente sulla stessa superficie di separazione potrebbero esserci differenti punti critici (a loro volte separati da una varietà di codimensione 2). Quindi gli esponenti critici sono divisibili in classi di universalità, in base al punto critico a cui converge la data hamiltoniana (che dipende dalla zona in cui la hamiltoniana attraversa la superficie di separazione).

Il punto critico pertanto è un modello descritto da una hamiltoniana efficace particolare (che non è l'hamiltoniana di Ising) che passa proprio sul punto critico. La superficie critica è il dominio di attrazione del punto critico universale, e la temperatura critica del sistema è la temperatura alla quale l'hamiltoniana del modello attraversa la superficie critica.

Definiamo il parametro  $k = \tanh(b)$  con  $k \in [0, 1]$  e riduciamo tutte le infinite dimensioni a una sola (questo parametro) la trasformazione del gruppo di rinormalizzazione diventa:

$$b^{n+1} = f(b^n) \quad k^{n+1} = g(k^n) \quad b^0 = \beta$$

Vogliamo costruire una funzione  $g$  in modo da avere una struttura a tre punti fissi.

Abbiamo le condizioni banali:

$$g(0) = 0 \quad g(1) = 1$$

La prima rappresenta che punti sconnessi devono rimanere sconnessi (attrattore ad alte temperature), la seconda che punto esattamente correlati devono rimanere tali (attrattore a basse temperature)

Tutte queste trasformazioni di gruppo devono essere regolari (non devono avere punti angolosi).

Nel caso di alte temperature ( $b \sim 0$ ) e basse temperature ( $b \sim 1$ ) la pendenza della funzione deve essere minore di 1 (in modo che l'iterazione dia un punto di stabilità).

Unendo queste informazioni possiamo tracciare un grafico "rozzo" per la funzione  $g$  (Figura 4.4)

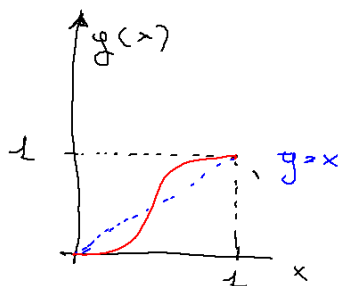


Figura 4.4: Se la funzione  $g$  è fatta in questo modo esiste un punto  $k^*$  che separa la fase a bassa o alta temperatura. Si vede che se si parte in un punto superiore si va iterando ad 1, altrimenti si va a zero.

### Diagonalizzazione di operatori non hermitiani

Apriamo una breve parentesi matematica su come si diagonalizzano operatori non hermitiani.

Gli operatori non simmetrici sono un po' più noiosi; se  $T$  ha una rappresentazione matriciale, possiamo scrivere il polinomio secolare.

$$\det [T - \lambda I] = P(\lambda)$$

Le radici di questo polinomio rappresentano lo spettro della matrice.

Se la matrice è  $N \times N$  questo polinomio è di ordine  $N$ , per cui abbiamo  $N$  autovalori. Nel caso di autovalori degeneri la situazione diventa leggermente più complicata (che trascuriamo). Se tutti gli autovalori sono distinti, esistono esistono dei corrispondenti autovettori  $\psi^{(a)}$ :

$$T\vec{\psi}^{(a)} = \lambda_a \vec{\psi}^{(a)}$$

Gli autovettori  $\vec{\psi}^a$  formano una base dello spazio.

$$\vec{v} = \sum_a c_a \vec{\psi}_a$$

Tuttavia questa è una base "sghemba", in cui i vettori non sono ortogonali.

$$\sum_\nu T_{\mu\nu} \psi_\nu^a = \lambda_a \psi_\mu$$

Può essere scritta nella notazione di Dirac.

$$T |\psi_a\rangle = \lambda_a |\psi_a\rangle$$

Questo è l'autovalore di destra della matrice. È possibile definire anche gli autovalori (e autovettori) di sinistra:

$$\sum_{\nu} \phi_{\nu}^a T_{\nu\mu} = \lambda^a \phi_a$$

$$\langle \varphi^a | T = \lambda_a \langle \varphi^a |$$

Questo è il problema degli autovalori della matrice trasposta. Poiché il determinante di una matrice coincide con quello della trasposta i due problemi condividono lo stesso polinomio secolare:

$$\det[T^t - \lambda] = \det[T - \lambda]$$

Quindi gli autovalori di destra e di sinistra coincidono. Gli autovettori invece sono differenti.

C'è un'estensione del teorema spettrale per matrici non simmetriche, secondo cui si possono sempre normalizzare autovettori di destra e di sinistra nel seguente modo:

$$\vec{\varphi}^a \cdot \vec{\psi}^b = \delta_{ab}$$

Con  $\varphi$  autovettori di sinistra e  $\psi$  autovettori di destra; entrambe le basi sono sghembe, ma reciprocamente ortogonali.

Se scriviamo un vettore come combinazione lineare di vettori di una base, le componenti dell'altra base si possono calcolare attraverso i prodotti scalari.

$$\vec{v} = \sum_a c_a \vec{\psi}_a \quad c_a = \vec{\varphi}_a \cdot \vec{v}$$

Per matrici simmetriche il teorema spettrale è dato dalla equazione:

$$T = \sum_a |\psi_a\rangle \langle \psi_a| \lambda^a = \sum_a \psi_{\mu}^a \psi_{\nu}^a \lambda^a$$

Per matrici non simmetriche l'equivalente del teorema spettrale:

$$T = \sum_a |\psi_a\rangle \langle \varphi_a| \lambda^a = \sum_a \psi_{\mu}^a \varphi_{\nu}^a \lambda^a$$

Una volta che abbiamo questa matrice, anche se la matrice  $T$  non è simmetrica, possiamo prendere la base in cui la matrice è diagonale e possiamo proiettare i vettori su queste direzioni.

### 4.3.1 Dinamica vicino al punto critico

È interessante studiare la dinamica vicino al punto critico. Immaginiamo che l'hamiltoniana del sistema passi molto vicino al puntocritico:

$$H = H^* + \delta H^{(n)}$$

Scriviamo l'equazione ricorsiva per  $\delta H$

$$\delta H^{(n+1)} = T \cdot \delta H^n$$

Dove  $T$  è un operatore lineare, ottenuto dallo sviluppo al primo ordine dell'equazione (4.2). Questo operatore  $T$  non è simmetrico.

$$R(H^* + \delta H) = R(H^*) + T\delta H$$

Possiamo fare un cambiamento di base e proiettare  $\delta H$  sulle direzioni identificate dagli autovettori di destra dell'operatore  $T$ .

$$\delta H^n = \sum_a c_a \vec{\psi}_a \quad T\vec{\psi}_a = \lambda_a \vec{\psi}_a$$

$$T^n \vec{\psi}_a = (\lambda^a)^n \vec{\psi}_a$$

$$\delta H^0 = \sum_a c_a \vec{\psi}_a$$

$$\delta H^n = \sum_a c_a^n \vec{\psi}_a$$

$$c_a^n = (\lambda^a)^n c_a$$

Una volta che abbiamo fatto la decomposizione in componenti. Le singole componenti lungo le varie proiezioni sono amplificate (o diminuite) di un fattore  $\lambda_a^n$ .

Se  $|\lambda| < 1$  il punto fisso è attrattivo ( $\delta H \rightarrow 0$  e ci avviciniamo al punto critico). Supponiamo di riordinare gli autovalori in ordine crescente:

$$|\lambda^{(1)}| > |\lambda^{(2)}| > \dots$$

In prossimità del punto critico c'è una sola direzione non attrattiva (quella ortogonale alla varietà di separazione).

$$\lambda^{(1)} > 1 \quad \lambda^{(2)} < 1$$

Se  $c_1 = 0$  andiamo sul punto critico altrimenti ci allontaniamo dal punto critico.

Essere vicini al punto critico significa scegliere  $c_1$  piccolo. Poiché il parametro che identifica il punto dell'hamiltoniana in cui ci troviamo è la temperatura,  $c_1$  è controllato dal parametro  $\tau$ :

$$c_1^0 = \tau \quad \tau = T - T_c$$

$$c_1^n = (\lambda^1)^n \tau$$

A che valore di  $n$  ci si allontana dal punto critico? In altre parole, che dimensione devono avere i blocchi affinché le variabili di blocco non presentino più il comportamento critico ( $c_1^{n^*} \sim 1$ )?

$$c_1^{n^*} = (\lambda^1)^{n^*} \tau = 1$$

$$n^* \ln \lambda^{(1)} = -\ln \tau$$

$$n^* = -\frac{\ln \tau}{\ln \lambda^{(1)}}$$

Più siamo vicino alla temperatura critica più aumenta il numero di interazioni necessarie per osservare un comportamento globale non critico; questa crescita è logaritmica. Le variabili di blocco sulla scala  $n^*$  sono poco correlate (perché sono lontano dal punto critico, supponendo  $T > T_c$ ). Quindi è il valore di  $n$  che discrimina quando le variabili di blocco sono correlate ( $n < n^*$ ) o meno. La dimensione delle variabili di blocco corrispondente ad  $n^*$  è la lunghezza di correlazione del sistema<sup>8</sup>.

$$L \ll 2^{n^*} \quad \text{variabili correlate}$$

$$L \gg 2^{n^*} \quad \text{variabili scorrelate}$$

Da cui possiamo identificare la lunghezza di correlazione:

$$\xi \propto 2^{n^*} = 2^{-\frac{\ln \tau}{\ln \lambda^{(1)}}} = e^{-\frac{\ln 2 \ln \tau}{\ln \lambda_1}} = \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln \lambda^{(1)}}}$$

Abbiamo ottenuto un comportamento a potenza della divergenza della lunghezza di correlazione, l'esponente critico dipende dall'autovalore  $\lambda_1$ , che dipende dal punto critico, non dalla particolare hamiltoniana. Questo spiega l'universalità del punto critico per molti fenomeni apparentemente differenti tra loro.

Il problema del calcolo degli esponenti critici si riduce al problema dell'hamiltoniana efficace, comune a tutti i sistemi fisici all'interno della stessa classe di equivalenza.

Tutto questo argomento non dipende molto da come abbiamo definito le variabili di blocco. La cosa fondamentale è che la trasformazione delle variabili di blocco sia ricorsiva.

$$B^{n+1} = F(B^n)$$

Questo induce ad una trasformazione ricorsiva delle hamiltoniane

$$H^{n+1} = R(H^n)$$

Le variabili di blocco possono essere costruite usando criteri probabilistici; ad esempio la variabile di blocco assume valore 1 se ci sono più spin up, -1 con più spin down, 1 o -1 con il 50 % se la somma è zero.

Una situazione di questo genere è molto conveniente per trattare il caso sotto temperatura critica, perché anche con una leggerissima magnetizzazione, bastano poche iterazioni per far convergere il risultato a variabili di blocco che sono tutti 1, mentre nella fase di alta temperatura ci si può convincere che sono tra loro scorrelate.

Anche il taglio del blocco è assolutamente trascurabile.

L'hamiltoniana efficace può dipendere dalle variabili di blocco con termini quadratici (o di ordine superiore)

$$H_{eff} \propto \phi_1 \phi_2 + P(\phi_1^2, \phi_2^2)$$

Questi termini possono essere difficili da calcolare per variabili di blocco  $\phi$  che possono assumere valori continui, tuttavia per trasformazioni non lineari, come

<sup>8</sup>Variabili di blocco più grandi di  $\xi$  non sono correlate, più piccole sì.

quella proposta poco fa, le variabili di blocco rimangono definite solo discretamente, pertanto le interazioni con  $\phi^2$  sono banali da trattare ( $\phi^2 = 1$  sempre). Lo spazio in cui vive l'hamiltoniana efficace è molto ristretto, poiché le funzioni possono valere solo  $-1$  e  $+1$ , quindi il conto diventa più semplice.

### 4.3.2 Calcolo dell'hamiltoniana efficace

Vogliamo cercare di stimare l'hamiltoniana efficace delle transizioni di fase del secondo ordine. Questa hamiltoniana è la soluzione stazionaria all'iterazione delle variabili di blocco.

Data l'hamiltoniana  $H^n$  del sistema dopo  $n$  iterazioni, vogliamo calcolare l'hamiltoniana nell'iterazione successiva  $H^{n+1}$ . Se la scatola dopo  $n$  iterazioni ha dimensione  $L$  all'iterazione successiva diventa  $L/2$  (perché aumenta la dimensione del blocco, quindi ci sono meno blocchi).

Vogliamo minimizzare gli effetti di bordo, prendiamo condizioni periodiche al contorno.

La dimensione minima della scatola di partenza per ottenere un risultato non banale è  $L = 4$  (con  $L = 2$  non possiamo fare iterazioni). Nel caso bidimensionale il blocco è un quadrato che ha due spin per lato (4 in totale).

Consideriamo tre tipi di interazioni: a primi vicini, a secondi vicini e a quattro spin.

$$H = C + J_p \underbrace{(\sigma_{00}\sigma_{01} + \sigma_{11}\sigma_{01} + \sigma_{00}\sigma_{10} + \sigma_{11}\sigma_{10})}_{\text{Interazioni a primo vicino}} + J_D \overbrace{(\sigma_{00}\sigma_{11} + \sigma_{10}\sigma_{01})}^{\text{Interazioni a secondi vicini}} + \underbrace{J_4 \sigma_{00}\sigma_{10}\sigma_{01}\sigma_{11}}_{\text{Int. a 4 spin}}$$

In questo caso mancano le interazioni a numero dispari di spin perché il campo magnetico esterno è nullo. Dati i valori dei coefficienti  $J_p$ ,  $J_D$  e  $J_4$  che definiscono l'hamiltoniana è possibile definire la distribuzione di probabilità di tutte le configurazioni, e calcolare i valori aspettati delle funzioni di correlazione:

$$G_p = \langle \sigma_{00}\sigma_{10} \rangle \quad G_D = \langle \sigma_{00}\sigma_{11} \rangle \quad G_4 = \langle \sigma_{00}\sigma_{10}\sigma_{01}\sigma_{11} \rangle$$

Esiste pertanto una corrispondenza biunivoca tra le funzioni di correlazione e i coefficienti dell'hamiltoniana<sup>9</sup>.

Definita la trasformazione delle variabili di blocco possiamo mappare interamente le  $2^{16}$  configurazioni del sistema con  $L = 4$  nelle  $2^4$  configurazioni del sistema all'iterazione successiva ( $L = 2$ ). Nota la distribuzione di probabilità delle  $2^{16}$  configurazioni iniziali conosciamo anche quella delle  $2^4$  configurazioni finali, pertanto siamo in grado di calcolare le nuove funzioni di correlazioni  $G_p$ ,  $G_D$  e  $G_4$ . Da queste configurazioni possiamo tornare, con la trasformazione inversa, ai coefficienti  $J$  dell'hamiltoniana nella nuova iterazione.

Pertanto abbiamo calcolato l'hamiltoniana allo step successivo:

$$H_0 : J_p^{(0)} J_D^{(0)} J_4^{(0)} \quad \Longrightarrow \quad H_1 : J_p^{(1)} J_D^{(1)} J_4^{(1)}$$

Possiamo cercare di calcolare quali sono i valori di  $J_i$  tali che questa trasformazione produca un punto fisso; l'hamiltoniana così ricavata è proprio l'hamiltoniana critica.

<sup>9</sup>Definiti le  $J$  dell'hamiltoniana corrispondono dei valori fissati delle  $G$ , il vice versa non è detto che sia vero, ma lo supponiamo per semplicità.



Il risultato completo di questo conto è riportato in seguito, con il confronto con i risultati analitici della soluzione del modello di Ising in due dimensioni (i primi due valori sono rispettivamente temperatura critica e esponente critico della lunghezza di correlazione):

$$\beta_c = 0.43(0.44) \quad \nu = 0.94(1) \quad J_p^* = .3 \quad J_D^* = 0.08 \quad J_4^* = 0.004$$

Quindi nel modello critico abbiamo un termine molto grosso nel primo vicini, piccolino a secondi vicino e trascurabile a quattro termine.

Approssimare l'hamiltoniana con un numero finito di costanti di accoppiamento è giustificato da questo risultato.

Questo conto, fatto analiticamente per  $L$  piccoli, può essere ripetuto per  $L$  più grandi (tipicamente 128) con metodi approssimati di tipo Monte Carlo.

## 4.4 Gruppo di rinormalizzazione per il modello gaussiano

Il modello gaussiano può essere risolto esattamente, ed esiste per  $T > T_c$ . La funzione di correlazione delle funzioni di blocco di ordine  $n$ -esimo può essere calcolata:

$$G_n(k_n - l_n) = \langle \varphi_{k_n} \varphi_{l_n} \rangle$$

Si può passare nello spazio di Fourier e riscrivere la relazione ricorsiva per la funzione di correlazione all'aumentare della dimensione del blocco:

$$\tilde{G}_{n+1}(p) = \left(1 + \cos \frac{p}{2}\right) \tilde{G}_n\left(\frac{p}{2}\right) + \left[1 + \cos\left(\frac{p}{2} + \pi\right)\right] G_n\left(\frac{p}{2} + \pi\right) \quad (4.3)$$

Per dimostrare questa relazione procediamo a definire una nuova variabile  $\tau_k$ :

$$\tau_k = \sigma_k + \sigma_{k+1}$$

La funzione di correlazione per le variabili di blocco  $\sigma_k$  è la stessa che per la variabile  $\tau_k$ . Possiamo scrivere la  $\tau_k$  come un prodotto di convoluzione:

$$\tau_k = (f \otimes \sigma)_k \quad f_0 = f_1 = 1 \quad f_i = 0 \quad \forall i \neq 0, 1$$

Usiamo il teorema di convoluzione di Fourier

$$\tilde{\tau} = \tilde{f} \tilde{\sigma}$$

Dove la trasformata di Fourier dell  $f$  vale:

$$\tilde{f} = 1 + e^{ik}$$

La trasformata di Fourier della funzione di correlazione può essere scritta come:

$$\tilde{G}_\sigma(k) = \langle \tilde{\sigma}(k) \tilde{\sigma}(-k) \rangle$$

Da cui la funzione di correlazione di  $\tau$ :

$$\tilde{G}_\tau(k) = \langle \tilde{\sigma}(k) \tilde{f}(k) \tilde{\sigma}(-k) \tilde{f}(-k) \rangle = \tilde{G}_\sigma(k) |1 + e^{ik}|^2$$

$$\tilde{G}_\tau(k) = \tilde{G}_\sigma(k) (2 + 2 \cos k)$$

La variabile  $\tau_k$  rappresenta il blocco all'iterazione successiva (è somma di due blocchi adiacenti). Le nuove variabili di blocco sono i  $\tau_k$  per  $k$  pari (bisogna saltare uno spin, altrimenti due blocchi adiacenti contengono uno spin in comune).

La trasformata di Fourier della correlazione tra le variabili di blocco può essere scritta in termini della  $G_\tau$  (correlazione sul singolo blocco)

$$\tilde{G}_B(p) = \sum_l e^{ipl} G_\tau(2l) = \sum_{k \text{ pari}} e^{ip\frac{k}{2}} G_\tau(k)$$

Possiamo sommare su tutti i  $k$  moltiplicando la somma per un termine che si annulla per  $k$  dispari:

$$\tilde{G}_B(p) = \sum_k e^{ip\frac{k}{2}} G_\tau(k) \left[ \frac{1 + e^{i\pi k}}{2} \right]$$

$$\tilde{G}_B(p) = \frac{1}{2} \sum_k e^{ik\frac{p}{2}} G_\tau(k) + \frac{1}{2} \sum_k e^{ik(\frac{p}{2} + \pi)} G_\tau(k) = \frac{1}{2} \tilde{G}_\tau\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2} \tilde{G}_\tau\left(\frac{p}{2} + \pi\right)$$

Sostituendo quanto calcolato precedentemente otteniamo:

$$\tilde{G}_B(p) = \left(1 + \cos\left(\frac{p}{2}\right)\right) \tilde{G}_\sigma\left(\frac{p}{2}\right) + \left[1 + \cos\left(\frac{p}{2} + \pi\right)\right] \tilde{G}_\sigma\left(\frac{p}{2} + \pi\right)$$

Abbiamo ottenuto l'espressione ricorsiva nelle funzioni di correlazione.

Visto che nel passaggio tra  $n \rightarrow n+1$  la scala spaziale aumenta di un fattore 2, l'impulso deve dimezzare (vive nello spazio reciproco); è ragionevole che la  $G_{n+1}(p)$  dipenda dalla  $G_n\left(\frac{p}{2}\right)$

Il secondo termine nella (4.3) è necessario per aggiustare il periodo, infatti il periodo della funzione a  $\tilde{G}(p)$  deve essere  $2\pi$ , mentre  $\tilde{G}\left(\frac{p}{2}\right)$  ha periodo  $4\pi$ .

Nel caso di piccoli impulsi questa formula diventa quello che ci si può aspettare:

$$\tilde{G}_{n+1}(p) = 2G_n\left(\frac{p}{2}\right)$$

Infatti abbiamo sommato due variabili di impulso pari alla metà.

Se siamo lontano dal punto critico per piccoli impulsi, la funzione di correlazione ha una formula ricorsiva del tipo:

$$G_n(p) = 2^n G\left(\frac{p}{2^n}\right)$$

Nel limite  $n \rightarrow \infty$ , per  $T > T_c$

$$G_n(p) = \text{cost}$$

Ossia non dipende da  $p$  questo vuol dire che la funzione di correlazione (trasformata di Fourier della  $G_n(p)$ ) per qualunque temperatura  $T > T_c$  è delta correlata.

Al punto critico invece

$$G_0(p) \sim \frac{1}{p^2}$$

Esiste un solo punto fisso asintotico procedendo al calcolo

$$\tilde{G}_\infty(p) \propto \sum_{\vec{j}} \frac{1}{(p + 2\pi\vec{j})^2} \prod_{\nu=1}^D \frac{1 - \cos p\nu}{(p_\nu + 2\pi\vec{j})^2} \quad (4.4)$$

L'unico termine in (4.4) che da una singolarità per  $p = 0$  è quello che corrisponde a  $\vec{j} = 0$ . Tutti i termini con  $j \neq 0$  non danno singolarità ma sono necessari per dare la periodicità in  $p$ .

La prima parte della funzione (senza la produttoria) è la più semplice funzione periodica con singolarità in zero (senza usare funzioni trigonometriche). Il termine nella produttoria non presenta singolarità, infatti anche se per  $p = 0$  si annulla il denominatore, quando  $j = 0$  diventa

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - \cos p\nu}{p^2} = \frac{1}{2}$$

Ora che sappiamo le variabili di blocco per il modello gaussiano dovremo essere in grado di ricavare l'hamiltoniana efficace.

$$H = \int dp \tilde{\varphi}_\infty(p) \tilde{G}_\infty^{-1}(p) \tilde{\varphi}_\infty(p)$$

O in un reticolo

$$H = \sum_k \varphi_i^\infty \varphi_k^\infty (G_\infty^{-1})_{i-k}$$

Sappiamo che  $\tilde{G}(p) > 0$  e che  $[\tilde{G}]^{-1} < \infty$ . Il termine di interazione  $J_{i-k} = G_{i-k}^{-1} = J_l$ . Si vede che

$$J_l \rightarrow \exp\left(-\frac{l}{\alpha}\right)$$

Dove ricordiamo come sono legati:

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{\tilde{J}(p)}$$

Dove la  $\tilde{J}(p)$  è la trasformata di Fourier del termine energetico nell'hamiltoniana.

$$H = \sum_{k,l} \sigma_k \sigma_l J_{kl}$$

Quindi conoscendo la funzione di correlazione  $\tilde{G}(p)$  è possibile ricavare l'hamiltoniana efficace a cui converge il modello gaussiano.

Questo non è molto interessante perché del modello Gaussiano conosciamo la soluzione analitica.

#### 4.4.1 Modello Gerarchico

Questo modello può essere risolto esattamente, fu inventato da Dyson, per studiare le transizioni di fase. Wilson negli anni 70 aveva provato a fare conti approssimati per il studiare il gruppo di rinormalizzazione, facendo un'approssimazione complicata. Nei vari diagrammi con bolle (Figura 4.5), si possono avere varie possibilità,  $|k| < |p|$  o vice versa.

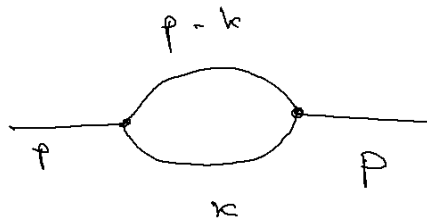


Figura 4.5: Esempio di diagramma approssimato da Wilson.

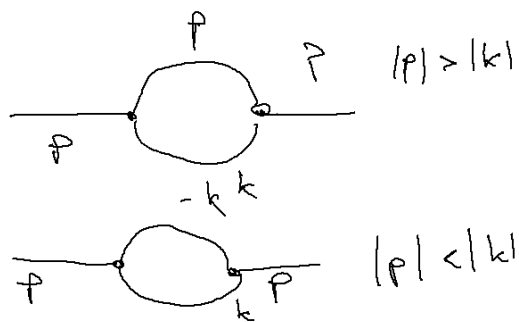


Figura 4.6: Schema dell'approssimazione di Wilson per diagrammi a bolla.

Una possibile approssimazione è trascurare nella somma di impulsi il termine più piccolo, come mostrato in Figura 4.6.

Con un calcolo complesso è possibile scrivere una formula iterativa della funzione di correlazione, e ottenere delle espressioni esplicite per le hamiltoniane efficaci.

Ad un certo punto i matematici si sono accorti che, con questa semplificazione sui diagrammi, la teoria di Wilson corrispondeva esattamente al modello gerarchico di Dyson, e Wilson aveva approssimato il mondo tridimensionale con questo modello. Nel modello di Dyson si possono scrivere equazioni di ricorsione per l'hamiltoniana effettiva in modo esatto.

Se prendiamo il modello di Ising ad una dimensione questo non può avere magnetizzazione. Se fissiamo un estremo del modello ad spin 1, possiamo calcolare la probabilità di osservarne uno spin -1 dall'altra parte. Questa probabilità equivale ad avere, in tutta la lunghezza  $L$  del segmento un flip di spin:

$$Z = 1 + Le^{-4\beta}$$

Sostanzialmente qualunque sia  $\beta$  si paga una quantità finita di energia per girare uno spin e creare un'interfaccia nel caso unidimensionale, se però  $L \rightarrow \infty$  alla fine la probabilità di avere uno spin che si gira è finita e il sistema perde memoria.

In due dimensioni questo argomento non aiuta. A bassa  $T$  l'interfaccia deve attraversare tutto il reticolo e ha dimensione  $L$  quindi l'energia necessaria costa  $-4\beta L$ , anche se ho  $L^2$  modi di mettere l'interfaccia il termine:

$$L^2 e^{-4\beta L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

Il modello di Dyson ha un hamiltoniana in cui sono presenti interazioni a lungo range:

$$H = - \sum_{ik} \frac{\sigma_i \sigma_k}{(i-k)^\rho}$$

Con condizione  $\rho > 1$  per far convergere la sommatoria.

Dyson dimostra che per  $1 < \rho < 2$  esiste transizione di fase. Dyson trasforma a forza bruta il modello per giungere ad un problema risolvibile analiticamente. Lo scopo originario era quello di introdurre la transizione di fase anche nel caso unidimensionale per calcolare gli esponenti critici (che Ising non fornisce perché non fa transizione).

Si prendono delle variabili di blocco e, a seconda della differente cella a cui appartengono, hanno interazione differente.  $\beta_n$  è l'interazione tra due siti in celle a distanza tipica  $n$ .

La distanza tipica tra variabili a due blocchi di ordine  $n$  è  $d_n = 2^{-n}$ . Due variabili appartenenti a blocchi differenti interagiscono tra loro con un coefficiente  $\beta_n$  ( $n$  è l'ordine più piccolo del blocco differente).

$$\beta_n \sim d_n^{-\rho}$$

Due spin molto distanti hanno l'interazione che è uguale al modello di Dyson originale, ma due spin molto vicini (ma appartenenti a blocchi differenti) interagiscono come se fossero molto distanti.

Possiamo definire delle variabili di blocco  $\tilde{\varphi}_n$  e scrivere la relazione ricorsiva per la probabilità

$$P_{n+1}(\tilde{\varphi}_{n+1}) = \int d\varphi_1 d\varphi_2 P_n(\varphi_1) P_n(\varphi_2) \delta(\varphi_{n+1} - \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) \exp(-\beta_n \varphi_1 \varphi_2)$$

Questa formula può essere integrata esattamente, ci dà la possibilità di dire quello che succede su grande scala.

Questa si può leggere esattamente come una trasformazione ricorsiva. Questa trasformazione è molto liscia e si può dimostrare che in questo spazio tutta l'analisi matematica sui punti fissi può essere fatta.

Questo oggetto ha una struttura a tre punti fissi, uno a bassa temperatura, uno ad alta temperatura e un punto critico. Questa equazione non si risolve a mano ma è estremamente facile da risolvere numericamente, e il risultato è noto con tantissime cifre significative.

La cosa è molto interessante, perché possiamo studiare il punto fisso instabile sulla linea critica.

$$1 < \rho < 1.5$$

Per questi valori di  $\rho$  il punto fisso è di tipo gaussiano.

$$P(\varphi) = e^{-\varphi^2}$$

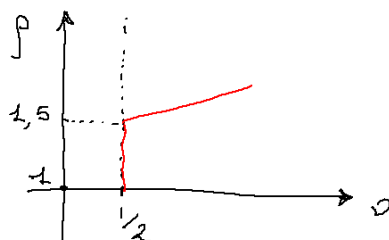
Come nel caso di alta temperatura. Quando  $\rho = 1.5 + \varepsilon$  il punto fisso gaussiano diventa instabile, e si forma un nuovo punto fisso non gaussiano, a distanza  $\varepsilon$  e la distribuzione diventa:

$$P_n(\varphi) \propto \exp(-\varphi^2 - A\varepsilon\varphi^4 + B\varepsilon^2\varphi^6)$$

Questo punto fisso differisce di poco da quello gaussiano e si può fare una teoria perturbativa in potenza di  $\varepsilon$ .

Intorno al punto fisso gaussiano  $\nu = \frac{1}{2}$  Per quello non gaussiano diventa:

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\varepsilon$$



Si può dimostrare che questo modello è equivalente all'approssimazione di Wilson, posto  $\rho$ :

$$\rho = 1 + \frac{2}{D}$$

Quindi effettivamente per  $D = 4$ ,  $\rho = 1.5$  ; il punto in cui il modello predice un punto fisso non gaussiano, e per  $D = 2$  non troviamo transizione di Fase. Questo risultato suggerisce due cose:

- Per dimensioni più grandi di 4 gli esponenti critici sono banali.
- Per dimensioni vicine a 4 gli esponenti critici sono vicini a quelli predetti dal campo medio.

Si può pensare quindi di calcolare gli esponenti critici a partire dal risultato noto per  $D = 4$ .

Possiamo immaginare di fare uno sviluppo perturbativo nella distribuzione di probabilità asintotica rispetto a quello che succede al punto fisso.

È possibile che il punto fisso di questi sistemi sia non troppo lontano da un punto fisso gaussiano, e quindi fare uno sviluppo intorno ad un punto fisso gaussiano abbia senso.

Il modello di Landau dava diagrammi infrarosso divergenti al punto critico. Tuttavia noi facevamo uno sviluppo perturbativo rispetto alla costante di accoppiamento, invece sarebbe corretto fare uno sviluppo direttamente sul punto fisso. C'è questa idea della biforcazione, un punto fisso che diventa instabile e lo sviluppo perturbativo rispetto al punto fisso. I lavori di Wilson calcolano gli esponenti critici in dimensione 3.99, e argomenta che l'esponente critico si allontana di poco da  $\frac{1}{2}$ . Si trova

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\varepsilon + \frac{3 \cdot 84}{8g^2}\varepsilon^2 + \dots$$

$$\eta = \frac{\varepsilon^2}{54}$$

Questo conto in modo esplicito fino a  $\varepsilon^5$  si possono stimare con precisione di qualche parte per mille.

La dimensione 4 che separa gli esponenti banali da non banali è detta *upper-critical-dimension*. Sopra questa dimensione il sistema è in campo medio, sotto la *lower-critical-dimension* non esiste transizione di fase. Esistono modelli che non hanno una *upper-critical-dimension* che sono estremamente resistenti a calcoli analitici, non esiste nessun buon conto analitico buono ancora.

#### 4.4.2 Rinormalizzazione nella funzione di correlazione

Come si possono rinormalizzare le funzioni di correlazione al punto critico.

Al punto critico la funzione di correlazione decresce con un andamento a potenza con esponente scritto nella Sez. 4.1.1:

$$G(x, \tau) \approx \frac{1}{x^{D-2+\eta}} f\left(\frac{x}{\xi}\right) \quad (4.5)$$

Per comodità possiamo in alcuni conti riscrivere l'espressione (4.5) nel seguente modo:

$$G(x, \tau) \approx \frac{1}{\xi^{D-2+\eta}} g\left(\frac{x}{\xi}\right)$$

Questa uguaglianza si verifica facilmente.

$$G(x, \tau) \approx \underbrace{\frac{1}{\tau^{D-2+\eta}} f\left(\frac{x}{\xi}\right) \xi^{D-2+\eta}}_{g\left(\frac{x}{\xi}\right)} \frac{1}{\xi^{D-2+\eta}}$$

Usando il calcolo dimensionale possiamo ottenere la dimendenza della suscettibilità magnetica dalla lunghezza di correlazione:

$$[\chi] = \left[ \int d^D x G(x, \tau) \right] = D - D + 2 - \eta = 2 - \eta$$

Otteniamo che

$$\chi \propto \xi^{2-\eta}$$

Possiamo cercare di legare tra loro gli esponenti  $\nu$ ,  $\eta$  e  $\gamma$ :

$$\xi \sim \tau^{-\nu} \quad \chi \sim \tau^{-\gamma}$$

Unendo queste informazioni otteniamo l'espressione per  $\gamma$

$$\gamma = (2 - \eta)\nu$$

Discorso analogo può essere affrontato per le funzioni di correlazione a quattro punti, che possono essere scritte come:

$$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi) \sim \frac{1}{x^{2(D-2+\eta)}} f_4\left(\frac{x_1 - x_2}{\xi}, \frac{x_1 - x_3}{\xi}, \frac{x_1 - x_4}{\xi}\right) \quad (4.6)$$

Questa funzione può essere ottenuta a partire dal calcolo diagrammatico, considerando solo i diagrammi connessi:

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \rangle_c = \frac{1}{\xi^{2(D-2+\eta)}} f_4^c\left(\frac{x_1 - x_2}{\xi}, \frac{x_1 - x_3}{\xi}, \frac{x_1 - x_4}{\xi}\right)$$

Se il punto fisso è gaussiano, la correlazione a quattro campi è nulla. Possiamo cercare un approccio perturbativo per la funzione  $g$  attorno al punto fisso gaussiano. Dobbiamo superare la difficoltà di calcolare la correlazione al punto fisso, visto che  $\xi$  diverge. Per farlo mandiamo  $\xi \rightarrow \infty$ , e vediamo cosa succede alle funzioni di correlazione a distanze che sono dell'ordine di  $\xi$

Si cambia la risoluzione in modo da vedere le funzioni di correlazione sulla scala di  $\xi$ .

La funzione di correlazione di due campi è

$$\langle \varphi(x) \varphi(0) \rangle$$

La funzione di correlazione gaussiana è:

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{m^2 + p^2}$$

Per piccoli  $p$  può essere approssimata:

$$\tilde{G}(p) \approx \frac{1}{m^2} + \frac{p^2}{m^4}$$



$$G^{-1}(p) \approx \frac{1}{A} (p^2 + m^2 + p^4)$$

Anche in questo caso può essere utile fare l'analisi dimensionale,  $m$  ha le stesse dimensioni di  $p$ , che è il parametro trasformato delle posizioni spaziali (è l'inverso di una distanza). Per analisi dimensionale otteniamo:

$$m^2 \propto \xi^{-2}$$

$$G(x) \sim \frac{1}{x^{D-2+\eta}} f\left(\frac{x}{\xi}\right)$$

$$\tilde{G}(p) = \int d^D x G(x, \xi) e^{-ipx} = \int \frac{d^D x}{x^D} \left(\frac{1}{x}\right)^{2-\eta} \exp(-ipx) f\left(\frac{x}{\xi}\right)$$

Usando l'analisi dimensionale è possibile risolvere questo integrale:

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^{2-\eta}} \tilde{f}(p\xi)$$

Dove poiché  $\xi \sim m^{-1}$  otteniamo anche in questo caso una simile legge di scala

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^{2-\eta}} \tilde{f}\left(\frac{p}{m}\right)$$

Oppure per lo stesso argomento della funzione nello spazio reale:

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{m^{2-\eta}} \tilde{g}\left(\frac{p}{m}\right)$$

Possiamo sviluppare in  $\frac{\tilde{g}(p/m)}{m^2}$ , quando  $p$  è dell'ordine di  $m$

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{m^{-\eta}} \frac{1}{m^2} \tilde{g}\left(\frac{p}{m}\right) \approx \frac{1}{m^{-\eta}} \frac{1}{m^2 + p^2 + O(p^4/m^4)}$$

Apparte il fattore  $m^\eta$  questo sviluppo coincide con la correlazione di un polo gaussiano. Il risultato può essere rinormalizzato:

$$\langle \varphi(x) \varphi(0) \rangle m^\eta = \frac{1}{m^2 + p^2 + O(p^4)}$$

Possiamo definire un campo rinormalizzato in modo che la funzione di correlazione sia quella di un attrattore gaussiano.

$$\varphi^R = m^{\frac{\eta}{2}} \varphi$$

$$\langle \varphi^R(x) \varphi^R(0) \rangle = \frac{1}{m^2 + p^2 + O(p^4)}$$

Stiamo definendo delle funzioni di correlazione appropriate che siano ben definite nel limite in cui ci avviciniamo al punto critico ( $\xi \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow 0$ ). Studiare il sistema a distanze dell'ordine della lunghezza di correlazione equivale a guardare la funzione di correlazione nella regione  $p \sim m$ , per cui, nel limite  $m \rightarrow 0$ , teniamo costante il rapporto  $p/m$ . Questo modo di fare il limite non fa divergere la funzione di correlazione, permettendo di eliminare le divergenze

fastidiose che avevamo ottenuto nella teoria di Landau-Ginzburg studiando il sistema vicino al punto critico.

La stessa cosa può essere fatta in funzione di  $\tau$ . Possiamo immaginare di sviluppare la funzione di correlazione in potenze di  $p$ :

$$G(p, \tau) = A(\tau) + B(\tau)p^2 + O(p^4)$$

Questa scrittura può essere riscritta, rimanendo al secondo ordine in  $p^2$ , in modo più comodo

$$G(p, \tau) = \frac{Z(\tau)}{m^2(\tau) + p^2 + O(p^4)}$$

Noti i coefficienti  $A$  e  $B$  passare da una scrittura all'altra è triviale. Si possono definire dei campi rinormalizzati:

$$\varphi^R(x) = \frac{\varphi(x)}{Z^{\frac{1}{2}}(\tau)}$$

In modo che il loro comportamento sia simil-gaussiano.

$$\langle \varphi^R(x) \varphi^R(0) \rangle = \frac{1}{p^2 + m^2}$$

Per la funzione di correlazione a quattro campi la storia è leggermente più complicata. Anche in questo caso dobbiamo cercare una normalizzazione appropriata.

$$\langle \varphi_R \varphi_R \varphi_R \varphi_R \rangle$$

Le funzioni di correlazione a quattro campi sono rappresentate da diagrammi con quattro estremi fissi (Figura 4.7).

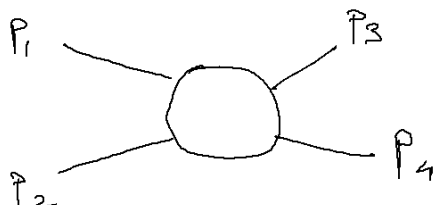


Figura 4.7: Funzione di correlazione a quattro punti, nella sua rappresentazione diagrammatica. La palla al centro rappresenta tutte le possibili combinazioni di diagrammi.

In teoria delle perturbazioni al primo ordine il diagramma della funzione a quattro campi è semplicemente il prodotto delle due linee gaussiane che congiungono i campi:

$$\frac{1}{m^2 + p_1^2} \frac{1}{m^2 + p_2^2} g$$

Dove la costante di accoppiamento è quella che compare nel hamiltoniana di Landau. La funzione di correlazione per quattro campi può essere riscritta come mostrato in (4.6):

$$\langle \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(t) \rangle \approx \frac{1}{(x^{D-2+\eta})^2} f\left(\frac{x_i}{\xi}\right)$$

Questa funzione è invariante per traslazione, abbiamo solo tre impulsi indipendenti. Per analisi dimensionale possiamo ottenere la trasformata di Fourier:

$$\int d^D y d^D z d^D t \exp(-ip_2 y - ip_3 z - ip_4 t) G^4(x, y, z, t) \quad p_1 = -p_2 - p_3 - p_4$$

Le dimensioni vengono dai differenziali e dalla funzione di correlazione spaziale

$$3D - 2(D - 2 - \eta) = D + 4 - 2\eta$$

Dove  $m$  ha dimensioni inverse di  $x$ :

$$G^4(p) \approx \frac{1}{m^{4+D-2\eta}} \quad p \rightarrow 0$$

Tutta la dipendenza da  $p$  deve essere adimensionale

$$G^4(p) = \frac{1}{m^{4+D-2\eta}} \tilde{g}\left(\frac{p}{m}\right)$$

La funzione di correlazione  $G^2$  aveva lo stesso tipo di comportamento:

$$G^2(p) = \frac{1}{m^{2-\eta}} \tilde{g}\left(\frac{p}{m}\right)$$

Applicando la rinormalizzazione dei campi si cancella il termine dipendente da  $\eta$ .

$$G_R^2(p) \sim \frac{1}{m^2}$$

$$G_R^4(p) \sim \frac{1}{m^{4+D}}$$

Questa può essere riscritta mettendo in evidenza il punto fisso gaussiano:

$$G_R^4(p) = \frac{\Gamma_R}{(p^2 + m^2)^4} \quad (4.7)$$

Le dimensioni di  $\Gamma_R$  possono essere trovate facilmente:

$$[\Gamma_R] - 8 = -4 - D$$

$$\Gamma_R \approx m^{4-D}$$

Il coefficiente  $\Gamma_R$  calcola quanto ci allontaniamo dal modello gaussiano. il comportamento deve essere una funzione di  $m^{4-D}$  (per motivi dimensionale).

Questa corrisponde a tutta la parte interna dei diagrammi, mentre la parte esterna è data dalle quattro linee gaussiane (che generano il denominatore). Calcolare  $\Gamma_R$  equivale a stimare quanto la funzione di correlazione a quattro punti è diversa dal modello gaussiano<sup>10</sup>.

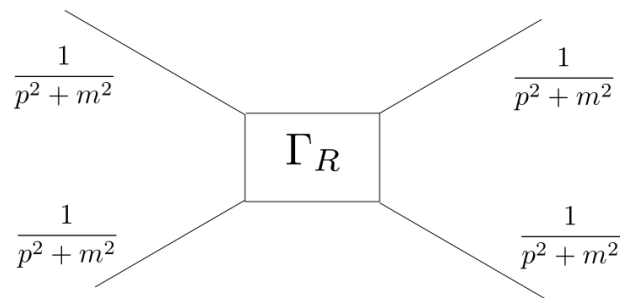


Figura 4.8: Rappresentazione diagrammatica completa della funzione a quattro campi. Il risultato del diagramma è riportato nell'equazione 4.7



Figura 4.9: Diagrammi di ordine più basso per la funzione di correlazione a quattro campi.

I diagrammi di ordine più basso che permettono di scrivere  $\Gamma_R$  sono raffigurati in Figura 4.9.

I diagrammi con decorazioni su linee esterne contribuiscono a modificare le quattro braccia esterne del diagramma, e possono essere inclusi in una rappresentazione in cui alla correlazione gaussiana sostituiamo la correlazione di due campi completa della teoria di Landau-Ginzburg<sup>11</sup>. Tuttavia abbiamo dimostrato che al punto critico su scala  $p \sim m$ , apparte un fattore di normalizzazione, la  $G(p)$  completa è proprio la correlazione gaussiana.

Questo ci permette di eliminare tutti i diagrammi che decorano i bracci esterni, e  $\Gamma$  sarà influenzato solo dai diagrammi interni. Calcolando i due diagrammi che entrano al primo e al secondo ordine<sup>12</sup>  $\Gamma$

$$\Gamma = g - Ag^2 \frac{3}{2} \int \frac{d^D p}{(p^2 + m^2)^2}$$

Risolvendo l'integrale usando l'analisi dimensionale si ottiene.

$$\Gamma = g - \frac{3}{2} Ag^2 \frac{B}{m^{4-D}} = g \left[ 1 - \frac{3}{2} AB \frac{g}{m^{4-D}} \right]$$

Questa costante di accoppiamento diverge al punto fisso. Siccome per motivi dimensionali sappiamo che  $\Gamma_R$  deve divergere come  $m^{D-4}$  per  $m \rightarrow 0$  possiamo definire una costante  $\lambda$  che è finita al punto fisso.

$$\lambda = \frac{\Gamma_R}{m^{4-D}} = \frac{g}{m^{4-D}} \left[ 1 - \frac{3}{2} AB \frac{g}{m^{4-D}} \right] \quad (4.8)$$

Lo sviluppo al primo ordine in  $\lambda$  diverge. La teoria delle perturbazioni non da buoni risultati perché  $\lambda$  deve essere finito. Infatti deve esistere un valore critico di  $\lambda$  tale che:

$$\frac{g}{m^{4-D}} \rightarrow \infty \quad \lambda \rightarrow \lambda_c$$

Tuttavia è abbastanza ovvio capire il motivo della divergenza di  $\lambda$ : se sviluppiamo una funzione con limite per  $x \rightarrow \infty$  definito in una serie di Taylor attorno ad un punto, otterremo sempre una funzione divergente (Figura 4.10):

$$f(x) = ax + bx^2 + \dots \quad x \rightarrow \infty \quad f(x) \rightarrow \text{bho?}$$

Occorre quindi cercare un magheggio matematico che consenta di sviluppare meglio la funzione.

Sia per semplicità

$$\frac{g}{m^{4-D}} = u$$

Possiamo studiare la derivata (Figura 4.11)

$$\frac{d\lambda}{du}$$

<sup>10</sup>Questa stima è fatta nel limite  $m \rightarrow 0$ , per  $p \sim m$ , che equivale a guardare il sistema su una scala molto grande.

<sup>11</sup>Possiamo immaginare di sostituire le linee esterne con delle linee "spesse", che rappresentano l'intera funzione di correlazione a due campi. Il risultato di questo è sostituire i denominatori con l'intera espressione per la  $G(p)$  a due campi.

<sup>12</sup>I diagrammi sono calcolati in assenza di impulso esterno, per  $p \rightarrow 0$ , ossia fissando uguali gli impulsi sui quattro bracci.

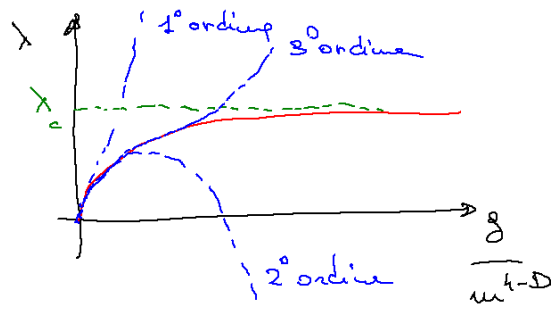


Figura 4.10: Anche se  $\lambda$  converge non è banale trovare il sul valore critico usando la teoria delle perturbazioni.



Figura 4.11: Grafico della derivata di  $\lambda$ .

Le leggi di scala assicurano la convergenza di  $\lambda$ , ma lo sviluppo in teoria delle perturbazioni non ci dà direttamente questa curva. Possiamo usare però risolvere il sistema parametrico:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(u) \\ \lambda' = \frac{d\lambda}{du}(u) \end{cases}$$

Questo sistema può essere risolto ricavando  $u$  dalla prima equazione (invertendo  $\lambda(u)$ ) e sostituendolo come parametro nella derivata. Si ottiene la funzione

$$\frac{d\lambda}{d\lambda}(\lambda)$$

Il cui grafico è mostrato in Figura 4.12.

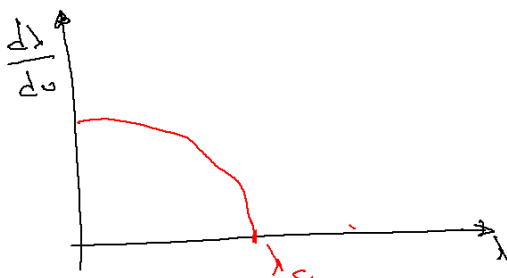


Figura 4.12: Grafico della funzione  $\frac{d\lambda}{d\lambda}$  in funzione di  $\lambda$ . Con questa parametrizzazione la curva raggiunge il valore critico in un numero finito di passi, ed è possibile calcolare  $\lambda_c$  usando lo sviluppo perturbativo.

Questa curva è buona da calcolare con la teoria delle perturbazioni perché è una funzione abbastanza regolare (non ha cuspidi).

$$\lambda = u - \frac{3}{2}ABu^2$$

$$\frac{d\lambda}{du} = 1 - 3ABu$$

$$\lambda = u + o(\lambda^2) \quad u = \lambda - O(\lambda^2)$$

$$\frac{d\lambda}{d\lambda} = 1 - 3AB\lambda$$

L'equivalente grafico di questa approssimazione è mostrato in Figura 4.13

Troviamo un valore di  $\lambda_c$  che è pari a

$$\lambda_c = \frac{1}{3AB} \tag{4.9}$$

Questo sembra un gioco di carte. Nessuno mi dice che questo sia ben definito perché andando ad ordini superiori  $\lambda_c$  potrebbe cambiare drasticamente (o non essere più definito) e quindi non dare un risultato interessante.

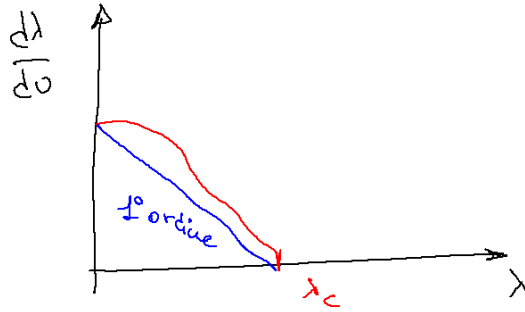


Figura 4.13: Stima di  $\lambda_c$  con la teoria delle perturbazioni al primo ordine.

A questo punto bisogna risolvere gli integrali esatti per ottenere i parametri  $A$  e  $B$ . Calcoliamo il valore esatto dell'integrale  $\Gamma_R$  (al primo ordine).

$$\Gamma_R = g - \frac{3}{2} \frac{g^2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(p^2 + m^2)^2} \quad (4.10)$$

Questo integrale può essere calcolato usando la regola di Feynman.

$$\frac{1}{A^2} = \int_0^\infty dz z e^{-zA}$$

Con questa espressione possiamo riscrivere l'integrale. Si noti che l'integrale in  $p$  diventa un semplice integrale gaussiano.

$$\int \frac{d^D p}{(p^2 + m^2)^2} = \int_0^\infty dz z \int d^D p e^{-(p^2 + m^2)z} = \int_0^\infty dz \left(\frac{\pi}{z}\right)^{D/2} z e^{-zm^2} = \pi^{D/2} \underbrace{\int \frac{dz}{z} z^{2-\frac{D}{2}} e^{-zm^2}}_{\frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{m^{4-D}}}$$

Sostituendo il risultato nell'espressione 4.10 si ottiene:

$$\begin{aligned} \Gamma_R &= g - \frac{3}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{m^{4-D}} \\ \Gamma_R &= g \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{g}{m^{4-D}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \right) \\ \lambda &= \frac{\Gamma_R}{m^{4-D}} \\ \lambda &= \frac{g}{m^{4-D}} \left[ 1 - \frac{g}{m^{4-D}} \frac{3}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Confrontando questa espressione con la 4.8 otteniamo il valore del prodotto dei coefficienti  $AB$ :

$$AB = \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}$$



Sostituendoli nell'espressione del parametro critico  $\lambda_c$  (4.9) si ottiene:

$$\lambda_c = \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}{3\Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right)}$$

La funzione  $\Gamma$  ha un polo se l'argomento va a zero. Lo sviluppo di Taylor-Maclaurin per la funzione attorno al è il seguente:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + O(1)$$

Se ci mettiamo in prossimità di  $D = 4$  (che annulla l'argomento della  $\Gamma$ ) otteniamo un valore critico pari a:

$$\lambda_c = (4\pi)^{\frac{D}{2}} \left( \frac{4-D}{6} \right)$$

Fare lo sviluppo in serie di  $\lambda$  funziona bene se siamo in dimensioni sufficientemente vicino a 4, quindi la costante di accoppiamento è piccola, e quindi c'è la speranza che lo sviluppo sia convergente abbastanza velocemente.

Dall'espressione di  $\lambda$  possiamo immediatamente verificare che il punto fisso gaussiano corrisponde ad una condizione  $\lambda_c = 0$ . Questo risultato è stabile per  $D > 4$ . Per  $D < 4$  questa soluzione diventa instabile, e si genera una nuova soluzione stabile con  $\lambda_c \neq 0$  asintoticamente vicina a zero per  $D \rightarrow 4$ . Il parametro  $\lambda_c$  pertanto misura la *non-gaussianità* del punto fisso. Se la serie ha una buona convergenza possiamo sperare di arrivare, partendo con  $D \sim 4$ , ad una buona predizione del parametro  $\lambda_c$  per  $D = 3$  (Figura 4.14).

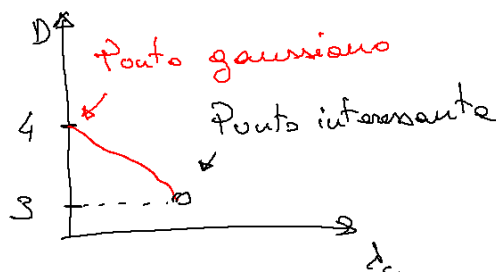


Figura 4.14: Partiamo da un punto fisso gaussiano  $\lambda_c = 0$  in dimensione maggiore o uguale a 4. Il parametro  $\lambda_c$  misura la non gaussianità del punto. Possiamo fare uno sviluppo perturbativo nelle dimensioni per calcolare il valore di  $\lambda_c$  per le tre dimensioni.

Quindi l'interesse è capire se  $D = 3$  è una dimensione sufficientemente vicina a 4 per far convergere bene (con pochi termini) questo sviluppo.

### Riepilogo

Riepiloghiamo quanto detto in quest'ultima sezione.

Vogliamo studiare il comportamento al punto critico, e vedere come si comporta il sistema a distanze dell'ordine della lunghezza di correlazione  $\xi$ .

Nella base degli impulsi questo corrisponde a studiare la situazione per  $p \sim m$ .

La funzione di correlazione può essere scritta in due modi equivalenti; il primo è comodo per studiare cosa succede per  $p \sim m$ , il secondo per  $p \sim g^{\frac{1}{4-D}}$ .

$$G(p, m, g) = \langle \varphi \varphi \rangle = \frac{1}{p^2} f_1 \left( \frac{p}{m}, \frac{g}{m^{4-D}} \right) = \frac{1}{p^2} f_2 \left( \frac{p}{g^{\frac{1}{4-D}}}, \frac{g}{m^{4-D}} \right)$$

La funzione di correlazione  $G$  a quattro punti può essere scritta mettendo in evidenza i quattro bracci (e tutti i diagrammi ad essi correlati). La parte centrale irriducibile è  $\Gamma_R$  dipende da  $m$  come  $m^{4-D}$ . Per annullare questa dipendenza possiamo definire una funzione  $\lambda$ . Questa funzione rappresenta il cuore della correlazione a quattro punti del sistema, e misura la “non gaussianità” del punto fisso.

$$\lambda \left( \frac{g}{m^{4-D}} \right) = \frac{\Gamma_R}{m^{4-D}}$$

E usare l'approccio diagrammatico per valutare  $\lambda$ . Tuttavia questo approccio fallisce, dando origine a delle quantità che divergono. Per risolvere questo problema si può provare a riparametrizzare. Definiamo la seguente funzione<sup>13</sup>:

$$\left( m^2 \frac{\partial \lambda}{\partial m^2} \right)_g = \frac{\partial \lambda}{\partial \ln m^2} = b(\lambda)$$

La  $b(\lambda)$  è la derivata di  $\lambda$  rispetto al logaritmo di  $m^2$  fatta nel limite  $m \rightarrow 0$ , tenendo fissa la costante di accoppiamento  $g$ .

Siamo interessati al valore di  $\lambda$  per  $m \rightarrow 0$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ):

$$\lim_{m \rightarrow 0} \lambda = \lambda^c$$

$$b(\lambda_c) = 0$$

Il valore critico  $\lambda_c$  è quello che risolve questa equazione. La  $\lambda$  rappresenta come cambia la correlazione a quattro punti al variare di scala.

## 4.5 Sviluppo in $4 - D$

In dimensioni  $D \geq 4$  il punto fisso stabile è di tipo gaussiano, con  $\lambda_c = 0$ . Per dimensioni minori di quattro possiamo pensare di fare uno sviluppo perturbativo.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 4 - D \\ \lambda &= \frac{g}{m^\varepsilon} + A \frac{g^2}{m^{2\varepsilon}} + B \frac{g^3}{m^{3\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Per semplicità definiamo

$$u = \frac{g}{m^{4-D}} \quad (4.12)$$

<sup>13</sup>Spesso nei testi la funzione  $b(\lambda)$  è chiamata  $\beta(\lambda)$ , tuttavia per evitare di confondere ulteriormente la notazione abbiamo adottato la lettera latina, in linea con il testo di Parisi [1].

Calcoliamo la funzione  $b$

$$\left(m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \lambda\right)_g = -\frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{g}{m^\varepsilon} + 2A \frac{g^2}{m^{2\varepsilon}} + 3B \frac{g^3}{m^{3\varepsilon}} \right] \quad (4.13)$$

Possiamo invertire lo sviluppo in  $\lambda$  (4.11):

$$\frac{g}{m^\varepsilon} = \lambda - A\lambda^2 - B(\lambda^3 - 2A)$$

E sostituirlo in  $b$  (4.13)

$$\left(m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \lambda\right)_g = -\varepsilon\lambda + \varepsilon A\lambda^2 + 2\varepsilon(B - A^2)\lambda^3 = b(\lambda) \quad (4.14)$$

Il valore critico si ottiene quando la funzione  $b(\lambda)$  si annulla

$$b(\lambda_c) = 0$$

Fermandoci al secondo ordine otteniamo un'equazione di secondo grado.

$$-\varepsilon\lambda_c + \varepsilon A\lambda_c^2 = 0$$

Una soluzione banale si ha per  $\lambda_c = 0$  (punto gaussiano), ed una non banale in:

$$\lambda_c = \frac{1}{A}$$

Il conto esplicito dei fattori è già stato svolto:

$$A \propto \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) \sim \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.15)$$

Quindi il valore critico di  $\lambda_c$  viene piccolo:

$$\lambda_c \sim \varepsilon$$

Tuttavia se proviamo ad aumentare l'ordine ci accorgiamo che ci sono dei guai, infatti l'equazione per il valore critico ha coefficienti che aumentano in ordine di grandezza:

$$-\varepsilon\lambda + O(1)\lambda^2 + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\lambda^3 = 0$$

Questa situazione è disastrosa, poiché se  $\lambda \sim \varepsilon$  i termini di ordini maggiore di due contribuiscono allo stesso ordine in  $\varepsilon$  di quelli precedenti. Sembrerebbe che lo sviluppo non funziona correttamente.

$$b(\lambda) = -\varepsilon\lambda + b_2(\varepsilon)\lambda^2 + b_3(\varepsilon)\lambda^3$$

$$b_3(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}$$

Tuttavia questa divergenza è legata all'aver esplicitato il calcolo diagrammatico in  $g$ . Se evitiamo di risolvere gli integrali in  $\lambda$ , e proviamo a calcolare direttamente i coefficienti dello sviluppo di  $\lambda$  in  $\varepsilon$  notiamo che i termini divergenti si cancellano a coppie lasciando l'ordine in  $\varepsilon$  del  $k$ -esimo coefficiente pari a 0.

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon + d_2\varepsilon^2 + d_3\varepsilon^3$$

$$d_k \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} O(1)$$

Gli unici diagrammi a sopravvivere sono quelli a *loop*.

Fare lo sviluppo in  $\varepsilon$  vuol dire partire da un punto fisso gaussiano instabile (soluzione  $\lambda_c = 0$ ), muoversi lungo la superficie critica e arrivare al punto fisso stabile. Il percorso viene parametrizzato con  $\lambda$ . Se la superficie critica è *smooth* si può passare da un punto all'altro con uno sviluppo in  $\lambda$  convergente.

Possiamo scrivere direttamente l'espressione per la  $b(\lambda)$  senza passare per la risoluzione degli integrali. La funzione

$$b(u) = m^2 \frac{\partial \lambda}{\partial m^2}$$

Da cui i coefficienti dello sviluppo in  $u = \frac{g}{m^4-D}$  possono essere ricavati applicando l'operatore derivata direttamente ai diagrammi (Figura fig::diagramma::applicato).

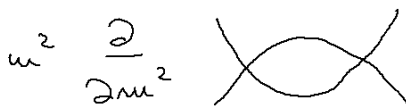


Figura 4.15: Applicazione della derivata al diagramma in  $\lambda$  di ordine più basso. Il risultato è raffigurato in (4.16)

Proviamo ad applicare la derivata per calcolare il termine di ordine più basso dello sviluppo perturbativo:

$$m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \int \frac{d^D k}{(k^2 + m^2)^2} \tag{4.16}$$

$$\partial_{m^2} \frac{1}{p^2 + m^2} = -\frac{1}{(p^2 + m^2)^2}$$

$$m^2 \partial_{m^2} \int \frac{d^D k}{(k^2 + m^2)^2} = -2m^2 \int \frac{d^D k}{(k^2 + m^2)^3}$$

L'applicazione della derivata fa sì che il diagramma originale, divergente in dimensione 4, sia ora convergente, poiché si è alzata di due la potenza del denominatore<sup>14</sup>.

Possiamo cercare di capire cosa succede nel coefficiente di ordine successivo. I diagrammi più interessanti (quelli che presentano la divergenza) sono mostrati in Figura 4.16

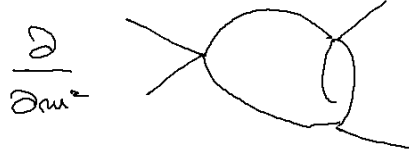


Figura 4.16: Diagramma al terzo ordine in  $\lambda$ . Anche questo può essere derivato rispetto a  $m^2$  per calcolare  $b(\lambda)$ .

$$\text{---} = \frac{1}{p^2 + m^2}$$

$$\text{---}^* = \frac{1}{(p^2 + m^2)^2}$$

Figura 4.17: Per applicare la derivata direttamente ai diagrammi si istituisce la notazione in figura.

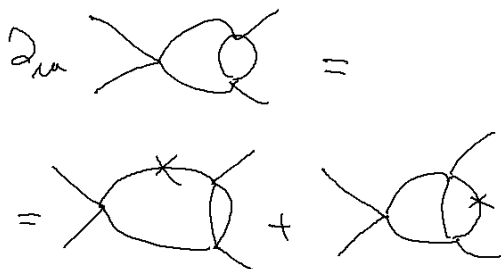


Figura 4.18: Diagramma Figura 4.16 derivato, abbiamo applicato le notazioni specificate in Figura 4.17.

Questi diagrammi (Figura 4.18) hanno una parte di integrazione sul loop divergente (quelli senza crocetta sul secondo loop) per  $D = 4$ .

Tuttavia questi diagrammi costituiscono lo sviluppo in serie della  $b(u)$ , non della  $b(\lambda)$ . Per far convergere il risultato occorre risostituire la funzione  $u(\lambda)$ . Al primo ordine questo può essere visto in modo diagrammatico in Figura 4.19.

In seguito è mostrato il risultato per il coefficiente al terzo ordine in  $\lambda$  della funzione  $b(\lambda)$  per un particolare diagramma divergente (Figura 4.16).

$$b(\lambda) = \int \frac{d^D p}{(p^2 + m^2)^3} \int dk \left[ \frac{1}{(p+k)^2 + m^2} \cdot \frac{1}{(k^2 + m^2)} - \frac{1}{(k^2 + m^2)(k^2 + m^2)} \right] \quad (4.17)$$

Il contributo con il meno nella parentesi viene trasportando lo sviluppo in  $u$  a  $\lambda$  (4.18).

$$g = \lambda \leftarrow \text{diagramma}$$

Figura 4.19: Dobbiamo sviluppare tutto in funzione di  $\lambda$ , quindi bisogna invertire anche la dipendenza di  $\lambda$  dalla  $u$  (eq. 4.12), e quindi dalla  $g$ . In figura è rappresentato il primo ordine. Il risultato è riportato nell'equazione (4.18).

$$u = \lambda + \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D (k^2 + m^2)^2} \quad (4.18)$$

Questo termine (quello con il segno negativo nell'eq. 4.17) cancella l'integrale divergente in  $D = 4$ .

Lo sviluppo perturbativo in  $\lambda$  è detto sviluppo diagrammatico *rinormalizzato*.

Mentre  $g$  è la costante di accoppiamento,  $\lambda$  è la costante di rinormalizzazione.

Anche in questo caso esistono regole diagrammatiche semplici, ed è possibile automatizzare questo calcolo, ottenendo tutti diagrammi convergenti in dimensione 4.

Lo sviluppo rinormalizzato è stato proposto per la prima volta da Feynman alla fine degli anni quaranta, ma la dimostrazione formale della correttezza dello sviluppo a tutti gli ordini ha impiegato più di dieci anni.

La stabilità del punto fisso può essere discussa per via grafica. L'equazione che occorre risolvere è del tipo:

$$b(\lambda) = -(4 - D)\lambda + \lambda^2$$

<sup>14</sup>Questo corrisponde al fatto che il coefficiente  $A$  diverge come  $\frac{1}{\epsilon}$ , però nello sviluppo della  $b(u)$  è moltiplicato per  $\epsilon$  che annulla la divergenza (4.17).

Da cui otteniamo Due punti fissi a seconda di  $D$  un punto fisso gaussiano instabile per  $D < 4$  ma nasce un nuovo punto fisso non gaussiano (Figura 4.20)

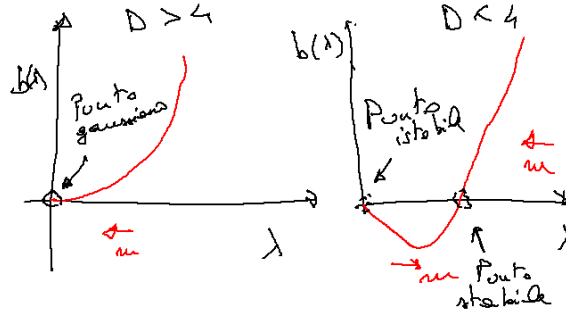


Figura 4.20: Schema dei punti fissi. Sull'asse delle ordinate è presente la derivata di  $\lambda$  rispetto a  $m$ . Per  $b(\lambda)$  negativi  $\lambda$  tende ad aumentare, per  $b(\lambda)$  positivi, tende a diminuire. Da cui segue che per  $D < 4$  il punto fisso gaussiano è instabile.

## 4.6 Calcolo degli esponenti critici

Una volta ottenuto il valore di  $\lambda_c$  bisogna legarlo agli esponenti critici.

L'esponente critico  $\nu$  definisce la divergenza della lunghezza di correlazione:

$$\xi \sim \frac{1}{(T - T_c)^\nu} \quad \xi = \frac{1}{(\mu - \mu_c)^\nu}$$

Possiamo ricondurre questa espressione a  $\lambda_c$ .

$$\xi \sim \frac{1}{m}$$

$$m^2 = (\mu - \mu_c)^{2\nu}$$

Da cui

$$\mu - \mu_c = m^{2\frac{1}{2\nu}}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial m^2} = C m^{2(\frac{1}{2\nu} - 1)}$$

Il fattore  $T - T_c$  non è descritto dalla teoria di rinormalizzazione, infatti la temperatura critica dipende dalla particolare hamiltoniana di partenza. Con questa derivata abbiamo eliminato il fattore  $\mu_c$  che identifica la temperatura critica del sistema, ottenendo una quantità calcolabile con il gruppo di rinormalizzazione.

Ora possiamo legare l'esponente critico a  $\lambda$ :

$$\frac{\partial}{\partial \ln m^2} \ln \frac{\partial \mu}{\partial m^2} = \frac{1}{2\nu} - 1 = -c_2(\lambda)$$

La funzione di sinistra può essere calcolata in teoria delle perturbazioni, ed è indentificata dall'espressione  $c_2(\lambda)$  (cambiata di segno). Per  $m \rightarrow 0$  otteniamo l'espressione al punto fisso.

$$\frac{1}{2\nu} - 1 = -c_2(\lambda_c)$$

Questa quantità è qualcosa proporzionale al primo ordine alla distanza dal punto fisso gaussiano.

Questa funzione  $c_2(\lambda)$  può essere calcolata in teoria delle perturbazioni. Nello stesso modo è possibile definire un'altra funzione che identifica l'esponente  $\eta$ .

$$c_1(\lambda_c) = \eta$$

Sostituendo i valori ottenuti dal conto al primo ordine otteniamo:

$$\lambda_c = \frac{4-D}{3A}$$

$$c_1(\lambda) = 0 \quad c_2(\lambda) = B\lambda$$

Sostituendo  $\lambda_c$ :

$$c_1(\lambda_c) = 0 \quad c_2(\lambda_c) = \frac{4-D}{6}$$

$$\frac{1}{2\nu} = 1 - \frac{4-D}{6}$$

Da cui si ricava l'esponente critico.

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{4-D}{6}\right)}$$

Se ci mettiamo in  $D = 3$  possiamo ottenere le previsioni teoriche (tra parentesi i valori misurati sperimentalmente, o ottenuti dalle simulazioni del modello di Ising in tre dimensioni)

$$\eta = 0(0.3) \quad \nu = \frac{3}{5} = 0.6(0.624)$$

Mentre per  $D = 2$  si ottiene:

$$\eta = 0(0.24) \quad \nu = 0.75(1)$$

In due dimensioni il risultato ha un'approssimazione peggiore rispetto a  $D = 3$ . Questo è ovvio, visto che stiamo facendo uno sviluppo intorno a  $D = 4$ .

La cosa diventa ancora più interessante nel modello con  $N$  componenti, dove ci sono risultati analitici per  $N \rightarrow \infty$ :  $\nu = 1$  e  $\nu = \infty$  rispettivamente a 3 e 2 dimensioni.

Bisogna ripetere i conti per  $N$  gradi di libertà; nei diagrammi appaiono dei fattori di molteplicità differenti. Il risultato finale è:

$$\lambda_c = 3 \frac{4-D}{(N+8)A}$$

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{(4-D)(N+2)}{N+8}}$$

Se facciamo il limite per  $N \rightarrow \infty$  otteniamo:

$$\nu = \frac{1}{2 - (4-D)} = \frac{1}{D-2}$$



Che è proprio il risultato analitico trovato per  $N \rightarrow \infty$ . Quindi ci possiamo aspettare che lo sviluppo  $N \rightarrow \infty$  e  $D \rightarrow 4$  sono entrambi consistenti. Il fatto che ci sia al denominatore  $N + 8$  è una campana di morte per il raggio di convergenza nello sviluppo in  $\frac{1}{N}$ ; Infatti la funzione  $\nu$  presenta un polo, anche se per  $N$  negativi, che rende necessario sviluppare molti ordini prima di ottenere un risultato soddisfacente.

Lo sviluppo perturbativo è stato fatto per  $\varepsilon$  fino al quinto ordine. Recentemente è stato scoperto un nuovo tipo di conti analitici, basati su proprietà di invarianza conformi. In questo modo si riescono a determinare delle disuguaglianze che rendono possibili sono poche regioni nel piano  $\nu$  vs  $\eta$ . All'aumentare dell'ordine della teoria si ottengono nuove disuguaglianze, che restringono via via la regione permessa per  $\nu$  ed  $\eta$ .

Al giorno d'oggi si è arrivati ad una precisione tale da riuscire a restringere la zona consentita all'esponente  $\nu$  ad appena:

$$\nu = 0.63071 \pm 2$$

Non è chiaro se questo metodo possa un giorno fornire un risultato analitico, fissando ad un sol valore  $\nu$  ed  $\eta$ . Non è chiaro neanche se  $\nu$  sia un numero razionale semplice. Attualmente lo sviluppo nei primi cinque coefficienti fatti con il gruppo di rinormalizzazione sembra dare formule che mostrano una certa regolarità, in cui appare la funzione Zeta di Riemann.

La Zeta di Riemann è definita nell'eq. (4.19).

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^x} \quad (4.19)$$

Lo sviluppo di  $\nu$  in  $\varepsilon$  fino al quinto ordine può essere scritto:

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\varepsilon + R\varepsilon^2 + R\zeta(3)\varepsilon^3 + R\zeta(4)\varepsilon^4 + R\zeta(5)\varepsilon^5$$

Dove  $R$  rappresenta un numero razionale semplice.

È possibile che esista una formula semplice per  $\nu$ , ma nessuno per ora è riuscita a inventarsela per ora.

## 4.7 Magnetizzazione Spontanea

Fino a questo momento abbiamo studiato gli esponenti critici al di sopra della temperatura critica. Tuttavia è interessante capire come si comporta il sistema vicino alla transizione di fase anche al di sotto della temperatura critica.

Nel fare questa cosa c'è una piccola difficoltà concettuale, l'hamiltoniana del sistema  $H(\sigma)$  è invariante rispetto a trasformazione  $\sigma \rightarrow -\sigma$ , quindi anche le funzioni di correlazione devono essere invarianti rispetto a questa simmetria (per  $h = 0$ ).

Questo sembra suggerire che  $\langle \sigma \rangle = 0$ . In realtà il sistema anche in assenza di campo magnetico esterno ( $h = 0$ ) a bassa temperatura può avere una magnetizzazione spontanea. Per caratterizzare questo fenomeno devono esistere degli stati termodinamici in cui lo stato fisico non sia invariante per scambio degli spin. Questo fenomeno si chiama rottura spontanea della simmetria.

Ci sono vari modi in cui si può affrontare il problema, aggiungiamo il termine di campo magnetico esterno all'hamiltoniana.

$$H(\sigma) = H_0(\sigma) + \sum_i \sigma_i h$$

In questo caso abbiamo rotto la simmetria direttamente nell'hamiltoniana, e il sistema presenta una magnetizzazione.



Figura 4.21: Schema della magnetizzazione al variare del campo magnetico esterno.

Quindi la magnetizzazione è funzione di  $h$ . Possiamo fare il limite per  $h \rightarrow 0$

$$m(h) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \begin{cases} m & h \rightarrow 0^+ \\ -m & h \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Questo vale solo per volume infinito. Per volume finito questa funzione non presenta un salto, ma è smussata. L'altro modo possibile di misurare la magnetizzazione spontanea consiste nel creare un sistema e imporre come condizione sul bordo spin positivi. C'è magnetizzazione spontanea nel sistema se, nel limite di volume infinito, il valore degli spin al centro conserva memoria delle condizioni al contorno.

Bisogna quindi aggiungere qualcosa che rompe la simmetria. Possiamo anche guardare le funzioni di correlazione:

$$\langle \sigma(x)\sigma(0) \rangle \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & T > T_c \\ m^2 & T < T_c \end{cases}$$

Un modo di definire la rottura spontanea della simmetria è quello di definire che nella fase di bassa temperatura la funzione di autocorrelazione si stabilizza su un valore fissato (Figura 4.22).

È stato dimostrato nel '72 che questi differenti metodi sono completamente equivalenti tra loro.

Se si forma una bolla di magnetizzazione di segno opposto, questa genera un aumento dell'energia libera del sistema: possiamo avere una bolla di magnetizzazione negativa in una situazione in cui gli spin al bordo sono positivi. Proviamo a calcolare l'aumento di energia libera di questa interfaccia. Sia  $r$  il raggio di questa regione, e  $\Sigma$  la sua superficie:

$$\Sigma \propto R^{D-1}$$

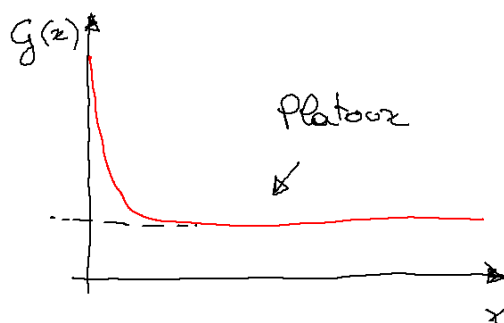


Figura 4.22: Rottura della simmetria generata dal *plateau* della funzione di correlazione.

$$\Delta F = T_s R^{D-1}$$

Dove  $T_s$  è la tensione superficiale. Creare una bolla di magnetizzazione con raggio arbitrariamente grande è impossibile sotto una certa temperatura critica per  $D > 1$ , infatti richiederebbe un aumento di energia libera che aumenta al crescere del raggio della bolla. Questo argomento fallisce in una dimensione, dove l'aumento di energia libera non dipende dal raggio, infatti in una dimensione non abbiamo transizione di fase.

Questo argomento funziona bene nel modello di Ising. Vediamo di ripeterlo per il modello di Heisenberg.

Supponiamo che la magnetizzazione sia costante sulla direzione  $y$ , proviamo a chiederci che succede lungo la direzione  $x$  in un quadrato. Immaginiamo che il vettore di spin sia:

$$\vec{\sigma} = (\cos \theta \quad \sin \theta \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

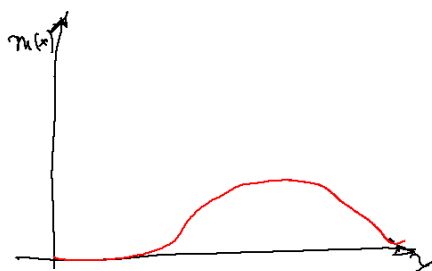


Figura 4.23: Magnetizzazione del sistema in funzione della posizione nel modello di Heisenberg.

In questo caso possiamo passare da uno spin orientato verso l'alto e verso il basso in modo continuo, con una lunghezza che può essere lunga quanto tutto il sistema. Tanto più è smussata la funzione tanto minore è il contributo di interfaccia.

$$\frac{d\varphi}{dx} \sim \frac{1}{L}$$

Dove  $\varphi$  è il campo nella teoria di Landau-Ginzburg.

Prendiamo il termine energetico in approssimazione di campo medio (cinetico)

$$\Delta F \sim \int d^D x (\partial_\mu \tilde{\varphi})^2 = L^{D-1} \int_0^L dx \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$$

Se la derivata va come  $1/L$

$$\Delta F \propto L^{D-2}$$

Mentre il modello di Ising ci dice che per avere una magnetizzazione dobbiamo avere  $D > 1$ , nel modello di Heisenberg bisogna avere  $D > 2$ .

In dimensione 2 o minore un modello tipo Heisenberg non può avere magnetizzazione spontanea. Usiamo il modello di Landau-Ginzburg nella fase di bassa temperatura:

$$H = \int d^D x \left[ \frac{\mu}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 \right] + K$$

Con  $K$  termini cinetici. Possiamo vedere il minimo di questa hamiltoniana effettiva:

$$\mu\varphi + \frac{g}{3!} \varphi^3 = 0$$

Per  $\mu < 0$  ( $T < T_c$ ) otteniamo:

$$\varphi^* = \pm \sqrt{\frac{6|\mu|}{g}}$$

Quando  $\mu < 0$  la funzione ha un minimo in un punto non simmetrico, quindi la simmetria globale del sistema si riflette in termini del fatto che la posizione dei minimi è simmetrica. A questo punto si vede bene l'effetto di  $g$ , infatti nel limite  $g \rightarrow 0$  non esiste più una fase di bassa temperatura.

Il fatto che la magnetizzazione vada come  $g^{-\frac{1}{2}}$  ci fa temere la possibilità di fare uno sviluppo perturbativo in potenze di  $g$ .

Proviamo a sviluppare l'hamiltoniana nella fase a basse temperature attorno al minimo.

$$\varphi(x) = \varphi^* + \tilde{\varphi}(x)$$

La  $\tilde{\varphi}$  rappresenta le fluttuazioni del sistema. Sostituendo nell'hamiltoniana otteniamo tutte le potenze di  $\tilde{\varphi}$  dal secondo al quarto grado.

Il termine cinetico rimane uguale, poiché  $\varphi^*$  è una costante:

$$(\partial_\mu \varphi(x))^2 = (\partial_\mu \tilde{\varphi}(x))^2$$

Il termine quadratico da origine a termini quadratici in  $\tilde{\varphi}$ , mentre quello alla quarta da origine a termini cubici e quartici.

$$\frac{\mu}{2} [\varphi^* + \tilde{\varphi}(x)]^2 + \frac{g}{24} [\varphi^* + \tilde{\varphi}(x)]^4$$

Possiamo vedere questo come un funzionale di  $\tilde{\varphi}(x)$ . I termini lineari di  $\tilde{\varphi}$  sono nulli, perché  $\varphi^*$  è in un minimo della funzione. Vediamo i termini di ordine superiore in  $\tilde{\varphi}(x)$ .

$$\frac{\mu}{2}\tilde{\varphi}^2(x) + \frac{g}{24}\left[6\varphi^{*2}\tilde{\varphi}^2(x) + 4\varphi^*\tilde{\varphi}^3(x) + \tilde{\varphi}^4(x)\right]$$

I termini quadratici sono.

$$\left(\frac{\mu}{2} + \frac{g}{8}(\varphi^*)^2\right)\tilde{\varphi}^2(x)$$

Siamo nella regione  $\mu < 0$

$$\left[\frac{\mu}{2} + \frac{g}{8}\left(-\frac{6\mu}{g}\right)\right]\tilde{\varphi}^2(x) = -\mu\tilde{\varphi}^2(x)$$

A bassa temperatura il coefficiente del termine quadratico rimane positivo anche quando  $\mu$  è negativo, questo ci dice che abbiamo veramente calcolato il minimo. Tuttavia la cosa interessante da notare è che mentre  $\varphi^*$  diverge per  $g \rightarrow 0$  il termine quadratico non diverge. Il termine quartico non dipende assolutamente da  $g$ , l'unico termine che rimane è il termine cubico.

$$4g\sqrt{-\frac{6\mu}{g}}\tilde{\varphi}^3(x) = C\sqrt{\mu}\sqrt{g}\tilde{\varphi}^3(x)$$

Il termine quadratico rimane positivo e aumenta di un fattore 2, il termine quartico rimane uguale, e si aggiunge questo termine cubico. Possiamo fare uno sviluppo perturbativo con diagrammi. Al primo ordine i diagrammi che compaiono sono i due riportati in Figura 4.24.

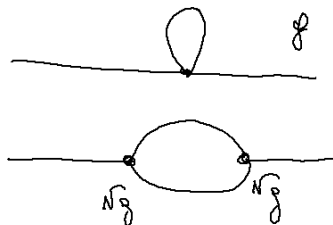


Figura 4.24: Schema dei diagrammi al primo ordine che appaiono nello sviluppo a basse temperature. Rispetto al caso di alte temperature c'è un diagramma in più che viene dal contributo cubico in  $\tilde{\varphi}$ .

Questi due diagrammi descrivono il sistema a bassa temperatura, si è creata una nuova interazione di tipo  $\varphi^3$  con un coefficiente di tipo  $\sqrt{g}$ . Quindi bisogna considerare sia i diagrammi con vertici cubici ( $\sqrt{g}$ ) che quartici ( $g$ ). Al secondo ordine possiamo avere diagrammi differenti, mostrati in Figura 4.25

Il numero di diagrammi aumenta di molto a causa della presenza dei vertici cubici, ma con un po' di pazienza si possono tranquillamente calcolare senza problemi.

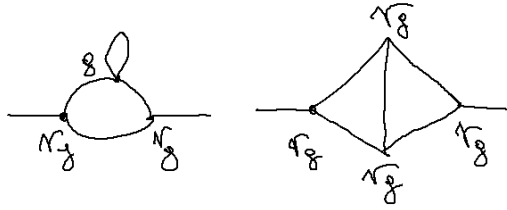


Figura 4.25: Diagrammi a bassa temperatura al secondo ordine.

Possiamo prendere una teoria ad  $N$  componenti e fare lo stesso conto. Nel caso  $N = 3$

$$\vec{\varphi}^* = (0 \quad 0 \quad \varphi^*)$$

Scegliamo la componente non nulla, e possiamo fare lo sviluppo nelle varie componenti. Scriviamo che

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}^* + \tilde{\varphi}(x)$$

Già lo sviluppo perturbativo del modello di Heisenberg ci si accorge che in  $D = 2$  c'è un problema serio

$$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1 \quad \tilde{\varphi}_2 \quad \tilde{\varphi}_3)$$

Il termine quadratico presenterà due diversi coefficienti, a seconda se nella direzione longitudinale ( $\tilde{\varphi}_3$ ) o nelle direzioni trasverse della magnetizzazione spontanea.

$$\mu_T [(\tilde{\varphi}_1)^2 + (\tilde{\varphi}_2)^2] + \mu_L [\tilde{\varphi}_3]^2$$

Dove  $\mu_T$  è il coefficiente delle oscillazioni trasversali mentre  $\mu_L$  è longitudinale. Se si procede al calcolo completo di questi coefficienti si scopre che  $\mu_T = 0$

Se guardiamo la funzione di correlazione otteniamo:

$$\langle \tilde{\varphi}_a(x) \tilde{\varphi}_b(0) \rangle = G_{ab}(x)$$

$$G_{ab} = \begin{cases} 0 & a \neq b \\ G_L & a = b = 3 \\ G_T & a = b \neq 3 \end{cases}$$

Poiché  $\mu_T = 0$  si ottiene

$$G_T(p) = \frac{1}{p^2} \quad G_L(p) = \frac{1}{p^2 + 2|\mu|}$$

Le funzioni trasverse hanno una singolarità a  $p^2 = 0$  quindi le fluttuazioni trasverse hanno sempre una situazione critica. Questo comportamento descrive le onde di spin, piccole oscillazioni negli spin. Dal punto di vista quantistico queste oscillazioni di questi modi di piccolo impulso sono quantizzate, e i relativi quanti si chiamano *magnoni* (*magnions* in inglese).

Se si inizia a fare il conto dei loop si può introdurre una self-energia:

$$G_T(p) = \frac{1}{p^2 + g\Sigma(p)} \quad G_L(p) = \frac{1}{p^2 + 2|\mu| + g\Sigma(p)}$$

Tuttavia si può dimostrare che  $\Sigma(0) = 0$ , la singolarità per  $p = 0$  rimane. Questa singolarità è stata largamente studiata, se abbiamo una teoria che è invariante sotto una simmetria continua, e questa è rotta spontaneamente, ci devono essere delle direzioni in cui si possono fare delle oscillazioni, e causa una singolarità intorno a  $p = 0$  (DA CHIARIRE QUESTO PASSAGGIO).

Ogni volta che la nostra funzione ha un insieme di minimi che hanno la stessa energia (succede quando si rompe una simmetria di variabili continue) la soluzione a simmetria rotta non è un singolo punto ma un intero luogo geometrico (circolare in questo caso). Il potenziale di Landau-Ginzburg ha una forma di cappello messicano. In due dimensioni la nostra teoria perturbativa inizia a fare schifo. La funzione di correlazione diventa:

$$G(x) = \int d^2p \frac{\exp(px)}{p^2} = \infty$$

Anche se si fa il conto con l'analisi dimensionale, anche se si taglia via la singolarità:

$$G(x) \sim \ln x$$

Il risultato viene un termine  $\ln x$  che non si annulla per  $x \rightarrow \infty$ . Questo modello in due dimensioni non può avere magnetizzazione spontanea. Non è detto che tutte le transizioni di fase corrispondono ad una magnetizzazione spontanea. Se  $N > 2$  non c'è transizione. Se  $N = 2$  abbiamo una transizione di fase, ma senza rottura spontanea di simmetria.

$$G(x) \rightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$$

E a  $T < T_c$  otteniamo un comportamento del tipo:

$$G(x) \sim \frac{1}{x^{\eta(T)}}$$

A temperatura sotto la temperatura critica non si crea una magnetizzazione spontanea e la funzione di correlazione continua ad avere un andamento decrescente, che tende a zero per grandi  $x$ .

Il caso  $N = 2$  è anche semplice da realizzare sperimentalmente, possiamo versare su una superficie dell'elio liquido superfluido, Modelli bidimensionali si fanno con film sottili. Per quanto riguarda la magnetizzazione possiamo domandarci qual è la dimensione a cui sparisce. Questa è nota come *lower critical dimension*. Il problema del calcolo degli esponenti è ben definito sopra questa dimensione. Per questi modelli si può fare uno sviluppo perturbativo in

$$D = 2 + \varepsilon$$

Proprio come avevamo fatto lo sviluppo in  $4 - \varepsilon$ . Questo sviluppo purtroppo è davvero terribile:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{N - 2}$$

$$\eta(N = 3, D = 3) = 1(0.03) \quad \text{Modello di Heisenberg}$$

Quindi è terribile come sviluppo, per avere un buon esponente critico bisognerebbe avere un numero molto elevato di termini. Possiamo discutere gli esponenti critici nel piano  $D, N$  (Figura 4.26)

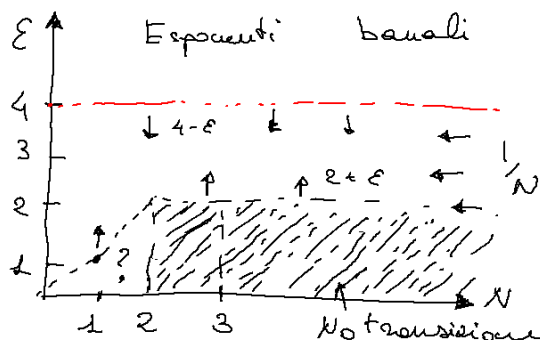


Figura 4.26: Situazione del calcolo degli esponenti critici per  $D$  e  $N$ . C'è un fenomeno di transizione di fase, se la simmetria rotta è discreta non ci sono problemi, altrimenti abbiamo i bosoni di Wolston. Per  $N$  grosso e  $D$  piccolo si ha una transizione di fase (correlazione a lungo raggio) che però non portano alla rottura della simmetria ( $N = 2$ ). Le frecce rappresentano i possibili sviluppi perturbativi per calcolare gli esponenti in questa regione.

## 4.8 Modelli equivalenti per $N = 0$

Immaginiamo di stare nella fase di alta temperatura e prendere una hamiltoniana che abbia la forma.

$$H = - \sum_{ik} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k$$

Possiamo usare lo sviluppo di alta temperatura per calcolare la funzione di correlazione. La dipendenza da  $N$  è molto semplice, e possiamo studiare cosa succede per  $N = 0$ . Esiste un'espressione per la funzione di correlazione

$$\langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle_\beta = \sum_{c \in SA} \beta^{L(c)}$$

Dove  $SA$  è l'insieme dei cammini *self-avoiding-walk*, sono cammini che hanno zero intersezioni con loro stessi. La meccanica statistica dei cammini di intersezione nulla è interessante perché possono essere usati per descrivere polimeri lunghi. Una delle tipiche domande nella *self-avoiding-walk* è come dipende il raggio al quadrato del polimero dalla lunghezza del polimero:

$$\begin{aligned} \langle R^2 \rangle_L &= L & RW \\ \langle R^2 \rangle_L &= L^\omega & \omega = 1.17 \quad \text{SAW} \end{aligned}$$

Se ci mettiamo sul reticolo nel limite  $N = 0$ , generiamo solo cammini che si autoevitano, quello che succede è che l'esponente  $\omega$  viene praticamente uguale a

$$\omega = 2\nu$$



$$\nu(N = 0) = \frac{\omega}{2}$$

Il risultato interessante è che  $N = 0$  corrisponde ai polimeri. Anche  $N = -1$  può essere ricollegato ad una situazione fisica.

Mentre ci siamo concentrati su modelli di spin di tipo ising o ferromagnetici, ci sono tante possibili generalizzazioni. Una delle generalizzazioni più interessanti è quella del modello di Poltz. In ising  $\sigma = \pm 1$ . Possiamo utilizzare anche valori di  $\sigma = 0, 1$  e l'hamiltoniana può essere ridefinita come

$$H = - \sum_{ik} \delta_{\sigma_i \sigma_k}$$

Questa è una riscrittura equivalente del modello di Ising. Quello che succede è che si può generalizzare questo modello. Gli spin possono avere tutta una serie di valori fino a valori  $q$ . Quello che succede è che questi spin guadagnano energia in cui gli spin vicini sono dello stesso tipo. Si può partire dal modello di Poltz e fare un'analisi di Landau-Ginzburg, ci saranno anche termini cubici, la cosa interessante è che in questo modello non è tanto quello che succede per  $q$  grandi ( $q = 1$  è il modello di Ising). La cosa interessante è per  $q = 0$ , questo è equivalente al problema della percolazione. C'è una grandissima quantità di modelli di meccanica statistica che hanno rappresentazioni in termini di spin abbastanza strani, che sono equivalenti a modelli differenti. Il bello è che per questi modelli si possono usare le teorie di Landau-Ginzburg e usare il potere del gruppo di rinormalizzazione.

## Capitolo 5

# Considerazioni finali

### 5.1 Rottura spontanea della simmetria

La rottura spontanea della simmetria avviene quando la soluzione d'equilibrio fisico di un sistema presenta un'asimmetria rispetto ad una trasformazione per la quale l'hamiltoniana originale era invariante. Chiaramente, per le leggi di simmetria, l'insieme di tutte le possibili soluzioni d'equilibrio deve essere simmetrico, tuttavia la singola soluzione fisica può non esserlo.

La teoria di Landau-Ginzburg prevede una rottura spontanea (in assenza di campi esterni) della simmetria nella fase sottocritica, presentando dei minimi nell'hamiltoniana per  $\varphi^* \neq 0$ .

Per sistemi bidimensionali un esempio di hamiltoniana con rottura spontanea della simmetria può essere una superficie a cappello messicano (Figura 5.1).

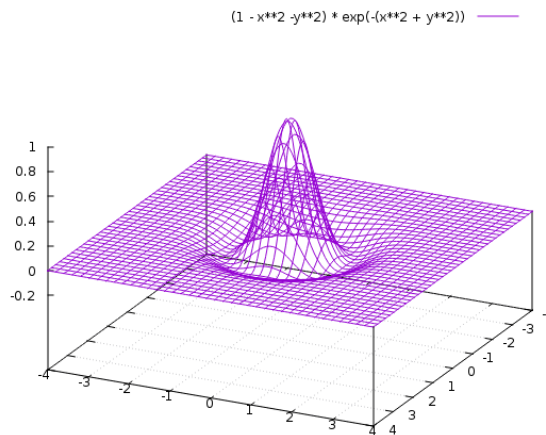


Figura 5.1: Esempio di un potenziale a “cappello messicano”. Il potenziale ha un insieme di minimi che formano una circonferenza, l'equilibrio si troverà su uno di questi minimi, che non è singolarmente una soluzione simmetrica (pur essendo simmetrico l'insieme delle soluzioni).

Una funzione simmetrica sotto un opportuna trasformazione può avere il minimo o in un punto simmetrico, o deve avere tanti minimi connessi tra loro dal gruppo di simmetria della funzione. La rottura spontanea della simmetria avviene in questa seconda situazione.

Il caso più antico di studio di rottura di simmetria fu fatto da Archimede<sup>1</sup>.

Quando c'è una rottura di simmetria possono esserci tantissime soluzioni. Ci si può aspettare che, aggiungendo un campo esterno piccolo, la soluzione asimmetrica scelta dal sistema sia quella allineata al campo esterno (fase di bassa temperatura):

$$f(h) = -|h|m - \chi h^2 = (m + \chi h)h \quad \varphi_a = m \frac{h_a}{|h|}$$

Il fatto che il modello sia invariante per rotazione non vuol dire che tutto il sistema sia invariante per rotazioni, ad esempio il campo esterno può essere diretto in una direzione specifica che rompe la simmetria.

Nella fase di alta temperatura la suscettività lega la soluzione con il campo magnetico.

$$\varphi_a \sim -\chi_L h^2$$

Possiamo scrivere la suscettività fissando il campo magnetico lungo l' $N$ -esima direzione.

$$\chi_{ab} = -\frac{\partial^2 f}{\partial h_i \partial h_b}$$

In caso di  $N$  componenti:

$$h_a = (0 \quad 0 \quad \dots \quad h) \quad h = h_N \neq 0$$

Abbiamo una direzione fissata nel campo magnetico e  $N - 1$  dimensioni in cui il sistema rimane simmetrico. L'espressione finale è

$$\chi_{ab} = [\chi_L \delta_{aN} + \chi_T (1 - \delta_{aN})] \delta_{ab}$$

In presenza di un campo magnetico esterno possiamo parlare di due suscettibilità, una suscettibilità longitudinale (risposta in magnetizzazione lungo la direzione del campo magnetico esterno), e una suscettibilità trasversa (risposta in magnetizzazione rispetto a perturbazioni del campo magnetico lungo una direzione ortogonale).

$$\chi_T(h) = -\frac{m}{|h|}$$

Quando il campo esterno tende a zero la suscettività trasversa diverge. questo perché la magnetizzazione è nella direzione del campo magnetico esterno. Più è piccolo il campo magnetico esterno maggiore è la orientabilità degli spin.

Se prendiamo la teoria di campo medio e iniziamo a fare uno sviluppo perturbativo a zero loop il risultato finale è che il propagatore  $G_{ab}(p)$  diventa:

$$G_{ab}(p) = \delta_{ab} \delta_{aN} G_L(p) + (1 - \delta_{aN}) G_T(p)$$

---

<sup>1</sup>Il fisico greco studiava il galleggiamento di un ellissoide di rotazione. Se l'ellissoide affonda presenta una soluzione simmetrica stabile in cui l'asse è verticale, se invece l'ellissoide galleggia abbiamo una rottura spontanea della simmetria, in cui l'ellissoide si pone con l'asse orizzontale (non simmetrico rispetto a rotazioni), tuttavia ogni rotazione del sistema è a sua volta una soluzione stabile. Archimede studiava questo per il galleggiamento delle navi.

$$G_T = \frac{1}{p^2} \quad h = 0$$

Quindi abbiamo singolarità nella correlazione trasversa:

$$G_T \rightarrow \frac{1}{x^{D-2}} \quad D > 2$$

In due dimensioni abbiamo problemi nella divergenza di queste grandezze. Questo è dovuto al fatto che sotto le due dimensioni non c'è transizione di fase. Per studiare il comportamento di questa grandezza ad ordini superiori si utilizza una teoria diagrammatica, in cui la correlazione longitudinale è indicata da linee dritte, quella trasversa da linee ondulate (Figura 5.2):

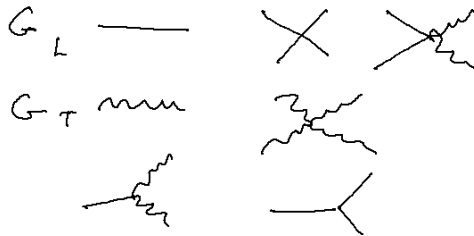


Figura 5.2: Rappresentazioni diagrammatiche delle correlazioni trasverse e longitudinali.

Lo sviluppo in  $G$  corrisponde allo sviluppo nei *loop* dei diagrammi. Ad esempio, all'ordine di zero loop, la funzione di correlazione di quattro linee ondulate è composta da soli due diagrammi mostrati in Figura 5.3.



Figura 5.3: Schema dei diagrammi a zero loop che descrivono la correlazione della funzione trasversa.

Nel limite  $p \rightarrow 0$  il termine lineare di questi diagrammi si cancella generando una dipendenza per piccoli  $p$  di ordine  $p^2$ . Questo fenomeno dà luogo ai *bosoni di Goldstone*, particelle caratterizzate di rottura spontanea della simmetria che tendono a non interagire a bassi impulsi.

Il caso più tipico di rottura della simmetria è la formazione di un cristallo. Un cristallo non è invariante per traslazione, nonostante l'hamiltoniana del sistema lo sia. I bosoni di Goldstone per un cristallo sono proprio i fononi; sono modi di energia estremamente bassa, che possono propagarsi con impulso ed energia arbitrariamente piccoli. La rottura di simmetria porta alla presenza di eccitazioni a impulso zero che creano correlazioni a lungo raggio, che possono essere facilmente studiate con la teoria delle perturbazioni.

In due dimensioni iniziano i dolori, perché il propagatore non è ben definito, e i bosoni di Goldstone producono una divergenza infrarossa nella teoria delle perturbazioni: la transizione di fase sparisce.

## 5.2 Gruppo di rinormalizzazione in matematica

Uno dei successi del gruppo di rinormalizzazione in meccanica statistica è dovuta alla fortuna dello sviluppo perturbativo in  $D = 4 - \varepsilon$  per il calcolo degli esponenti critici nei modelli ferromagnetici.

In Figura 5.4 sono riportati gli sviluppi suggeriti dal gruppo di rinormalizzazione per il calcolo degli esponenti critici.

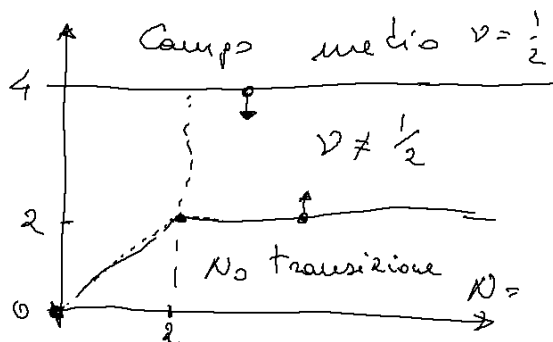


Figura 5.4: Schema degli sviluppi perturbativi possibili per il calcolo degli esponenti critici.

Un altro modello interessante in cui il gruppo di rinormalizzazione è stato applicato con successo è il cosiddetto modello di “animali su reticolo”.

Questo modello consiste nel riempire una griglia con dei cubetti colorati e studiare la geometria delle figure che si formano, è studiabile attraverso una teoria di Landau-Ginzburg equivalente con un'interazione cubica, e la dimensione critica superiore è pari a 8 (quindi lo sviluppo è in  $8 - \varepsilon$ ).

In generale affinché un calcolo usando il gruppo di rinormalizzazione abbia successo è necessario trovare una dimensione critica superiore per il modello (al di sopra della quale valgono le previsioni effettuate dalla teoria di campo medio), per poi fare uno sviluppo perturbativo. Esistono modelli per cui non si è ancora riuscito a trovare l'esistenza di una dimensione critica superiore.

Questa idea del gruppo di rinormalizzazione è stata presa in prestito in tutta una serie di problemi di matematica per altre situazioni in cui ci sono delle leggi di scala.

Un problema che ha avuto notevole successo è il seguente.

Definiamo una successione ricorsiva nel modo:

$$x_{n+1} = 4x_n - ax_n^2 \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

Possiamo chiederci se questo sistema ammette l'esistenza di un punto fisso. Esistono dei valori di  $a$  tale questa successione diventa completamente caotica.

Si può studiare come si passa da una situazione di esistenza di un punto fisso ad una situazione di caos.

Computazionalmente si itera l'equazione e si graficano i valori ottenuti dopo le prime 1000 iterazioni, al variare di  $a$ . Si ottiene un grafico come quello mostrato in Figura 5.5



Figura 5.5: Schema dei punti fissi della successione al variare di  $a$ .

Sono presenti delle biforcazioni, fin quando si arriva alla transizione di fase, in corrispondenza del valore critico  $a^*$ .

Il periodo della successione diverge in corrispondenza della transizione critica con una legge a potenza.

$$a_N \rightarrow a^* + \frac{1}{\nu^\delta}$$

Questo esponente  $\delta$  non dipende dalla particolare forma della successione scelta, ma accomuna un'intera classe di successioni.

Su questo genere di sistema sono stati compiuti alcuni esperimenti termici: si prende una vaschetta d'acqua che viene scaldata da sotto. In presenza di un certo tipo di geometria di riscaldamento si formano dei vortici di convezione. Si può aumentare di poco la temperatura, e questi rotoli iniziano ad oscillare con una data frequenza, aumentando ulteriormente la temperatura queste oscillazioni presentano nuove oscillazioni, si vedono cinque o sei biforcazioni prima della transizione ad una situazione caotica. Gli esponenti critici che misurano il periodo in funzione della temperatura sono consistenti con quelli ottenuti dalle successioni matematiche. Il gruppo di rinormalizzazione è stato usato con successo per spiegare questo genere di fenomeni.

Ci sono tutta una serie di problemi che sono completamente resistenti a conti analitici. Supponiamo di studiare come cresce una superficie quando dei grani di polvere vi si depositano sopra. Questa tende a crescere lungo le direzioni ortogonali. Se il sistema è regolare tende a portarsi ad uno stato piatto. Se però consideriamo dei grani microscopici non puntiformi, anche nel caso stazionario sono presenti piccole oscillazioni. Fino a due dimensioni riusciamo a risolvere

analiticamente il modello. Quando però si arriva a dimensione  $D = 3$ , non si riescono a trovare delle buone tecniche perturbative controllate e sembra che non ci sia nessuna tendenza con l'aumentare delle dimensioni a stabilizzare la soluzione. Nessuno è riuscito a dimostrare l'esistenza della dimensione critica superiore del modello.

### 5.3 Matrici di trasferimento - Soluzione 1D al modello di Ising

Vediamo nel dettaglio la soluzione esatta del modello di Ising 1D (che può essere applicata con qualche astuzia al caso 2D). Prendiamo la funzione di partizione del sistema

$$Z = \sum_{\sigma} \exp \left[ \beta \sum_i (\sigma_i \sigma_{i+1} + h \sigma_i) \right]$$

Definiamo una funzione di una coppia di spin:

$$T(\sigma, \mu) = \exp \left[ \beta \sigma \mu + \frac{\beta}{2} h (\sigma + \mu) \right]$$

La funzione di partizione può essere riscritta attraverso la funzione  $T$  nel seguente modo:

$$Z = \sum_{\sigma} T(\sigma_1, \sigma_2) T(\sigma_2, \sigma_3) \cdots T(\sigma_N, \sigma_1)$$

**Definizione 5.3.1** (Matrice di trasferimento). *Si definisce la matrice di trasferimento di un sistema fisico l'operatore lineare la cui rappresentazione matriciale ha come elementi la funzione  $T$  calcolata nei possibili valori degli spin:*

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T(1, 1) & T(1, -1) \\ T(-1, 1) & T(-1, -1) \end{pmatrix}$$

La funzione di partizione può essere scritta attraverso la matrice di trasferimento.

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} T(\sigma_1, \sigma_2) T(\sigma_2, \sigma_1) &= \sum_{ab} \hat{T}_{ab} \hat{T}_{ba} \\ \sum_{\sigma} T(\sigma_1, \sigma_2) T(\sigma_2, \sigma_3) T(\sigma_3, \sigma_1) &= \sum_{abc} \hat{T}_{ab} \hat{T}_{bc} \hat{T}_{ca} \end{aligned}$$

$$Z_L = \sum_{\sigma} T(\sigma_1, \sigma_2) \cdots T(\sigma_L, \sigma_1) = \sum_{a_1 \cdots a_L} \hat{T}_{a_1 a_2} \cdots \hat{T}_{a_L a_1} = \sum_{a_1} \left( \hat{T}^L \right)_{a_1 a_1} = \text{Tr} \left[ \left( \hat{T} \right)^L \right]$$

$$Z_L = \text{Tr} \left[ \left( \hat{T} \right)^L \right]$$

Poiché  $T(\sigma, \mu)$  è una funzione simmetrica, la matrice di trasferimento è simmetrica, quindi ammette due autovalori reali positivi<sup>2</sup>. Inoltre i due autovalori

<sup>2</sup>Una matrice i cui elementi sono solo numeri positivi è definita positiva.

non possono essere degeneri, perché l'unica matrice degenera in due dimensioni è l'identità (e i suoi multipli). Siano  $t_0$  e  $t_1$  i due autovalori con

$$t_0 > t_1$$

Possiamo metterci nella base che diagonalizza  $\hat{T}$  (la traccia è un invariante per rotazioni) e calcolare la funzione di partizione:

$$Z_L = t_0^L + t_1^L$$

Nel limite  $L \rightarrow \infty$  sopravvive solo l'autovalore di modulo maggiore:

$$\frac{1}{L} \ln Z_L = \ln t_0 + \frac{1}{L} \ln \left[ 1 + \left( \frac{t_1}{t_0} \right)^L \right]$$

Il comportamento ad  $L \rightarrow \infty$  è dato dall'autovalore più alto della matrice di trasferimento, e ci sono degli effetti di bordo che vanno a zero per  $L$  grandi dati dall'autovalore più basso.

La matrice si può diagonalizzare facilmente, e i suoi autovalori sono:

$$t_0 = \cosh \beta \quad t_1 = \sinh \beta$$

$$\frac{t_1}{t_0} = \tanh \beta < 1$$

Ci sono effetti di volume finito che sono più o meno grande a seconda del valore di  $\beta$ .

Le matrici di trasferimento possono essere usate anche per calcolare il valore atteso degli operatori: Se ho una funzione ad uno spin  $A(\sigma_i)$  posso definire un operatore:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A(1) & 0 \\ 0 & A(-1) \end{pmatrix}$$

E calcolare il valore atteso dell'operatore su uno spin con la matrice di transizione:

$$\langle A(i) \rangle = \frac{1}{Z_L} \text{Tr} \left[ (\hat{T})^i \hat{A} (\hat{T})^{L-i} \right]$$

Possiamo estrapolare il calcolo della funzione di correlazione:

$$\langle A(i)A(j) \rangle = \frac{1}{Z_L} \text{Tr} \left[ (\hat{T})^i \hat{A} (\hat{T})^{j-i} \hat{A} (\hat{T})^{L-j} \right] \quad (5.1)$$

Dato  $\sigma_0$  (spin in posizione 0), vogliamo calcolare la sua correlazione con lo spin  $\sigma_M$  (in posizione  $M$ ):

$$\langle \sigma_0 \sigma_M \rangle$$

Possiamo definire un operatore

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Applicando l'equazione (5.1) otteniamo:

$$\langle \sigma_0 \sigma_M \rangle = \frac{\text{Tr} \left[ \hat{\sigma} (\hat{T})^M \hat{\sigma} (\hat{T})^{L-M} \right]}{Z_L}$$



Possiamo usare la notazione di Dirac:

$$\hat{T} |\psi_0\rangle = t_0 |\psi_0\rangle$$

L'operatore  $\hat{T}$  nella rappresentazione di Dirac diventa:

$$\hat{T} = t_0 |\psi_0\rangle \langle \psi_0| + t_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1|$$

Nel limite  $L \rightarrow \infty$  ( $M \ll L$ ) l'ultimo operatore della traccia può essere approssimato trascurando l'autovalore più piccolo.

$$(\hat{T})^{L-M} = t_0^{L-M} |\psi_0\rangle \langle \psi_0| \quad (5.2)$$

Sostituendo nella traccia otteniamo:

$$\text{Tr} \left[ \hat{\sigma}(\hat{T})^M \hat{\sigma}(\hat{T})^{L-M} \right] = \langle \psi_0 | \sigma(\hat{T})^M \hat{\sigma}(\hat{T})^{L-M} | \psi_0 \rangle + \langle \psi_1 | \sigma(\hat{T})^M \hat{\sigma}(\hat{T})^{L-M} | \psi_1 \rangle$$

Il secondo termine è nullo (vedi eq. 5.2).

$$t_0^{L-M} \left( \langle \psi_0 | \sigma | \psi_0 \rangle^2 t_0^M + t_1^M \langle \psi_0 | \sigma | \psi_1 \rangle^2 \right)$$

Dividendo per la funzione di partizione ( $Z_L \rightarrow t_0^L$ ) otteniamo la correlazione:

$$\langle \sigma_0 \sigma_M \rangle = \langle \psi_0 | \sigma | \psi_0 \rangle^2 + \left( \frac{t_1}{t_0} \right)^M \langle \psi_0 | \sigma | \psi_1 \rangle^2$$

La funzione di correlazione è divisa in due parti, la prima che non dipende dalla distanza  $M$  (che è la magnetizzazione residua), più una funzione che decresce esponenzialmente all'aumentare della distanza.

Questo è stato il punto di partenza di Honzager che ha sfruttato le matrici di trasferimento per risolvere il modello di Ising in due dimensioni. Nel suo caso ha scritto le matrici di trasferimento considerando come variabili l'intera riga del sistema bidimensionale (ciascuna matrice era quindi funzione di tutti i possibili valori di spin che può assumere in una riga). Nel limite  $L \rightarrow \infty$  la matrice di trasferimento usata da Honzager diventa infinito dimensionale, rendendo più complicati i conti (ma risolvibili).

Attraverso questo metodo quasi tutti i problemi di meccanica statistica possono essere ricondotto alla risoluzione di problemi di autovalori di operatori lineari.

## 5.4 Moto Browniano

Il moto browniano è stato scoperto intorno al 1828 da Brown, un microscopista, che ha studiato per primo l'agitazione dei grani di polline nel microscopio. Probabilmente molti altri microscopisti avevano visto lo stesso fenomeno ma non avevano mai dato importanza alla cosa. <sup>3</sup>

<sup>3</sup>Anche nella formulazione della meccanica quantistica come integrale sui cammini avvenne una cosa analoga: questa formulazione è stata introdotta da Feynman nel primo dopoguerra. Tuttavia anche Dirac aveva ipotizzato una formulazione della meccanica quantistica con qualcosa che assomiglia all'integrale dei cammini di Feynman, ma aveva discretizzato il tempo e non aveva fatto il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , perché non riteneva la cosa interessante.

Dopo l'uscita della teoria cinetica di Boltzmann si ipotizzò che questo fosse connesso all'agitazione termica degli atomi.

Se si prova a utilizzare grossolanamente la teoria cinetica di Boltzmann si stima una velocità di agitazione dell'ordine:

$$E_c = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$$

Se si misura la velocità in questo modo si ottiene una velocità di sei ordini di grandezza maggiore di quella misurata. Questo rendeva estremamente difficile interpretare il moto. L'idea di Einstein è che il sistema deve essere osservato in una scala di tempo molto maggiore della scala di tempo elementare (il tempo caratteristico tra due collisioni successive degli atomi del fluido) quindi si osserva solo un movimento medio.

Se abbiamo una particella possiamo scrivere un'equazione differenziale che descrive il suo moto (equazione di Langevin):

$$m\ddot{x} = -\eta\dot{x} + F_{ex} \quad (5.3)$$

Abbiamo un termine d'attrito  $\eta$  e una forza esterna  $F_{ex}$ . Esplicitando la dipendenza della massa e del coefficiente di frizione rispetto al raggio dei grani in movimento possiamo stimare quale termine è trascurabile<sup>4</sup>.

$$m \sim R^3 \quad \eta \sim R$$

Nel caso di particelle molto leggere ( $R \rightarrow 0$ ) l'equazione si semplifica e diventa:

$$\eta\dot{x} = F_{ex}$$

La forza esterna viene da un certo numero di collisioni impulsive, in cui ad un dato istante la forza è altissima. Questa equazione è abbastanza semplice da risolvere:

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{\eta} \int_0^t F_{ex}(t') dt' \quad (5.4)$$

Supponiamo di prendere una scala di tempo  $\varepsilon \gg \tau$  con  $\tau$  tempo tipico tra due collisioni successive. Possiamo definire:

$$B(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt' F(t') \quad t_n = n\varepsilon$$

Se l'intervallo di tempo  $\varepsilon$  è molto maggiore dei tempi di collisione, le variabili  $B(t_n)$  (impulso trasmesso alla particella in un tempo  $\varepsilon$ ) sono scorrelate tra loro, e possono essere approssimate come variabili casuali distribuite gaussianamente (teorema del limite centrale).

$$I(t) = \int_0^t F_{ex}(t') dt' = \sum_{n=1}^{\frac{t}{\varepsilon}} B(t_n)$$

$$\langle I(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\frac{t}{\varepsilon}} \langle B(t_n) \rangle = 0$$

<sup>4</sup>La dipendenza del coefficiente di frizione  $\eta$  dal raggio può essere stimata attraverso la legge di Stokes:  $\eta = 6\pi\mu R$  con  $\mu$  coefficiente di viscosità del liquido.

$$\langle I^2(t) \rangle = \left\langle \left( \sum_{n=1}^{\frac{t}{\varepsilon}} B(t_n) \right)^2 \right\rangle = \frac{t}{\varepsilon} \langle B_\varepsilon^2(t_n) \rangle = tC$$

Di tutti i termini al quadrato gli unici che non si cancellano sono le  $B(t_n)$  calcolate a  $n$  uguali<sup>5</sup>.

Il valore atteso del quadrato dell'impulso impresso al granello di polline aumenta linearmente con il tempo. Tornando all'equazione (5.4) possiamo calcolare la distanza quadratica media:

$$\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{\eta} I(t) \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{\eta^2} tC$$

Questo è un fenomeno *diffusivo*, in cui la media del quadrato della distanza percorsa aumenta linearmente con il tempo. Possiamo calcolare la velocità media a cui si muove il grano.

$$v_t^2 = \frac{\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle}{t^2} = \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{t} C$$

$$v_t \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

La velocità che osserviamo dipende dalla scala di tempi con cui mediamo. Se osserviamo il fenomeno in scale microscopiche la velocità media è molto elevata (diverge lentamente per  $t \rightarrow 0$ ), a scale di tempo più grandi (quelle dell'occhio) si osserva una diminuzione della velocità.

L'integrale della forza  $I(t)$  è l'impulso.

$$\frac{dI(t)}{dt} = F(t)$$

Si può dimostrare che le forze sono *delta-correlate*:

$$\langle F(t)F(t') \rangle = C\delta(t - t')$$

Ai matematici questa definizione non piace (la  $F(t)$  dovrebbe essere infinita in ogni punto), conviene pertanto dare una interpretazione discreta:

$$\bar{F}(t_n) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t') dt' = \frac{1}{\varepsilon} B(t_n)$$

Da cui la correlazione è

$$\langle \bar{F}(t_n) \bar{F}(t_m) \rangle = \frac{1}{\varepsilon^2} \langle B(t_n) B(t_m) \rangle = \frac{1}{\varepsilon^2} \delta_{nm} \langle B^2(t_n) \rangle = \frac{C}{\varepsilon} \delta_{nm}$$

La *delta* di Dirac emerge dal limite<sup>6</sup>  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

<sup>5</sup>Le altre sono scorrelate, quindi il valore atteso del prodotto è pari al prodotto dei valori attesi, che sono nulli.

<sup>6</sup>Questo limite serve solo per passare dal discreto al continuo, non ha un vero senso fisico, infatti l'ipotesi di urti scorrelati regge solo per  $\varepsilon \gg \tau$ . Se  $\varepsilon \sim \tau$  non è più vero che la correlazione di due  $B(t_n)$  calcolate in intervalli diversi è nulla.

Fino ad ora abbiamo studiato il moto browniano in assenza di forze esterne. Se però mettiamo le particelle in una provetta e consideriamo la forza peso, queste tenderanno distribuirsi verso il fondo, ma ci saranno alcune particelle che sono sollevate per via del moto browniano. All'equilibrio possiamo definire un potenziale efficace del sistema, ottenuto a partire dalla distribuzione spaziale delle particelle:

$$p(x) \sim \exp[-\beta V_{eff}(x)]$$

Possiamo introdurre una distribuzione spaziale di probabilità che dipende dal tempo, e ottenere un'equazione che ne determina la dinamica.

Inseriamo il potenziale esterno nell'equazione di Langevin (5.3):

$$\dot{x} = -A \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\eta} F(t) \quad (5.5)$$

Vorremmo scrivere un'equazione per  $P(x, t)$ . L'aumento di probabilità di trovare la particella al tempo  $t$  nella posizione  $x$  sarà pari al *flusso* di probabilità entrante in una superficie piccola che circonda quella posizione. Il flusso "uscende" da una superficie infinitesima è la divergenza del campo vettoriale in quel punto. Possiamo scrivere l'equazione per  $P$ :

$$\dot{P}(t, x) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}P) \quad (5.6)$$

Se immaginiamo di avere tante particelle, il campo vettoriale  $\vec{v}P$  rappresenta la corrente del fluido, e la relazione (5.6) diventa l'equazione di continuità:

$$\dot{\rho}(t, x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

Sfruttiamo la linearità dell'equazione per separare il problema in due parti, e risolverli separatamente. La velocità è data dall'equazione 5.5, calcoliamo la soluzione isolando il termine di potenziale, e scrivendo l'equazione di continuità in una dimensione (per semplificare i conti):

$$\dot{P}(x, t) = -\frac{d}{dx} \left( -A \frac{\partial V}{\partial x} P \right) \quad (5.7)$$

Se annulliamo il potenziale esterno stiamo descrivendo un fenomeno diffusivo, con distribuzione di probabilità gaussiana, di valore atteso nullo e varianza nota:

$$\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle = Ct$$

Da cui possiamo scrivere la soluzione per la distribuzione di probabilità

$$P[x(t) - x(0), t] \sim \frac{1}{(Ct)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{(x(t) - x(0))^2}{2ct} \right]$$

Questa soluzione soddisfa l'equazione differenziale parabolica di diffusione:

$$\dot{P}(x, t) = C \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \quad (5.8)$$

Unendo gli operatori differenziali calcolati in presenza di solo potenziale esterno (5.7) e della diffusione (5.8) otteniamo l'equazione differenziale completa.

$$\dot{P}(x, t) = -\frac{d}{dx} \left( -A \frac{\partial V}{\partial x} P \right) + C \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \quad (5.9)$$

La (5.9) è detta equazione di **Fokker-Planck**

Possiamo studiare le soluzioni stazionarie dell'equazione di Fokker-Planck, che rappresenta la configurazione d'equilibrio del sistema.

$$\frac{d}{dx} \left( AP(x) \frac{dV}{dx} + C \frac{dP}{dx} \right) = 0$$

Integriamo e questa quantità diventa costante, che fissiamo arbitrariamente a zero.

$$AP(x) \frac{dV}{dx} + C \frac{dP}{dx} = 0$$

$$A \frac{dV}{dx} + C \frac{dP}{P dx} = 0$$

$$\frac{\partial_x P}{P} = -\frac{A}{C} \partial_x V$$

$$\partial_x (\ln P) = -\frac{A}{C} \partial_x V$$

$$\ln P(x) = -\frac{A}{C} V(x) + \text{cost}$$

Quindi otteniamo una distribuzione di probabilità di Boltzman in cui

$$\beta = \frac{C}{A}$$

$A$  è un termine di viscosità che può essere calcolato analiticamente, abbiamo espresso la costante di diffusione in funzione della temperatura.

Attraverso il moto Browniano è stato possibile calcolare la costante di Boltzmann. Fino alla fine dell'ottocento c'erano varie persone in fisica che non credevano nell'esistenza degli atomi. Dal 1900 al 1910 furono misurati, con tecniche sperimentali indipendenti, il numero di avogadro e la costante di Boltzman. Il fatto che queste tecniche dettero tutte lo stesso risultato convinsero i fisici dell'esistenza degli atomi. Einstein dette tre contributi in questo senso: la sua tesi sulla pressione osmotica, il lavoro sul moto browniano e il lavoro sulla radiazione di corpo nero.

Lo studio del corpo nero permise di misurare la costante di Boltzmann con grande precisione.

Il fenomeno di diffusione genera una distribuzione all'equilibrio che può essere interpretata come l'effetto di un potenziale efficace, che può essere ottenuto giocando matematicamente con il termine diffusivo nell'equazione di Fokker-Planck:

$$\partial_x^2 P = \partial_x \partial_x P = \partial_x \left[ P(x) \frac{1}{P} \partial_x P \right] = \partial_x [P(x) \partial_x \ln P]$$

Il risultato finale è che si può definire un potenziale efficace Browniano nel seguente modo:

$$V_{eff}(x) = V(x) + C \ln P(x)$$

Con questo potenziale l'equazione di Fokker-Planck diventa un'equazione di continuità dove c'è un'energia addizionale che dipende dal logaritmo della probabilità. Se nel sistema sono presenti molti grani (non interagenti) la funzione  $P(x)$  corrisponde alla densità, e il termine aggiuntivo corrisponde proprio all'energia osmotica.

In questo studio siamo partiti da un'equazione stocastica (Langevin), per ottenere un'equazione deterministica nella distribuzione di probabilità.

## 5.5 Simulazioni numeriche

Concludiamo il corso con un breve excursus sulle tecniche numeriche per studiare il modello di Ising.

Supponiamo di avere un sistema di Ising da  $N = 100^3$  elementi, e vogliamo sapere l'energia interna del sistema con una parte su  $10^5$ .

La somma su tutte le configurazioni è impossibile da fare. Possiamo immaginare di fare degli sviluppi perturbativi, ma non è detto anche con tanti termini siano abbastanza convergenti da vedere quello che succede.

L'idea di base è quella di usare delle simulazioni numeriche per generare le configurazioni su cui poi calcolare i valori attesi degli osservabili che ci interessano.

Possiamo fare un'evoluzione su questo sistema in modo tale che il valor medio statistico dell'energia sia pari a

$$\sigma(t) \rightarrow \langle H \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^t H(\sigma(t_n))$$

In questo modo dobbiamo avere una regola di evoluzione dinamica in modo tale da fare le medie sulla dinamica piuttosto che le medie statistiche. Dal punto di vista computazionale la formulazione di Boltzmann è disastrosa (il numero di possibili configurazioni è troppo grande). Dal punto di vista della dinamica basta fare la media temporale a tempi molto grandi.

La scala di tempi può essere più grande o più piccola. Si possono fare scelte di dinamica. Se vogliamo studiare la dinamica di un gas potremmo voler prendere l'equazione del gas e integrare l'equazione del moto  $F = ma$ .

L'altra possibilità è di scrivere equazioni come quelle di Langevin, o equazioni di altro tipo che devono avere la proprietà fondamentale che la distribuzione di probabilità a tempi grandi deve essere la distribuzione di probabilità all'equilibrio.

Le simulazioni numeriche sono un campo di indagine estremamente grande.

Il vantaggio delle simulazioni è che possiamo ottenere dei dati molto difficili da ottenere sperimentalmente. Ad esempio misurare la magnetizzazione di un sistema in 4 dimensioni non è possibile.

Un algoritmo usato per le simulazioni numeriche è il Montecarlo. C'è un suggeritore  $S$  che propone un cambio di configurazione. Questo suggeritore deve agire in modo simmetrico, in modo che la probabilità di fare un cambio deve essere la stessa di tornare indietro.

$$S(\sigma \rightarrow \sigma') = S(\sigma' \rightarrow \sigma)$$

Ossia deve esserci un suggeritore che fa mosse simmetriche, questo permette di esplorare tutto lo spazio delle fasi. La probabilità che la mossa suggerita da  $S$  sia accettata è data dalla distribuzione di Boltzmann. Se il cambiamento è tale da diminuire l'energia viene accettato, altrimenti è accettato solo con una probabilità  $\exp(-\beta\Delta H)$ .

Si può misurare l'energia media sulle configurazioni generate, e estrapolare il valore all'infinito:

$$\langle H \rangle_t = \langle H \rangle_\infty + \frac{C}{\sqrt{t}}$$

# Bibliografia

- [1] G. Parisi, Statistical Field Theory, Westview Press, 1998.
- [2] L. Monacelli, Appunti di fisica dei sistemi complessi, <http://lorenzomonacelli.altervista.org/Documenti/Download.html>, 2015.
- [3] Michael Mitzenmacher, A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions, Internet Math. 1, 226 (2003)