

Appunti di Ottica non lineare e quantistica

Lorenzo Monacelli

26 maggio 2015

Indice

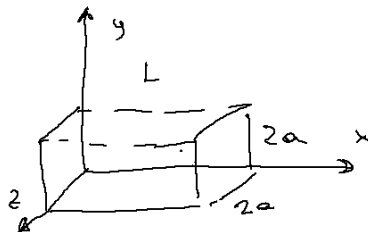
1	Modi gaussiani	3
1.1	Modi gaussiani	6
1.2	Propagazione di fasci gaussiani	10
1.3	Modi di Hermit-Gauss	14
1.4	Uso delle matrici ABCD per sistemi di lenti ottiche	17
2	Formazione del fascio laser	19
2.1	Equazione di Block ottica	27
2.2	Allargamenti	30
2.2.1	Allargamento radiativo	30
2.2.2	Power Broadening	32
2.2.3	Collisioni atomiche	33
2.2.4	Allargamento doppler	34
2.2.5	Tempi caratteristici	35
2.3	Comportamento di un laser	36
2.3.1	Contributo termico all'emissione stimolata	36
2.3.2	Emissione laser	38
2.3.3	Comportamento del sistema laser a 3 e 4 livelli	44
2.3.4	Equazioni del laser a tre livelli	48
2.4	Microlaser	53
2.5	Cenni sull'ingegneria del laser	54
2.6	Mode Locking	55
2.7	Propagazione di un impulso ottico	56
3	Ottica non lineare	61
3.1	Polarizzazione non lineare	63
3.1.1	Oscillatore di Lorentz anarmonico	65
3.2	Simmetrie	69
3.3	Three wave mixing	71
3.3.1	Sum frequency Generation	76
3.3.2	Difference Frequency Generation	81
3.3.3	Generazione di seconda armonica	83
3.4	Phase-Matching	87
3.5	Misure di impulsi ultracorti	90
3.6	Effetti del terzo ordine	94
3.7	Parametric Down Conversion	97
3.7.1	Tecniche di poling per il phase-matching	102
3.8	Effetti del terzo ordine non parametrici	104

3.8.1	Self-Focusing	105
3.9	Birifrangenza indotta	108
4	Ottica quantistica	110
4.1	Coerenza al primo e al secondo ordine	110
4.2	Teoria classica del Beamsplitter	112
4.2.1	Funzione di correlazione al primo ordine	114
4.3	Fluttuazioni di intensità	116
4.3.1	Coerenza al secondo ordine	118
4.4	Quantizzazione del campo elettro magnetico	119
4.4.1	Operatori elettromagnetici	125
4.5	Rappresentazione di interazione	127
4.6	Emissione spontanea	127
4.6.1	Emissione	133
4.6.2	fotomoltiplicatore	134
4.6.3	Emissione spontanea in microcavità	136

Capitolo 1

Modi gaussiani

Prendiamo in esame la cavità a specchi piani e paralleli, rappresentata come la scatola di lati $2a$ e lunghezza L



Dobbiamo tenere conto delle condizioni al contorno. Le frequenze dei modi possibili all'interno di una scatola, con condizioni periodiche al bordo, sono del tipo:

$$\nu = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{n}{L} \right)^2 + \left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{l}{2a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Questo risultato si trova discretizzando i vettori d'onda della cavità. Nel caso in cui la cavità sia aperta lateralmente avremo un considerevole ammontare di perdite per diffrazione. Di conseguenza gli indici l e m sono piccoli rispetto a n (il vettore d'onda deve avere piccole componenti trasverse per non uscire fuori dalla cavità risonante): $(l, m) \ll n$. In questa approssimazione possiamo sviluppare ν in serie

$$\nu \approx \frac{c}{2} \left[\frac{n}{L} + \frac{1}{2} \frac{l^2 + m^2}{n} \frac{L}{4a^2} \right]$$

Questa approssimazione corrisponde ad ammettere che L è macroscopica rispetto a λ , quindi n fatalmente è molto grande¹. Questo ci permette di capire come si differenziano i vari tipi di modi all'interno di un risonatore: modi

¹ $L = n\lambda$

longitudinali e modi trasversali. I modi longitudinali sono quelli che si riferiscono all'indice n . Per vedere i modi longitudinali ci mettiamo a parità di l ed m , e variamo n . Calcoliamo $\Delta\nu_n$ quando n salta di un'unità. Nel caso di un Fabri-Perot $\Delta\nu$ è pari proprio al free-spectral-range.

$$\Delta\nu_n = \frac{c}{2L}$$

Questi sono proprio i modi longitudinali.

Mettiamo ora invece che $l = n$, e facciamo lo stesso ragionamento variando m di un unità:

$$\Delta\nu_m = \frac{cL}{8na^2} \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

Questi sono i modi con componente trasversale. Mentre Δn dipende esclusivamente dalla lunghezza, Δm invece dipende sia da L che da a .

Si può fare una stima di queste grandezze, considerando grandezze ordinarie macroscopiche si ottiene come ordini di grandezza:

$$\Delta\nu_n \sim 100 \text{ MHz} \quad \Delta\nu_m \sim 1 \text{ MHz}$$

Questi modi sull'asse delle frequenze sono rappresentati in Figura 1.1.

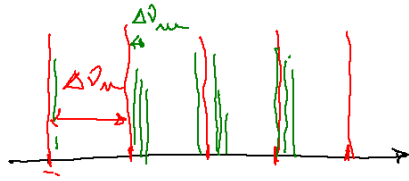


Figura 1.1: Modi longitudinali sono maggiormente distanziati (in rosso) di quelli trasversali.

Abbiamo i soliti modi longitudinali, affiancati da una famiglia di modi trasversali per ciascun modo longitudinale. In linea di principio questi sono distinti in frequenza tra di loro, tuttavia ci sono sempre effetti di perdite², ed è presumibile che la larghezza del singolo modo longitudinale copra la maggior parte dei modi trasversali.

In generale questi modi sono chiamati TEM (Transfers Electro-Magnetic) ed si indicano con $TEM_{l,m}$ (n non viene indicato perché è molto grande).

A seconda della simmetria del problema i modi TEM sono espressi da diverse funzioni, in genere non analitiche. Un caso particolare è dato dai modi gaussiani (risolvibili analiticamente), il cui modo ad avere un profilo realmente gaussiano sul piano $x y$ è il $TEM_{0,0}$.

²Una perdita si traduce in un termine di dumping che mi allarga la riga spettrale del modo.

Se vogliamo fare una valutazione più rigorosa dobbiamo applicare la teoria della diffrazione, l'integrale di Kirckoff-Fresnel, con condizioni al contorno di un risonatore. Si parte da un punto P_1 sulla superficie dello specchio 1, l'onda si propaga arriva sullo specchio 2, a questo punto si studia la diffrazione prodotta dallo specchio 2 su un punto P_2 e ritorno. Se la situazione converge allora la soluzione è stabile e stazionaria (al netto delle perdite). Se la soluzione non converge allora la soluzione è di tipo instabile. Si possono trovare situazioni particolari (come nel caso di una cavità confocale) in cui la soluzione che si trova è analitica, e questa è esattamente il modo gaussiano.

Possiamo definire un parametro adimensionale che viene chiamato parametro di Fresnel

$$N = \frac{a^2}{\lambda L}$$

a è la dimensione degli specchi, λ è la lunghezza d'onda, L è la distanza tra gli specchi. Questo parametro può essere riscritto come

$$N = \frac{a}{\lambda} \frac{a}{L}$$

Il termine $\frac{a}{\lambda}$ può essere visto come l'inverso di un angolo di diffrazione, il termine $\frac{a}{L}$ è l'inverso dell'angolo di accettazione (di visuale dello specchio).

Il valore di N è un indicatore di quali approssimazioni possono essere utilizzate, ad esempio l'approssimazione di Fronhofer (campo lontano) corrisponde ad avere angoli di accettazione molto grandi in modo da avere alta sensibilità ($N \ll 1$).

Il caso di specchi piani paralleli non ammette soluzioni di tipo analitico. La cavità a specchi piani paralleli è al limite tra cavità stabile e instabile³.

Nelle Figura 1.2 e Figura 1.3 sono mostrati due modi trasversi di questa cavità (soluzioni numeriche).

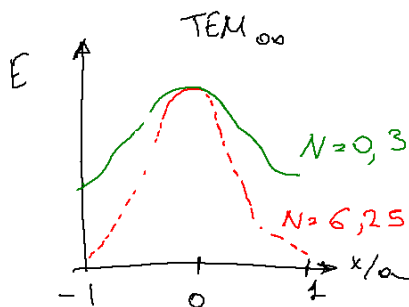


Figura 1.2: Campo elettrico per una configurazione trasversale TEM_{00} nella cavità a specchi piani e paralleli.

³Infatti la cavità con specchi convessi genera soluzioni stabili, quella con specchi concavi genera soluzioni instabili. Lo specchio piano può essere visto come uno specchio sferico a raggio infinito, è quindi caso limite tra specchio concavo e convesso.

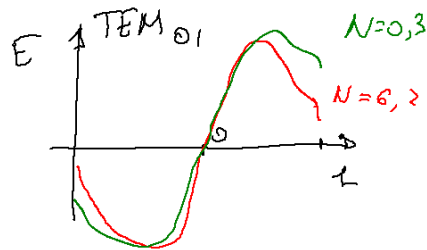


Figura 1.3: Campo elettrico per una configurazione trasversale TEM_{10} nella cavità a specchi piani e paralleli.

Si può notare che i modi trasversi di ordine crescente sono più larghi e hanno perdite maggiore. Inoltre a parità di modo per N maggiore le perdite si riducono.

Per una cavità confocale i modi sono esattamente i modi gaussiani. Qualitativamente le cose vanno allo stesso modo. Le sezioni trasverse dei primi due modi gaussiani sono riportate in Figura 1.4 e Figura 1.5.

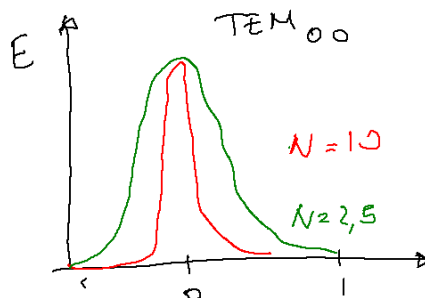


Figura 1.4: Primo modo gaussiano pari in una cavità confocale (TEM_{00}).

Due specchi sferici che si trovano alla giusta distanza preservano il modo, infatti è più stretto rispetto agli specchi piani, a parità di N .

1.1 Modi gaussiani

I modi gaussiani sono una particolare famiglia di configurazioni del campo che appartiene alla famiglia di onde parassiali. I raggi parassiali sono quei raggi che si propagano ad angolo piccolo. Le onde parassiali partono da onde piane con una divergenza limitata. In questa approssimazione possiamo andare a riscrivere le equazioni di Helmholtz.

Invece di avere una semplice onda piana usiamo come soluzione dell'equazione di Helmholtz un involuppo del campo che dipende da $U(r)$:

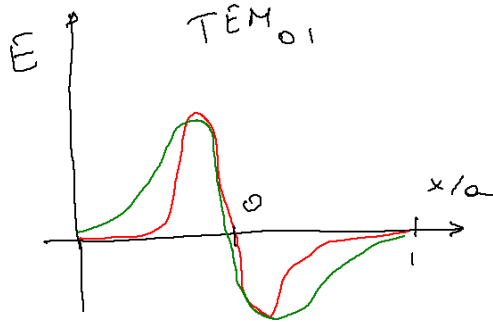


Figura 1.5: Primo modo gaussiano di ordine dispari in una cavità confocale (TEM_{01}).

$$U(x, y, z) = A(\rho)e^{-ikz} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Inseriamola nell'equazione di Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) U(\vec{r}) = 0$$

Facciamo qualche approssimazione:

$$\Delta z = \lambda \implies \Delta A \ll A$$

Questo è un modo di dire che l'ampiezza varia poco (SVEA) all'interno di una singola lunghezza d'onda:

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial z} \Delta z$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} = \frac{Ak}{2\pi}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA$$

La stessa cosa si può fare per la derivata seconda di A :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A$$

$$\nabla^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

Le soluzioni che vogliamo considerare sono onde in cui il fronte d'onda forma un piccolo angolo rispetto a zero. Un'onda parabolica è tale per cui:

$$A(\rho) = \frac{A_i}{z} e^{-ik \frac{\rho^2}{2z}}$$

L'onda gaussiana è scritta in una forma molto simile:

$$A(\rho) = \frac{A_i}{q(z)} e^{-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}}$$

$$q(z) = z + iz_0$$

Questa è la soluzione di un risonatore fatto con specchi sferici.

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0}$$

Dividendo in parte reale e parte immaginaria possiamo definire:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

Dove è facile trovare la relazione che lega $w(z)$ a z e z_0

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad w_0 = \sqrt{\frac{z_0 \lambda}{\pi}}$$

$w(z)$ rappresenta la larghezza sul piano xy del modo (che si allarga all'aumentare di z), w_0 si chiama beam waste.

Possiamo dare una forma più completa del modo gaussiana:

$$U(r) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{-ikz - i \frac{k\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)}$$

$$A_0 = \frac{A_i}{iz_0}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$$

$R(z)$ è il raggio di curvatura del fronte d'onda.

Il fascio gaussiano è intermedio tra onda piana e onda sferica. Anche nella formula abbiamo una fase di un'onda piana e^{-ikz} e di un'onda sferica $e^{-ik\rho^2/(2R(z))}$

$$\zeta(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}}$$

Le calcolare l'intensità ovviamente si perdono tutti i fattori di fase.

Nel momento in cui confino un'onda piana in una sezione gioca la diffrazione e deve allargarsi, quindi l'onda gaussiana si allarga. Se si allarga è evidente che anche l'intensità di picco deve diminuire quindi si sparpaglia.

Il fuoco della lente è una regione dello spazio finito che dipende da λ e dalla focale, e trasversalmente ha una sezione w_0 . La presenza di una sezione trasversale dipende dal fatto che è presente la diffrazione. Questo comporta conseguenze dal punto di vista della risoluzione spaziale dei microscopi.

$2w_0$ è lo spot size,

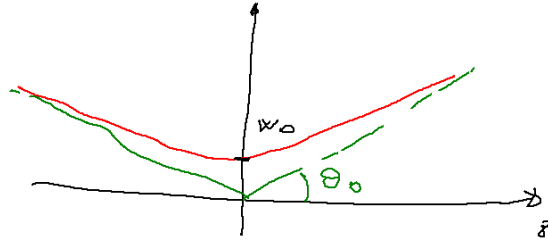


Figura 1.6: Larghezza del fascio al variare di z .

$$z = z_0 \quad w(z) = \sqrt{2}w_0$$

$$z \gg z_0 \quad w(z) \sim w_0 \frac{z}{z_0}$$

$$w(z) \sim \theta_0 z$$

$$\theta_0 = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

$$2z_0 = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda}$$

Questo è detto parametro confocale. Prendiamo la lunghezza d'onda del laser He-Ne, e un bel laserone dal diametro di 2 cm:

$$\lambda = 633 \text{ nm} \quad 2w_0 = 2 \text{ cm}$$

Con questi dati otteniamo

$$2z_0 = 1 \text{ km}$$

Supponiamo di aver focalizzato il laserino con una lente di corta focale:

Il fuoco di una lente può essere pochi micron.

$$2w_0 \approx 20 \mu\text{m}$$

La singola fibra ottica può essere del diametro di pochi micron. Siamo in grado di far entrare i modi gaussiani di questo tipo all'interno delle fibre ottiche che lo accettano. In questo caso il parametro confocale diventa:

$$2z_0 = 1 \text{ cm}$$

Tanto più piccola è la lunghezza tanto maggiore sarà la diffrazione.

Rimane da parlare degli altri termini. La curvatura $R(z)$ (Figura 1.7).

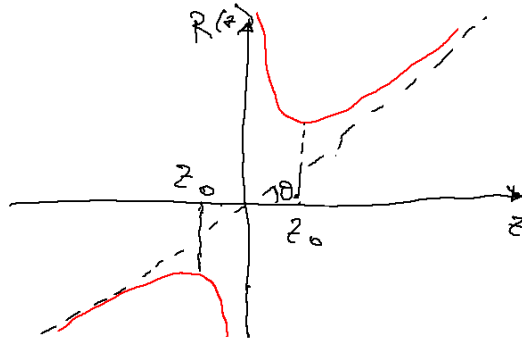


Figura 1.7: Grafico della funzione della curvatura del fronte d'onda di un fascio gaussiano.

Nell'origine del modo gaussiano abbiamo un'onda piana (il raggio di curvatura diverge). Lontano il raggio di curvatura cresce linearmente con z (onda sferica). A z_0 avviene la transizione tra i due reggimi.

I termini di fase che rimangono sono tre, abbiamo uno di un'onda piana, uno di un'onda sferica. Il termine di fase che è $\zeta(z)$ va come l'arco tangente (Figura 1.8):

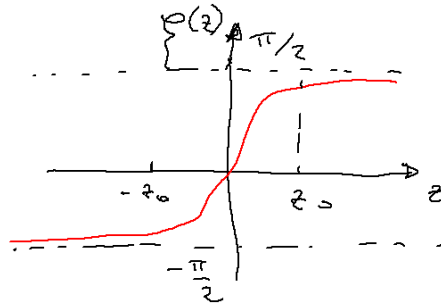


Figura 1.8: Grafico della funzione di fase $\zeta(z)$.

Il fascio laser è un fascio gaussiano, inoltre il fascio gaussiano ha la divergenza più bassa, è quello che concentra maggiormente il segnale ed è quello più conveniente per iniettare il fascio sulla fibra ottica. La sezione più piccola è quella più bassa, l'indea è quella di avere un modo perfettamente confinato.

1.2 Propagazione di fasci gaussiani

Il più semplice oggetto lineare con cui può interagire un fascio gaussiano è una lente. Abbiamo un fascio gaussiano che viene da sinistra e incontra una lente che altera il fronte d'onda. Quando il fascio si porta all'estremo della lente, arriverà sul fronte con un raggio di curvatura R e una larghezza W . Usciranno

dalla lente differenti caratteristiche W' e R' , avremo quindi una nuova distanza focale z'_0 , reale o immaginario (Figura 1.9).

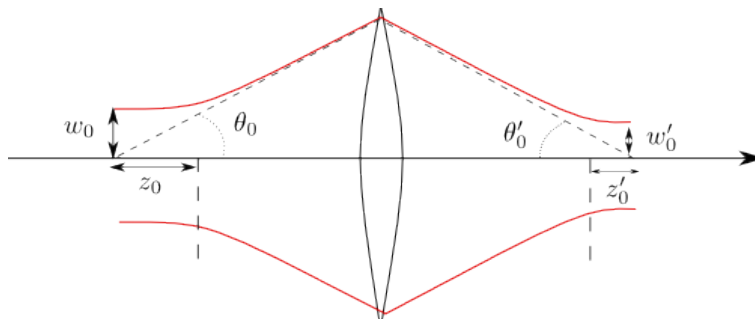


Figura 1.9: Come cambiano i parametri dei fasci gaussiani nell'attraversare una lente sottile.

$$kz + \frac{k\rho^2}{2R} - \zeta \longrightarrow kz + \frac{k\rho^2}{2R} - \zeta - \frac{k\rho^2}{2f}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}$$

Si prende $R > 0$ se l'onda incidente diverge, $R' < 0$ se l'onda uscente è convergente.

Il waste del raggio cambia con la seguente espressione:

$$w'_0 = Mw_0$$

Il centro di emissione del fascio è dato dalla relazione:

$$z' - f = M^2(z - f)$$

Dove z è la distanza dal centro del fascio (il punto in cui il fascio è più stretto) alla lente.

La larghezza della focale del fascio diventa:

$$2z'_0 = M^2(2z_0)$$

E l'angolo di divergenza:

$$\theta'_0 = \frac{\theta_0}{M}$$

Dove per comodità abbiamo definito il parametro M in questo modo:

$$M = \frac{M_r}{\sqrt{1 + r^2}}$$

$$M_r = \left| \frac{f}{z - f} \right|$$

$$r = \frac{z_0}{z - f}$$

Queste relazioni si riconducono a quelle dell'ottica geometrica con le opportune approssimazioni: Che succede quando un'onda piana arriva sulla lente? Si focalizza in un punto ad una distanza uguale alla focale. Un altro caso particolare che possiamo ricavare è la legge di Gauss per raggi parassiali:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z'}$$

Questo vale per l'ottica geometrica, che vale quando la regione focale è un punto, non una cintura. Poiché un punto emette onde sferiche, devo mettere la lente dove vede solo onde sferiche, quindi molto lontano. In questo caso ritrovo l'ottica geometrica e la relazione di Gauss.

Procediamo a dimostrare queste cose:

Andiamo a vedere cosa succede in caso di approssimazione di ottica geometrica. Lavoriamo in termini di raggi, la dimensione focale (z_0) deve essere puntiforme in questa approssimazione, perché la lente deve vedere solo raggi sferici. Questo equivale ad imporre:

$$z - f \gg z_0 \quad \longrightarrow \quad r \ll 1$$

$$M = M_r = \left| \frac{f}{z - f} \right|$$

Da cui segue

$$z' - f = M_r^2(z - f) = \frac{f^2}{z - f}$$

$$(z' - f)(z - f) = f^2$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z'}$$

Abbiamo ricavato l'equazione di Gauss per l'ottica geometrica. La trattazione dei modi gaussiani porta come conseguenza direttamente alla legge di Gauss, nota dell'ottica geometrica.

L'altro caso interessante è quello in cui la lente si trovi direttamente sul waste, come mostrato in Figura 1.10.

È facile dimostrare in questo caso che:

$$z = 0$$

$$w'_0 = \frac{w_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{r}\right)^2}}$$

$$z' = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_0}\right)^2}$$

L'approssimazione di onde piane la si ottiene imponendo che la dimensione focale del fascio sia molto lunga ($z_0 \gg f$), come mostrato in Figura 1.11.

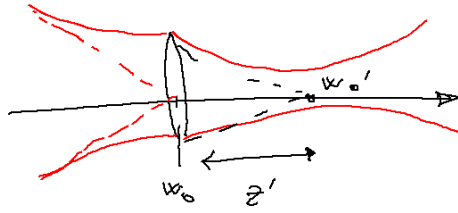


Figura 1.10: Lente che agisce su un onda piana.

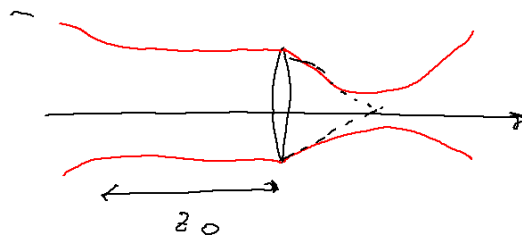


Figura 1.11: Caso di onde piane incidenti sul fascio.

Questo è un fascio fortemente collimato. Se ci facciamo i conti un questo caso si ottiene

$$w'_0 = \frac{f}{z_0} w_0$$

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w'_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0} f \\ z' = f \end{array} \right.$$

Come si può vedere l'onda viene focalizzata proprio sul fuoco della lente (come ci aspettavamo). Inoltre la sezione trasversa del fascio nel fuoco può essere confrontata con la grandezza data dalla diffrazione di un apertura circolare (di diametro d) per un onda piana:

$$\frac{d}{2} = \frac{1.22\lambda}{\frac{D}{2}} f \quad w'_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0} f$$

Molto simile a quella di un modo gaussiano, la differenza è data dal fatto che stiamo prendendo in considerazione un fascio gaussiano (infatti l'1.22 viene dalla particolare geometria del problema).

Moltissimi problemi nell'ottica vengono trattati attraverso lo studio di modi gaussiani. I fenomeni ottici non lineari, poiché dipendono dall'intensità del campo, dipendono fortemente da come un certo campo laser viene focalizzato. Se il modo non è gaussiano, o è una sovrapposizione incoerente di più componenti, non siamo in grado di controllare le dimensioni del fuoco, e di conseguenza non siamo in grado di massimizzare l'accoppiamento di questo modo all'interno di una fibra ottica.

Il fuoco del modo gaussiano ha un waste di (D è il diametro dell'apertura da cui il fascio viene focalizzato)

$$w_0 = \frac{2 \lambda f}{\pi D}$$

Da cui si può ricavare la lunghezza del fuoco ($b = 2z_0$):

$$b = \frac{f \lambda f^2}{\pi D^2}$$

Questa lunghezza del fuoco dipende quadraticamente dal rapporto f/D .

Ovviamente tutte le considerazioni fatte per la lente possono essere ripetute anche per uno specchio, facendo attenzione a considerare i corretti segni di f e R .

1.3 Modi di Hermit-Gauss

Il modo gaussiano che abbiamo trattato fino ad ora è il modo $TEM_{0,0}$ all'interno della cavità, è possibile scrivere un'espressione analitica generalizzata per tutti

i *TEM* che risolvono la cavità a specchi sferici confocali, e parlare anche dei modi di hermit-Gauss.

Partiamo dallo scrivere l'ampiezza complessa del fascio gaussiano:

$$A_g(x, y, z) = \frac{A_1}{q(z)} e^{-ik \left[\frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right]}$$

$$q(z) = z + iz_0$$

In questa espressione abbiamo esplicitato solo la dipendenza di A da z , per esplicitare anche la sua dipendenza dalle variabili trasverse x e y , riscriviamola introducendo le funzioni \mathcal{H} e \mathcal{Y} in questo modo (conveniente per i conti):

$$A(x, y, z) = \mathcal{H} \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] \mathcal{Y} \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] e^{i\eta(z)} A_g(x, y, z)$$

Dove A_g è la normale ampiezza gaussiana. Questa onda ha la stessa fase dell'onda gaussiana, apparte un eccesso di fase che è rappresentato dalla $\eta(z)$ indipendente da x e da y . Se $\eta(z)$ è lentamente variabile in z la curvatura è praticamente inalterato. Quello che sarà cambiata è la distribuzione di intensità. Questo modo non sarà più gaussiano, ma avrà lo stesso fronte d'onda e divergenza angolare del modo gaussiano.

Una funzione di questo tipo deve rispettare l'equazione di Helmholtz.

$$\nabla_T^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

Dove con ∇_T^2 abbiamo inteso il laplaciano rispetto alle sole coordinate trasversali (x e y). Della derivata seconda in z usando la SVEA e seplificando con l'altro termine dell'equazione di Helmholtz rimane l'altro termine.

possiamo scrivere separatamente i tre pezzi nelle tre variabili indipendenti (dove abbiamo diviso tutto per $\mathcal{H}\mathcal{Y}A_g e^{i\eta}$).

$$\frac{1}{\mathcal{H}} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right) + \frac{1}{\mathcal{Y}} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial v} \right) + vw^2(z) \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$u = \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \quad v = \frac{\sqrt{2}y}{w(z)}$$

Siccome l'equazione precedente deve annullarsi, possiamo definire due pezzi μ_1 e μ_2 , in modo da riscrivere l'equazione precedente in questo modo:

$$-2\mu_1 - 2\mu_2 + 2(\mu_1 + \mu_2) = 0$$

Questa espressione con l'equazione (1.1) si ottiene:

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{H}}{du^2} + u \frac{d\mathcal{H}}{du} = \mu_1 \mathcal{H}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{Y}}{dv^2} + v \frac{d\mathcal{Y}}{dv} = \mu_2 \mathcal{Y}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda z_0}{\pi} \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \frac{d\eta}{dz} = 2\mu_1 + 2\mu_2$$

Avendo esplicitato la funzione $w(z)$.

Come si può vedere le equazioni per \mathcal{H} e per \mathcal{Y} sono formalmente identiche. Possiamo interpretare queste equazioni come equazioni agli autovalori.

La soluzione di questa equazione può essere fatta per serie, dove si trova sia la relazione che devono soddisfare gli autovalori (positivi) che le relazioni ricorsive che definiscono le mie soluzioni:

$$\mu_1 = l = 0, 1, 2, \dots \quad \mu_2 = m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{H}_{l+1} = 2u\mathcal{H}_l(u) - 2l\mathcal{H}_{l-1}(u)$$

Queste relazioni ricorsive sono esattamente quelle che definiscono i polinomi di Hermite.

La funzione \mathcal{Y} avrà esattamente la stessa soluzione (in variabile v). Se sostituiamo nella terza equazione le soluzioni trovate otteniamo l'espressione per il fattore di fase $\eta(z)$:

$$\eta(z) = (l + m) \underbrace{\zeta(z)}_{\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)}$$

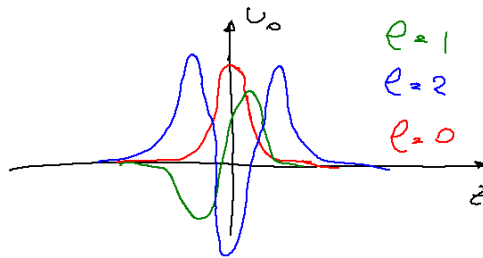
L'espressione finale di un modo di Hermit-Gauss diventa quindi:

$$U_{l,m}(x, y, z) = A_{lm} \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] G_l \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] G_m \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] e^{-ikz - ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + i(l+m+1)\zeta(z)}$$

Dove:

$$G_l(u) = H_l e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Quando l e m sono entrambi pari a zero ritroviamo esattamente il modo gaussiano. Quando però sono positivi abbiamo il modo gaussiano modulato attraverso i polinomi di hermit. Avremo funzioni pari o dispari, simmetriche o antisimmetriche.



Supponiamo di prendere un modo di questo fascio e lo proiettiamo su una telecamera. Il risultato dell'emissione laser è circolare se il modo è gaussiano $TEM_{0,0}$, forma via via strutture più complicate all'aumentare di l e m . Mano a mano che si aumenta il valore di l e m la sezione del fascio si allarga progressivamente. Il modo gaussiano di ordine più basso è quello più confinato vicino

all'asse, ed è quello con divergenze più bassa. In un effetto di diffrazione dovuto alla presenza degli specchi del risonatore, queste perdite saranno tanto più rilevanti quanto maggiori sono l e m . Introducendo opportune perdite di diffrazione siamo in grado di uccidere gli ordini di Hermit-Gauss superiori, riuscendo a isolare il modo gaussiano di ordine minore. Attraverso un pin-hole di dimensione opportuna vogliamo impedire la propagazione degli impulsi gaussiani di ordine maggiore di 1, altrimenti la sovrapposizione caotica ed incoerente di più modi gaussiani rende molto difficile trattare analiticamente il campo, e porta spesso ad effetti sgraditi.

1.4 Uso delle matrici ABCD per sistemi di lenti ottiche

Tanttandosi di onde parassiali la trattazione dei raggi che abbiamo conosciuto con la matrice ABCD, la si può applicare con opportuni aggiustamenti anche ai modi gaussiani, quindi questo è uno strumento utile quando ci si trova a dover predire l'evoluzione di un certo modo gaussiano attraverso un sistema comunque complesso.

Dato un sistema di raggi possiamo trattare un sistema ottico attraverso una matrice 2x2: la prima componente (r) rappresenta il vettore con coordinate trasversale, la seconda (r') la tangente dell'angolo attraverso il sistema ottico:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r_2 = Ar_1 + Br'_1 \\ r'_2 = Cr_1 + Dr'_1 \end{cases}$$

Dai raggi possiamo passare ad una situazione di onda parassiale (Figura 1.12).

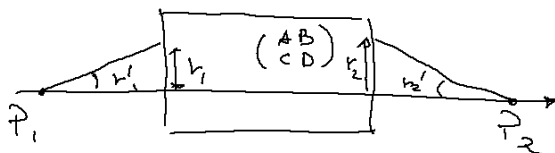


Figura 1.12: Matrici ABCD.

I raggi di curvatura del sistema possono essere ottenuti facendo il rapporto tra r ed r' :

$$\begin{cases} R_1 = \frac{r_1}{r'_1} \\ R_2 = \frac{r_2}{r'_2} \end{cases}$$

$$\frac{r_2}{r'_2} = \frac{Ar_1 + Br'_1}{Cr_1 + Dr'_1} = \frac{A\left(\frac{r_1}{r'_1}\right) + B}{C\left(\frac{r_1}{r'_1}\right) + D}$$

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}$$

Questo vale per sorgenti del campo puntiforme (onde sferiche). Abbiamo un'unica equazione che ci dice come diventa il raggio di curvatura di una sfera dopo il passaggio attraverso la matrice $ABCD$.

Possiamo riscrivere questa equazione nel caso di fasci gaussiani, aggiungendo alla curvatura una parte immaginaria:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

Dove ricordiamo le definizioni già date all'inizio del capitolo:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda z}{\pi w_0^2}}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0}{\lambda z} \right)^2 \right]$$

$$q(z) = q_0 + z$$

$$\frac{1}{q_0} = -i\frac{\lambda}{\pi w_0^2}$$

$$\exp \left[-i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R} + \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right] = \exp \left[-i\frac{k(x^2 + y^2)}{2q} \right]$$

Da cui la trattazione di modi gaussiani può essere ricondotta ad una trattazione delle onde sferiche, e usare la matrice $ABCD$ sostituendo q al posto di R :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Capitolo 2

Formazione del fascio laser

Discutiamo il processo di emissione di un laser, ricavando i coefficienti di Einstein in modo formale a partire dalle equazioni della meccanica quantistica (in approssimazione semiclassica).

Stiamo considerando un sistema a due livelli, con energie rispettivamente E_1 ed E_2 , come mostrati in Figura 2.1

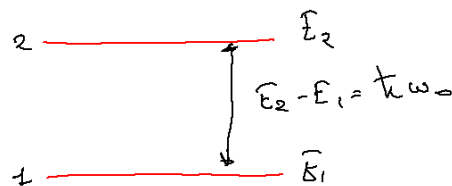


Figura 2.1: Schema a livelli di un mezzo attivo per il laser.

Sia il numero totale di elettroni dato da:

$$N_t = N_1 + N_2$$

Definiamo il parametro N in questo modo (ci sarà utile in seguito)

$$N = N_2 - N_1$$

La statistica di Boltzmann fa sì che in condizioni di non eccitazione il livello 1 sia completamente popolato e il livello 2 sia spopolato.

In questo sistema possono avvenire tre fenomeni. La presenza del campo può generare un processo di emissione, detto l'emissione stimolata, o di assorbimento. L'emissione può avvenire anche in maniera spontanea, in assenza di un campo esterno (i processi sono riassunti in Figura 2.2)

Partiamo dall'equazione d'onda di Schroedinger:

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

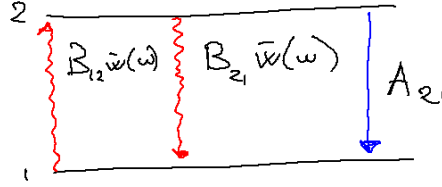


Figura 2.2: Processi di interazione radiazione-materia in un sistema a due livelli.

Il sistema isolato, in assenza di radiazione elettromagnetica, ammette le seguenti soluzioni stazionarie:

$$\psi_n(r, t) = \psi_n(r) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

$$\hat{H}_E \psi_n(r) = E_n \psi_n(r)$$

Se gli stati sono due avremo due funzioni d'onda ψ_1 e ψ_2 :

$$\begin{cases} \hat{H}_E \psi_1(r) = E_1 \psi_1(r) \\ \hat{H}_E \psi_2(r) = E_2 \psi_2(r) \end{cases}$$

In presenza di una radiazione elettromagnetica l'hamiltoniana totale diventerà:

$$\hat{H} = \hat{H}_E + \hat{H}_I(r, t)$$

La presenza di questo termine aggiuntivo mi impedisce la formazione di soluzioni stazionarie, tuttavia, poiché ψ_1 e ψ_2 sono una base del mio spazio vettoriale, la funzione d'onda finale sarà combinazione lineare dei miei stati:

$$\psi(r, t) = c_1(t) \psi_1(r, t) + c_2(t) \psi_2(r, t)$$

La normalizzazione deve essere tale che:

$$\int |\psi(r, t)|^2 dV = |c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$$

Le funzioni ψ_1 e ψ_2 sono ortonormali. Sostituiamo questa espressione nell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo e otteniamo¹:

$$H_I(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = i\hbar(\dot{c}_1 \psi_1 + \dot{c}_2 \psi_2)$$

Moltiplichiamo per ψ_1^* e integriamo su tutto lo spazio

$$c_1 \int \psi_1^* \hat{H}_I \psi_1 dV + c_2 e^{-i\omega_0 t} \int \psi_1^* H_I \psi_2 dV = i\hbar \frac{dc_1}{dt}$$

¹Abbiamo sfruttato il fatto che ψ_1 e ψ_2 sono autofunzioni di H_0 con autovalore E_i , quando si applica H_0 a destra, e si deriva la ψ a sinistra questi termini si cancellano a vicenda, e rimangono solo i termini scritti.

Definiamo con il simbolo:

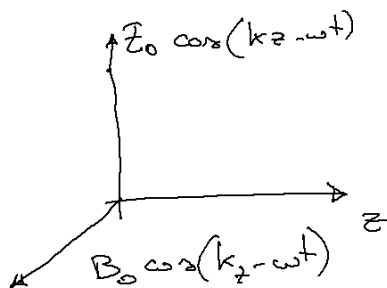
$$\int_{12} = \int \psi_1^* \hat{H}_I \psi_2 dV$$

$$c_1 \int_{11} + c_2 e^{-i\omega_0 t} \int_{12} = i\hbar \frac{\partial c_1}{\partial t}$$

In maniera del tutto analoga possiamo ottenere l'altra equazione:

$$c_1 e^{i\omega_0 t} \int_{21} + c_2 \int_{22} = i\hbar \frac{\partial c_2}{\partial t}$$

Risolvere queste equazioni corrisponde a trovare c_1 e c_2 , e risolvere il problema generale.. Bisogna a questo punto entrare nel merito e dire chi è l'hamiltoniana di interazione. Abbiamo un atomo che interagisce con un campo. Il sistema è indentato sui tre assi:



Il raggio dell'atomo di Bhor è molto minore della lunghezza d'onda λ del campo nel visibile. Dovremo quindi trovare il momento di dipolo elettrico:

$$\vec{D} = \sum_j \vec{r}_j$$

Abbiamo considerato un sistema di riferimento in cui l'onda piana che investe il nostro sistema ha vettore d'onda \vec{k} diretto lungo l'asse z . Il campo elettrico oscilla lungo la direzione x con intensità $E_0 \cos(kz - \omega t)$. Possiamo trascurare la parte trasversale del campo (che abbiamo trattato nel dettaglio nello scorso capitolo) perché la lunghezza di Bhor è molto minore della lunghezza d'onda, per cui il campo che arriva sull'atomo è sostanzialmente un fronte d'onda piano.

Il momento di dipolo generato dal campo è:

$$-e\vec{D}$$

Dove \vec{D} è lo spostamento del baricentro della nube elettronica rispetto al nucleo carico positivamente:

$$\vec{D} = \sum_{j=1}^z \vec{r}_j$$

Da cui l'hamiltoniana di interazione è:

$$\hat{H}_I = eDE_0 \cos(\omega t)$$

Per come è definita questa hamiltoniana è dispari². I termini lungo la diagonale del sistema quindi hanno un valor medio del momento di dipolo nullo.

$$\int_{11} = \int_{22} = 0$$

Questo implica che rimangono solo i termini incrociati. D'altro canto i termini ψ_1 e ψ_2 hanno parità opposta, da cui:

$$\int_{12} = \int_{21}^*$$

Possiamo scrivere questi integrali:

$$\int_{12} = eE_0 \frac{X_{12}}{\hbar} \cos \omega t$$

$$X_{12} = \int \psi_1^* x \psi_2 dV$$

Dove con il termine X_{12} l'elemento di matrice del vettore \vec{D} (in questo caso proiettato sull'asse delle x).

Qui compare una grandezza che ha le dimensioni di una frequenza, in generale una grandezza complessa:

$$\nu = \frac{eE_0 X_{12}}{\hbar}$$

Questa frequenza cambia con l'intensità del campo. Possiamo riscrivere le equazioni in c_1 e c_2 esplicitando gli integrali:

$$\begin{cases} \nu \cos \omega t e^{-i\omega_0 t} c_2 = i \frac{dc_1}{dt} \\ \nu^* \cos \omega t e^{i\omega_0 t} c_1 = i \frac{dc_2}{dt} \end{cases}$$

Possiamo risolvere queste equazioni per ricavare il coefficiente di assorbimento (il coefficiente B_{12}) che tiene conto della transizione di un sistema atomico da un livello all'altro.

Per ricavare B_{12} abbiamo bisogno di ristabilire delle condizioni iniziali. Al tempo $t = 0$ la condizione iniziale è che:

$$c_1(0) = 1 \quad c_2(0) = 0$$

Il modulo quadro di questi coefficienti è la probabilità di trovare l'atomo in un istante t nel livello scelto. Parleremo di probabilità o di rate (probabilità divisa per l'unità di tempo).

Attraverso ragionamenti di tipo fenomenologico si può scrivere un'equazione che permette di ragionare in termini di intensità dei campi e delle popolazioni dei livelli:

$$\frac{dN_2}{dt} = \underbrace{B_{12}w(\omega)}_{\text{assorb.}} + \underbrace{B_{21}w(\omega)}_{\text{emiss. stim.}} + \underbrace{A_{21}}_{\text{emis. spont.}}$$

²Invertendo il campo, si inverte il momento di dipolo D .

Benché questa equazione permetta di dare una descrizione di tipo fenomenologica al processo di emissione laser, non dà tutte le informazioni a cui siamo interessati: in particolare descrivendo il sistema a partire dalle intensità si perdono informazioni sulla fase del campo, impedendoci di ricavare le relazioni di coerenza.

La cosa interessante è andare a vedere quando il campo a frequenza ω interagisce con il sistema di frequenza ω_0 , possiamo vedere effetti di coerenza e detuning, e si produce uno scambio di informazione (ed energia) tra un oscillatore che rappresenta il campo e quello che rappresenta l'oscillazione.

Useremo questa equazione fenomenologica solo per ricavare formalmente i coefficienti di Einstein.

Risolviamo le equazioni in c_1 e c_2 . Andiamo al primo ordine della teoria perturbativa, e integriamo rispetto al tempo. Supponendo che $c_1(t) = 1$ (ordine zero, sistema imperturbato), otteniamo:

$$c_2(t) = \frac{\nu^*}{2} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_0 + \omega)t}}{\omega_0 + \omega} + \frac{1 - e^{-i(\omega_0 + \omega)t}}{\omega_0 - \omega} \right]$$

Data questa espressione della $c_2(t)$ si può sostituire questa espressione nell'equazione che determina $c_1(t)$, ottenendo un valore più esatto:

$$c_1(t) = 1 + |\nu^*|^2 f(t)$$

In generale quello che otteniamo è che la $c_1(t)$ è una serie di potenze pari della frequenza ν , mentre c_2 è una serie di potenze dispari.

La frequenza ν è proporzionale a E_0 , possiamo ricollegare E_0 al termine di intensità del campo presente nell'equazione di Einstein in questo modo:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \int \bar{w}(\omega) d\omega$$

La teoria di Einstein dell'equazione del bilancio si ferma al primo ordine. Le equazioni fenomenologiche trascurano gli effetti di ordine superiori. Possiamo porci il problema di come devono essere ω e ω_0 .

Fino ad ora non abbiamo detto molto, soltanto che il salto è perfettamente monocromatico, ma abbiamo supposto sia il campo che la larghezza di banda dei livelli energetici come monocromatica. Questa condizione non è molto interessante, in quanto ci impedisce di trattare gli effetti di detuning. La condizione interessante c'è quando $\omega \sim \omega_0$. Cominciamo con il considerare la transizione atomica come monocromatica (gli stati atomici hanno vita media infinita), e un campo con una certa larghezza di banda $\Delta\omega$ non nulla. Se consideriamo ω differente da ω_0 , qual è il tempo caratteristico di una transizione atomica? Normalmente questo va dai 10^{-7} ai 10^{-9} secondi. Invece la ω del campo è dell'ordine di 10^{14} . Questo significa che

$$\omega_0 t \gg 1$$

Prima che ci sia un sensibile cambiamento nella $c(t)$ avvengono moltissime oscillazioni del campo. Nei due termini della c_2 possiamo quindi buttare quello che appare con il denominatore $\omega_0 + \omega$. Questo termine è sicuramente trascurabile rispetto all'altro in caso di perfetta risonanza $\omega = \omega_0$; in realtà questa approssimazione prende il nome di RWA (Rotating Wave Approximation), e

dipende dal fatto che i due termini oscillanti della c_2 (gli esponenziali al numeratore) oscillano in direzioni opposte, e quando si integra uno dei due termini è trascurabile. Affronteremo meglio il discorso sulla RWA più avanti:

$$c_2(t) \approx \frac{\nu^*}{2} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{\omega_0 - \omega} \right]$$

$$c_2(t) \approx \frac{\nu^*}{2} \left[\frac{1 - \cos[(\omega - \omega_0)t] - i \sin[(\omega_0 - \omega)t]}{\omega_0 - \omega} \right]$$

In condizioni di quasi risonanza posso sviluppare il coseno al primo ordine.

$$c_2(t) \approx -i \frac{\nu^*}{2} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t]}{\omega_0 - \omega}$$

$$c_2(t) \approx -\frac{i\nu^*}{2} \frac{2 \left[\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \right]}{\omega_0 - \omega}$$

Anche qui possiamo eliminare il coseno (che al primo ordine vale 1)

$$c_2(t) \approx -i\nu^* \frac{\sin\left[(\omega_0 - \omega)\frac{t}{2}\right]}{\omega_0 - \omega}$$

$$|c_2(t)|^2 \approx |\nu^*|^2 \frac{\sin^2\left[\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right)t\right]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

Infine sviluppiamo anche il seno al primo ordine:

$$|c_2(t)|^2 \approx |\nu^*|^2 \frac{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right)^2}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

Abbiamo ottenuto il comportamento della probabilità che uno stato eccitato sia popolato cresce per piccoli t in modo quadratico.

$$|c_2(t)|^2 \propto t^2 \quad t \rightarrow 0$$

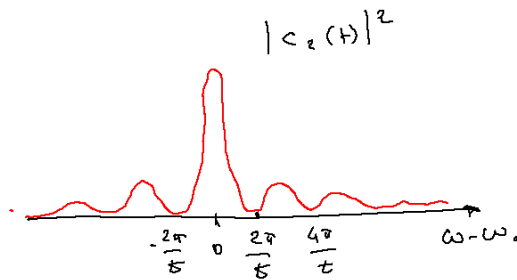


Figura 2.3: Probabilità che avviene una transizione, a t fissato, al variare di ω .

Cosa succede se $\omega - \omega_0$ non è più trascurabile (oppure t è molto grande)?
In questo caso possiamo scrivere l'area sottesa dalla curva in ω (Figura 2.3)

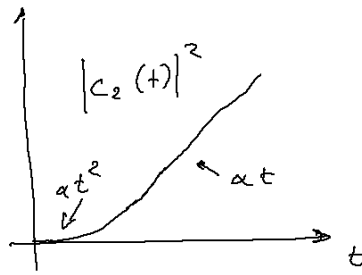


Figura 2.4: Probabilità di avere una transizione, a ω fissato, al variare di t (con $\omega - \omega_0$ molto piccolo).

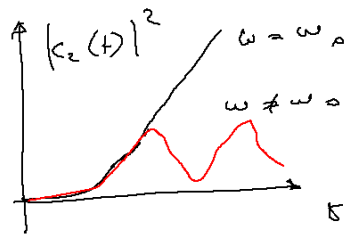


Figura 2.5: Probabilità di avere una transizione, a ω fissato, al variare di t (con $\omega - \omega_0$ grande).

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \left[(\omega - \omega_0) \frac{t}{2} \right]}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega = \frac{\pi t}{2}$$

È facile verificare che all'aumentare di t questo picco si stringe; nel limite che va ad infinito di t otteniamo una delta di dirac:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \left[(\omega - \omega_0) t \right]}{(\omega - \omega_0)^2} = \frac{\pi}{2} t \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.1)$$

Se vogliamo ricavare l'espressione della B_{12} , bisogna tenere conto della relazione tra E_0 e w

$$E_0^2 = \frac{2}{\varepsilon_0} \int \bar{w}(\omega) d\omega$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{2e^2 |X_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar^2} \int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} d\omega \bar{w}(\omega) \frac{\sin^2 \left[(\omega_0 - \omega) t \right]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

Dove abbiamo attribuito un'incertezza $\Delta\omega$ al campo. La $w(\omega)$ può essere supposta costante per semplicità su questo intervallo:

$$|c_2(t)|^2 = \frac{2e^2 |X_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar^2} \bar{w}(\omega_0) \int \frac{\sin^2 \left[(\omega - \omega_0) t \right]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

Il risultato dell'integrale è

$$\int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} \frac{\sin^2 \left[(\omega - \omega_0) t \right]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega = \begin{cases} \frac{1}{4} t^2 \Delta\omega & t\Delta\omega \ll 1 \\ \frac{1}{2} \pi t & t\Delta\omega \gg 1 \end{cases}$$

Il primo risultato può essere facilmente ottenuto sviluppando al primo ordine il seno, il secondo ricordando la formula (2.1). Ecco spiegata la transizione dal regime in t^2 in regime t al crescere di t .

Poiché nella trattazione di Einstein siamo interessati a capire cosa avviene a t grandi, prendiamo questa forma della probabilità di transizione.

$$|c_2(t)|^2 = \frac{2e^2 |X_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar^2} \bar{w}(\omega_0) \frac{1}{2} \pi t$$

A questo punto siamo in grado di ricavare il coefficiente B_{12} . Poiché questo è il rate di probabilità la otteniamo dividendo per t la c_2

$$B_{12} = \frac{\pi e^2 |X_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar^2}$$

Questa probabilità può essere modificata tenendo conto del fatto che gli atomi possono avere orientazioni casuali nello spazio (N atomi). Al tempo t potremo scrivere che

$$N_1 = N |c_1|^2$$

$$N_2 = N |c_2|^2$$

Dobbiamo tener presente che abbiamo un orientazione spaziale casuale.

$$X_{12} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{D}_{12}$$

$$\vec{D}_{12} = \int \psi_1^* \vec{D} \psi_2 dV$$

$$\vec{D} = \sum_{j=1}^z \vec{r}_j$$

Occorre considerare il fatto che il nostro X_{12} venga mediato su tutti gli angoli. Poiché c'è un prodotto scalare nell'espressione c'è un $\cos \theta$. La media di questo termine al quadrato su tutto lo spazio³ fa $1/3$:

$$B_{12} = \frac{\pi e^2 |D_{12}|^2}{3 \varepsilon_0 \hbar^2}$$

Dalla teoria di Einstein si può trovare la relazione che lega A_{21} a B_{21} , usando ragionamenti termodinamici:

$$A_{21} = \frac{\hbar \omega_0^3 B_{12} g_1}{\pi^2 c^3 g_2}$$

Sostituendo il valore trovato per B_{12} si trova:

$$A_{21} = \frac{g_1 e^2 \omega_0^3 |D_{12}|^2}{3 \pi \varepsilon_0 g_2 \hbar c^3}$$

2.1 Equazione di Block ottica

Nel precedente paragrafo abbiamo affrontato il problema dal punto di vista di una singola funzione d'onda. Questo approccio non è molto indicato per trattare l'interazione di una miscela di stati con la radiazione elettromagnetica. Per procedere a studiare quello che avviene quando il sistema interagisce con un gas riscriviamo le equazioni che abbiamo risolto precedentemente in termini della matrice densità:

La funzione d'onda del sistema può essere scritta attraverso gli autostati dell'hamiltoniana imperturbata:

$$\psi(r, t) = c_1(t) \psi_1(r, t) + c_2(t) \psi_2(r, t)$$

Da cui si ottengono le equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \nu \cos \omega t e^{-i\omega_0 t} c_2 = i \frac{dc_1}{dt} \\ \nu^* \cos \omega t e^{i\omega_0 t} c_1 = i \frac{dc_2}{dt} \end{cases}$$

Per trattare il gas di atomi dobbiamo introdurre i termini:

³La proiezione di un punto su una sfera su un asse: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ per isotropia le tre coordinate sono uguali: $r^2 = 3 \langle x^2 \rangle$, $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} r^2$, con $r = 1$ è proprio $1/3$.

$$\rho_{11} = |c_1|^2 = \frac{N_1}{N} \quad \rho_{22} = |c_2|^2 = \frac{N_2}{N}$$

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1$$

$$\rho_{12} = c_1 c_2^* \quad \rho_{21} = c_2 c_1^*$$

$$\rho_{12}^* = \rho_{21}$$

Questi sono i quattro termini di un sistema che mi identifica in tutto e per tutto lo stato: la matrice densità. Conoscere la matrice densità di un sistema atomico significa conoscere tutto. Nella trattazione fenomenologica di Einstein ci si occupa solo dei termini della diagonale. I termini off-diagonal si dicono termini di coerenza e danno ragione delle relazioni di fase tra l'oscillatore del campo e quello del sistema atomico. Questa formulazione più generale del problema mi permette di scrivere il sistema in modo più completo:

$$\frac{d\rho_{ij}}{dt} = c_i \left(\frac{dc_j^*}{dt} \right) + c_j^* \left(\frac{dc_i}{dt} \right)$$

Con questa assunzione ricaviamo le equazioni:

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -\frac{d\rho_{11}}{dt} = -\frac{1}{2}i\nu^* e^{i(\omega_0 - \omega)t} \rho_{12} + \frac{1}{2}i\nu e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \rho_{21}$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = \frac{d\rho_{21}^*}{dt} = \frac{1}{2}i\nu e^{-i(\omega_0 - \omega)t} (\rho_{11} - \rho_{22})$$

I due set di equazioni sono intimamente legati tra di loro. Queste contengono come caso particolare le equazioni di Einstein. Sono le equazioni di Block in banda ottica, e sono identiche alle equazioni di spin in un campo magnetico oscillante. La frequenza ν (che abbiamo già incontrato nella trattazione con la funzione d'onda) è detta frequenza di Raby. È fondamentale nella teoria atomica.

Per risolvere le equazioni differenziali ipotizziamo le seguenti soluzioni:

$$\rho_{11} = \rho_{11}^{(0)} e^{\lambda t}$$

$$\rho_{22} = \rho_{22}^{(0)} e^{\lambda t}$$

$$\rho_{12} = \rho_{12}^{(0)} e^{-i(\omega_0 - \omega)t} e^{\lambda t}$$

$$\rho_{21} = \rho_{21}^{(0)} e^{i(\omega_0 - \omega)t} e^{\lambda t}$$

Questa soluzione può essere scritta in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2}i\nu^* & -\frac{1}{2}i\nu \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{2}i\nu^* & \frac{1}{2}i\nu \\ \frac{1}{2}i\nu & -\frac{1}{2}i\nu & i(\omega_0 - \omega) - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{2}i\nu^* & \frac{1}{2}i\nu^* & 0 & -i(\omega_0 - \omega) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) \\ \rho_{22}(0) \\ \rho_{12}(0) \\ \rho_{21}(0) \end{pmatrix} = 0$$

Perché il sistema ammetta soluzioni non banali bisogna che il determinante della matrice si annulli:

$$\lambda^2 \left[\lambda^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + |\nu|^2 \right] = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \lambda = i\Omega \quad \lambda = -i\Omega$$

Dove Ω è una versione aggiornata della frequenza di Raby:

$$\Omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + |\nu|^2}$$

Questa coincide con ν se non c'è detuning ($\omega = \omega_0$). La soluzione generale sarà:

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}^{(1)} + \rho_{ij}^{(2)} e^{i\Omega t} + \rho_{ij}^{(3)} e^{-i\Omega t}$$

Abbiamo scritto un set di equazioni con la matrice densità che sono in grado di darci tutti gli elementi per studiare l'evoluzione dell'interazione tra atomi e campo. Nel caso di assenza di detuning Ω è proporzionale all'ampiezza del campo. Il campo è in grado di introdurre uno shift in frequenza (un effetto Stark dinamico).

Mettiamoci nell'ipotesi iniziale che non ci sia popolazione iniziale nello stato iniziale ($c_2(0) = 0$):

$$\rho_{22} = 0 \quad \rho_{12} = 0$$

Possiamo risolvere la ρ_{22} in funzione di t

$$\rho_{22} = \frac{|\nu|^2}{\Omega^2} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega t \right)$$

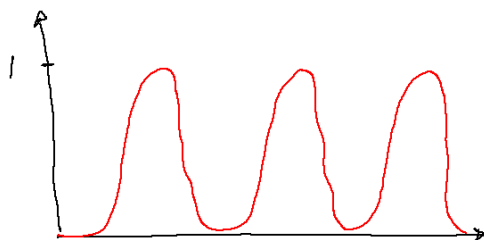


Figura 2.6: Oscillazioni alla frequenza di Raby delle popolazioni.

Questa soluzione ci dice che l'oscillazione durerà in eterno. In realtà abbiamo trascurato in tutta la trattazione effetti di dumping e di smorsamento, che tolgono coerenza al sistema (annullando progressivamente gli elementi *off-diagonal* della matrice densità, che mi fa quindi tornare al caso visto precedentemente). Questi defasamenti possono essere dovuti alle collisioni, effetto doppler, o di tipo radiativo (dovuti alla vita media degli stati). Questi effetti portano ad un

conseguente allargamento di riga⁴. Possiamo metterci in condizione in cui gli atomi sono praticamente fermi (sistemi molto raffreddati), alla fine rimane solo l'allargamento naturale.

C'è stato negli anni ottanta la scoperta della tecnica di laser tuning, che ha permesso di raffreddare sistemi a limiti estremi, favorendo anche gli studi nel campo della fisica fondamentale, oltre che la possibilità per usare sistemi atomici per fare quantum information. Con queste tecniche di raffreddamento è possibile riconoscere i singoli contributi all'allargamento di riga, e confrontare i risultati sperimentali con le previsioni teoriche delle equazioni di Bloch con altissima precisione. Ovviamente gli stessi discorsi si applicano ai solidi, dove l'allargamento non è più dato dagli urti, ma dagli scattering con i fononi.

Distinguiamo tra due classi di allargamenti, omogenei e inhomogenei. L'allargamento omogeneo è un allargamento che interessa allo stesso modo tutti gli atomi (collisioni), inhomogeneo invece abbiamo un allargamento differente per ciascun atomo (dopler, ogni atomo va a velocità diversa).

2.2 Allargamenti

Dalla precedente trattazione delle equazioni di Bloch manca ancora l'introduzione dei fenomeni di allargamento delle righe. Questi fenomeni portano al progressivo smorzamento delle oscillazioni di Rabi.

Può essere comodo dividere gli allargamenti in due classi: omogenei e inhomogenei. Un allargamento è omogeneo quando la sua causa influisce alla stessa maniera in tutti gli elementi del sistema, inhomogeneo quando è influenzato da effetti locali, o da parametri che differenziano le molecole (velocità), impurezze, disomogeneità, in cui l'effetto complessivo sia differente per ciascun elemento. Nella realtà si trova sempre una sovrapposizione di questi due tipologie di allargamenti, e le forme di riga sono una convoluzione delle forme di righe che derivano dagli allargamenti omogenei e inhomogenei.

Gli allargamenti inhomogenei hanno forme di riga gaussiana, quelli omogenei lorentziana. Normalmente si osserva una convoluzione dei due profili.

2.2.1 Allargamento radiativo

L'allargamento radiativo è l'allargamento omogeneo per eccellenza, ed è dovuto al processo di emissione spontanea. Questo fenomeno non l'abbiamo ancora giustificato formalmente, ma se assumiamo che esista, andiamo a considerarne le conseguenze.

$$\omega \sim \omega_0$$

Rivediamo come si arriva alle equazioni ottiche:

$$E(t) = \frac{1}{2}E_0(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$$

$$P(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0 [\chi(\omega)e^{-i\omega t} + \chi(-\omega)e^{i\omega t}]$$

Supponiamo che il campo elettrico oscilli in x :

⁴Uno smorzamento nelle oscillazioni si traduce in una larghezza di riga, in trasformata di Fourier.

$$d = \sum_{j=1}^z ex_j = x_j$$

Dove x è la componente del vettore:

$$\vec{D} = \sum_{j=1}^z \vec{r}_j$$

$$d(t) = - \int \psi^*(t) eX\psi(t) dV$$

$$\psi(t) = c_1(t)e^{i\frac{E_1}{\hbar}t} + c_2(t)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$$

Da cui:

$$d(t) = -e [c_1^*c_2X_{12}e^{-i\omega_0t} + c_2^*c_1X_{21}e^{i\omega_0t}]$$

$$X_{12} = \int \psi^* X\psi dV$$

$$\begin{cases} \nu \cos \omega t e^{-i\omega_0t} c_2 = i \frac{dc_1}{dt} \\ \nu^* \cos \omega t e^{i\omega_0t} c_1 = i \frac{dc_2}{dt} \end{cases}$$

Il termine di emissione spontanea va introdotto a mano nell'equazione:

$$\begin{cases} \nu \cos \omega t e^{-i\omega_0t} c_2 = i \frac{dc_1}{dt} \\ \nu^* \cos \omega t e^{i\omega_0t} c_1 - i\gamma c_2 = i \frac{dc_2}{dt} \end{cases}$$

È facile mostrare che il termine aggiunto descriva l'emissione spontanea, infatti se ci mettiamo nell'ipotesi di campo nullo ($\nu^* = 0$) le due equazioni non sono più accoppiate e possono essere risolte:

$$c_2(t) = c_2(0)e^{-\gamma t}$$

$$N_2 = N_2(0)e^{-2\gamma t}$$

Questo termine

$$2\gamma = \frac{1}{\tau}$$

Con τ vita media del mio stato. Possiamo fare una teoria che parte da considerazioni di tipo semiclassico dell'assorbimento. Quando il campo viene in interazione con il sistema atomico avremo processi di assorbimento e processi di emissione spontanea. Vedremo che per avere emissione stimolata non è possibile con un sistema a soli due livelli, ne serve un terzo.

La forma di riga è una lorenziana (trasformata di Fourier del esponenziale). L'allargamento di tipo radiativo in genere dipende dal materiale.

Se consideriamo un sistema solido (un cristallo) abbiamo lo ione neodimio, all'interno di una struttura cristallina ha un tempo di vita del centinaio di microsecondi, nel caso di un laser a tre livelli per eccellenza, Il laser arubino ha un tempo di vita del millisecondo. In questo caso secondo l'allargamento è del kilohertz. Normalmente si tratta di allargamenti estremamente bassi, infatti il contributo della larghezza di riga dato dall'allargamento radiativo è sempre molto basso. Salvo rare eccezioni, non siamo in grado di misurarlo.

La forma della $\chi(\omega)$ è del tipo:

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2|D_{12}|^2}{3\varepsilon_0\hbar V} \left(\frac{1}{\omega_0 - \omega - i\gamma} + \frac{1}{\omega_0 + \omega - i\gamma} \right)$$

$$\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$$

Applicando la RWA si ottiene il coefficiente di assorbimento:

$$k = \frac{\pi Ne^2|D_{12}|^2\omega_0}{3\varepsilon_0\hbar V} \underbrace{\frac{\gamma/\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}_{\text{Lorenziana}}$$

2.2.2 Power Broadening

Se ripetiamo la trattazione precedente usando il formalismo della matrice densità otteniamo un altro contributo all'allargamento, non lineare nel campo incidente. Si chiama allargamento di potenza (power-broadening)

$$\begin{cases} \nu \cos \omega t e^{-i\omega_0 t} c_2 = i \frac{dc_1}{dt} \\ \nu^* \cos \omega t e^{i\omega_0 t} c_1 - i\gamma c_2 = i \frac{dc_2}{dt} \end{cases}$$

Da queste equazioni possiamo ricavare le equazioni di Bloch:

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -\frac{1}{2}i\nu^* e^{i(\omega_0 - \omega)t} \rho_{12} + \frac{1}{2}i\nu e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \rho_{21} - 2\gamma\rho_{22}$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = \frac{1}{2}i\nu e^{-i(\omega_0 - \omega)t} (\rho_{11} - \rho_{22}) - \gamma\rho_{12}$$

Definiamo il sistema di riferimento rotante:

$$\tilde{\rho}_{12} = e^{i(\omega_0 - \omega)t} \rho_{12}$$

$$\tilde{\rho}_{21} = e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \rho_{21}$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -\frac{1}{2}i\nu^* \tilde{\rho}_{12} + \frac{1}{2}i\nu \tilde{\rho}_{21} - 2\gamma\rho_{22}$$

$$\frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} = \frac{1}{2}i\nu(\rho_{11} - \rho_{22}) - \gamma\tilde{\rho}_{12} + i(\omega_0 - \omega)\tilde{\rho}_{12}$$

Possiamo cercare la soluzione stazionaria di queste equazioni; poniamo le derivate pari a zero.

$$\rho_{22} = \frac{14|\nu|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{1}{2}|\nu|^2}$$

$$\rho_{12} = e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \frac{\frac{1}{2}\nu(\omega_0 - \omega - i\gamma)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{1}{2}|\nu|^2}$$

Conoscendo che relazione c'è tra le ρ e il momento di dipolo possiamo ottenere un'espressione della $\chi(\omega)$

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2|D_{12}|^2}{3\varepsilon_0\hbar V} \frac{\omega_0 - \omega + i\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{1}{2}|\nu|^2}$$

Cioè la larghezza di riga risulta maggiore, questa è una correzione alla lorenziana e che dipende dal campo, ed è un termine di tipo non lineare.

$$2\gamma \rightarrow 2 \left(\gamma^2 + \frac{1}{2}|\nu|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

In un processo di interazione tra atomi e campi, in un processo di assorbimento, in cui il campo viene aumentato dall'effetto risonante di una cavità. Quanto più grande è la $|\nu|^2$ (proporzionale all'intensità del campo incidente) tanto maggiore è l'effetto di allargamento.

2.2.3 Collisioni atomiche

Questo è un classico esempio di allargamento omogeneo, dovuto alle collisioni tra gli atomi. La probabilità che un atomo abbia un periodo di volo tra una collisione è l'altra possiamo scriverla come:

$$p(\tau)d\tau = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau$$

Dalla teoria cinetica dei gas τ_0 dipenderà:

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{4d^2N}{V} \sqrt{\frac{\pi k_B T}{M}}$$

Supponiamo due tipi di collisione, o completamente anelastica (cambiano i termini lungo la diagonale principale, comporta salti energetici), o una collisione di tipo elastico (non comporta salti energetici ma salti di fase, cambia i termini off-diagonal della matrice densità). Definiamo un γ_{coll} :

$$\gamma_{coll} = \frac{1}{\tau_0}$$

Aggiungiamo questo contributo nelle equazioni di Bloch:

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = \frac{1}{2}i\nu e^{-i\omega_0 - \omega)t} (\rho_{11} - \rho_{22}) - \gamma' \rho_{12}$$

$$\gamma' = \gamma + \gamma_{coll}$$

Questa modifica va fatta solo nella derivata di ρ_{21} non sulla ρ_{22} perché stiamo trattando il caso elastico:

$$\rho_{22} = \frac{1}{4} \frac{\gamma'}{\gamma} |\nu|^2 \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma' + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right) |\nu|^2}$$

$$\rho_{12} = \frac{e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \frac{1}{2} \nu (\omega_0 - \omega - i\gamma)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right) |\nu|^2}$$

Questo termine come si vede mantiene l'allargamento in modo lorentziano, ma ne modifica la larghezza:

$$\Delta\nu = 2\sqrt{\gamma'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right) |\nu|^2}$$

È una perfetta lorentziana se l'allargamento in potenza fosse trascurabile. Normalmente si trascura l'effetto dell'intensità del campo, mettendosi nell'ipotesi di campo debole. Se il campo è coerente e forte, come un campo laser, a quel punto continuiamo a vedere una forma di riga, ma vediamo un effetto di saturazione rispetto al power broadening. Avendo citato l'allargamento per collisioni troviamo una riga lorentziana.

2.2.4 Allargamento doppler

L'allargamento doppler è un allargamento inhomogeneo, dovuto alla differente velocità con cui si muovono gli atomi, ciascuna riga viene shiftata in frequenza per effetto doppler di una certa grandezza.

La dinamica delle emissioni di fotoni da parte di un gas è:

$$\begin{cases} M\vec{v}_1 + \hbar\vec{k} = M\vec{v}_2 \\ E_1 + \frac{1}{2}Mv_1^2 + \hbar\omega = E_2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \end{cases}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \frac{\hbar\vec{k}}{M}$$

$$\underbrace{\hbar\omega_0}_{E_2 - E_1} = \hbar\omega - \frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega - \hbar\vec{v}_1 \cdot \vec{k} - \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

$$\omega_0 = \omega - \frac{\omega}{c}v_{1z} - \frac{\hbar\omega^2}{2Mc^2}$$

$$\frac{v_{1z}}{c} \sim 10^{-5} \quad \frac{\hbar\omega}{2Mc^2} \sim 10^{-9}$$

L'ultimo termine può essere trascurato:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_{1z}}{c}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v_{1z}}{c} \right)$$

Ora l'allargamento viene fuori dalla distribuzione di Maxwell:

$$p(v)dv = e^{-\frac{M(v_z)^2}{2kT}} dv_z$$

Facendo un cambiamento di variabili otteniamo:

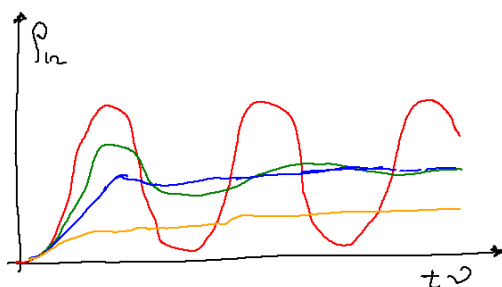
$$p(\omega)d\omega = e^{-\frac{Mc^2(\omega-\omega_0)^2}{2\omega_0^2kT}} \frac{c}{\omega_0} d\omega$$

Che è una gaussiana, la cui larghezza di riga:

$$2\Delta = 2\omega_0 \sqrt{\frac{k_B T}{Mc^2} 2 \ln 2}$$

L'equivalente nei solidi per le collisioni sono gli scattering tra reticolo e fononi, mentre quello doppler non ha direttamente analogie, ma se il sistema non è ordinato abbiamo un contributo simile al Doppler (non è un doppler, ma da un risultato simile) generato dalla presenza di impurezze.

Giocando su pressione e temperature possiamo variare sugli allargamenti dovuti al doppler e delle collisioni. Se vogliamo riassumere gli effetti dovuti ad un damping in funzione del tempo:



2.2.5 Tempi caratteristici

Poiché le equazioni di Bloch descrivono anche lo spin in un campo magnetico, la γ si adatta bene anche a quel modello. Possiamo individuare due tipi di tempi fenomenologici. Il primo è il tempo *longitudinale* caratteristico con cui varia la popolazione in spegnimento, che riguarda i termini ρ_{11} e ρ_{22} :

$$2\gamma = \frac{1}{T_1}$$

Un altro termine è:

$$\gamma' = \frac{1}{T_2}$$

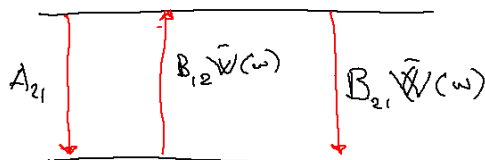
Questo è detto tempo di coerenza, detto tempo *trasversale*, Normalmente questo tempo è molto più breve di T_1 . Il tempo di coerenza di un laser, è un tempo che dipende dal contributo dovuto per lo più nell'He-Ne (laser) all'effetto doppler, ed è quello che mantiene la coerenza del treno.

2.3 Comportamento di un laser

Per trattare sistemi laser con una teoria completa, dobbiamo preoccuparci di trattare come interagiscono con il mezzo attivo tutti i modi del campo. In questo caso i modi sono solo quelli permessi dalla cavità. A noi interessa sapere come si comporta un laser nelle sue condizioni peculiari (condizione stazionaria, raggiungimento della soglia). A questo punto abbiamo una trattazione generale per capire come funziona un sistema laser anche in regime di multimodo. Dobbiamo preoccuparci delle relazioni di fase che possono esistere tra più modi per sistema che lavorano su più modi del campo.

Possiamo derivare l'approssimazione delle rate equation di Einstein come caso particolare delle equazioni di Block.

Un sistema laser che sia a due livelli puro non può funzionare come un vero sistema laser, occorrono altri livelli.



2.3.1 Contributo termico all'emissione stimolata

Poiché ci troviamo in un sistema a temperatura finita, oltre ai fotoni presenti nella cavità laser introdotti dal campo sono presenti anche i fotoni termici. Vogliamo stimare adesso il contributo dato al sistema da questi fotoni.

$$\bar{W}(\omega) = \bar{W}_T(\omega) + \bar{W}_E(\omega)$$

Il termine termico sarà dato da:

$$W_T(\omega) = \bar{n}\hbar\omega\rho(\omega)$$

La ρ_ω è la densità dei modi:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$W_t(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Immaginiamo un sistema a due livelli:

$$N_1 + N_2 = N$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}$$

Scrivendo l'equazione di rate di Einstein:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_2 A_{21} - N_1 B_{12} \bar{W}(\omega) + N_2 B_{21} \bar{W}(\omega)$$

In condizione di equilibrio le derivate devono essere nulle:

$$N_2 A_{21} - N_1 B_{12} \bar{W}_T(\omega) + N_2 B_{21} \bar{W}_T(\omega) = 0$$

Sto ragionando in assenza di campo

$$\begin{aligned} W_T(\omega) &= \frac{A_{21}}{\frac{N_1}{N_2} B_{12} - B_{21}} \\ \bar{W}_T(\omega) &= \frac{A_{21}}{\frac{g_1}{g_2} e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} B_{12} - B_{21}} \\ &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \bar{n} \hbar\omega \rho(\omega) \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la relazione:

$$A_{21} = \frac{B_{21} \hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$$

Porre la derivata nulla equivale a dire che:

$$\frac{A_{21}}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = B_{21} \bar{W}_T(\omega)$$

$$A_{21} \bar{n}(\omega) = B_{21} \bar{W}_T(\omega)$$

Questo termine dipende ad una data temperatura da ω

$$\frac{A_{21}}{B_{21} \bar{W}_T(\omega)} = \frac{1}{\bar{n}}$$

Per lunghezze d'onda molto grandi $\lambda \gg 50\mu m$

$$A_{21} \ll B_{21} \bar{W}_T(\omega)$$

Ovviamente abbiamo anche l'altra condizione (che coincide alla banda ottica) $\lambda \ll 50\mu m$

$$A_{21} \gg B_{21} W_T(\omega)$$

In questa condizione possiamo trascurare il comportamento di tipo termico. Se il salto tra i due livelli è di tipo ottico i contributi termici non giocano alcun ruolo. In altri termini in assenza di campo esterno tutti eliminano i campi esterni.

I contributi termici in banda ottica non sono più rilevanti. Da questo momento in poi trascureremo le parti termiche, e considereremo solo la presenza in campo esterno.

2.3.2 Emissione laser

Da questo momento in poi, poiché siamo in banda ottica possiamo ignorare il contributo termico degli elettroni. Se ci troviamo in un sistema a due livelli possiamo descrivere il sistema con la rate equation di Einstein:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1 A + (N_2 - N_1) B \bar{W}$$

Dove abbiamo supposto che:

$$B_{21} = B_{12}$$

Questo è vero se i livelli hanno la stessa molteplicità, ma i risultati che si ottengono sono indipendenti da questa assunzione (infatti basta aggiungere un fattore g_2/g_1).

In questa equazione compare la differenza di popolazione tra i due livelli. In pratica per arrivare all'emissione laser il termine $N_2 - N_1$ deve essere positivo (in questo modo domina il termine di emissione stimolata sull'emissione spontanea).

All'inizio predomina il termine di assorbimento perché $N_2 = 0$. Per raggiungere un sistema in cui l'emissione stimolata predomina sull'assorbimento bisogna ottenere l'inversione delle popolazioni. Supponiamo che all'istante iniziale $N_1(0) = N$:

$$N_1 + N_2 = N$$

$$\frac{dN_1}{dt} = (N - N_1)A + B\bar{W}(-N_1 + N - N_1) = N_1(A + 2B\bar{W}) + N(A + B\bar{W})$$

$$\frac{dN_1}{N_1(A + 2B\bar{W}) - N(A + B\bar{W})} = dt$$

$$\int_{N_1(0)}^{N_1(t)} \frac{dN_1}{N_1 - N \frac{A+B\bar{W}}{A+2B\bar{W}}} = -(A + 2B\bar{W}) \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{N_1(t) - \frac{N(A+B\bar{W})}{A+2B\bar{W}}}{\left(1 - N \frac{A+B\bar{W}}{A+2B\bar{W}}\right)} = -(A + 2B\bar{W})t$$

$$N_1(t) = \frac{N(A + B\bar{W})}{A + 2B\bar{W}} + \left[1 - \frac{N(A + B\bar{W})}{A + 2B\bar{W}}\right] e^{-(A+2B\bar{W})t}$$

$$N_2(t) = \frac{NB\bar{W}}{A + 2B\bar{W}} \left[1 - e^{-(A+2B\bar{W})t}\right]$$

Queste equazioni permettono di controllare il rapporto tra il contributo di emissione stimolata rispetto all'emissione totale. Studiamo il raggiungimento della situazione di equilibrio. L'emissione spontanea avviene su tutto l'angolo solido, mentre l'emissione stimolata avviene nella stessa direzione del campo di ingresso.

Valutiamo la tipologia della sorgente che può avere un'emissione laser, rispetto al rapporto tra BW ed A . Quando questo sistema a due livelli comincia a restituire della radiazione che è arrivata dal campo stesso. Il fattore di guadagno dipenderà dal rapporto:

$$\frac{B\bar{W}}{A} = 1 \quad \rightarrow \quad B\bar{Q}d\omega = Ad\omega$$

$$W(\omega)d\omega = \frac{A}{B}d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}d\omega$$

Siccome il Detector misura l'intensità:

$$I = c\bar{W}$$

$$Id\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^2}d\omega$$

Se sostituiamo numericamente valori di ω che cadono nel visibile (ad esempio $\omega = 3 \cdot 10^{15}$ rad/s). Prendiamo il $d\omega$ di una lampada a scarica:

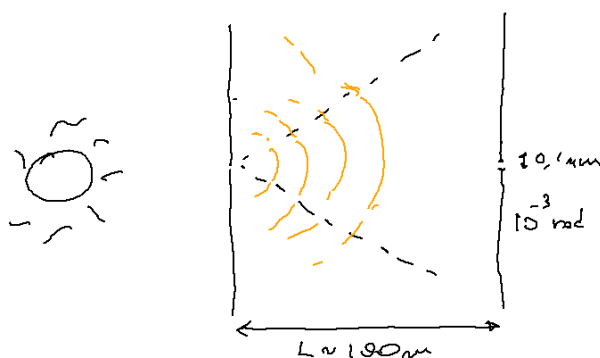
$$d\omega \sim 2\pi 10^{10} \frac{rad}{s}$$

Quanto deve essere l'intensità della sorgente affinché il contributo di emissione stimolata è pari a quello di emissione spontanea, cioè che il sistema sia in condizione di sensibile alterazione della popolazione. Vediamo subito qual è la grande differenza tra sorgenti laser e altre sorgenti.

$$I \sim 2 \cdot 10^5 \frac{W}{m^2}$$

Una sorgente convenzionale che emettono. Preleviamone il singolo modo. Il singolo modo spaziale del campo elettromagnetico. Con che buona approssimazione prendiamo un singolo modo?

Creo una sorgente puntiforme, faccio un piccolo foro su un foglio, per selezionare il singolo modo del campo



In questo modo si seleziona il singolo modo. Le intensità sono riportate in tabella

Abbiamo due regimi:

$$\frac{BW}{A} \gg 1 \quad \rightarrow \quad \text{laser}$$

$$\frac{BW}{A} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \text{Non laser}$$

	$I \text{ (W/cm}^2\text{)}$	$n \text{ (fot./cm}^2\text{)} \cdot \tau \text{ (s)}$	$\phi \text{ (V)}$
Hg	10^4	10^{-2}	10^3
CW	10^5	10^{10}	10^4
Pulsed Laser	10^{13}	10^{18}	10^8

Ci dobbiamo aspettare comportamenti differenti e con una componente laser. Mettiamoci nella situazione per $t \rightarrow \infty$

$$N_2 = \frac{NB\bar{W}}{A + 2B\bar{W}}$$

$$\frac{N_2}{N} = \frac{B\bar{W}}{A + 2B\bar{W}}$$

$$\frac{N_2}{N} = \frac{1}{\frac{A}{B\bar{W}} + 2}$$

Per una sorgente convenzionale questo rapporto è decisamente piccolo:

$$\frac{N_2}{N} \ll 1$$

Il livello di segnale è così debole che la frazione di popolazione N_2 rispetto alla popolazione totale è molto bassa. Viceversa per un laser possiamo mandare a zero il termine:

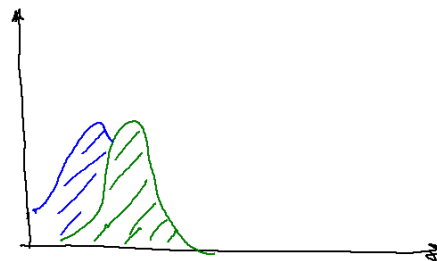
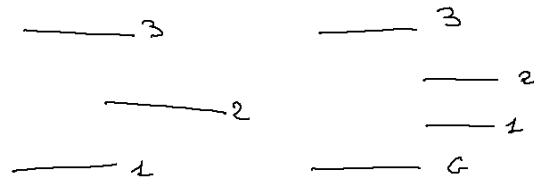
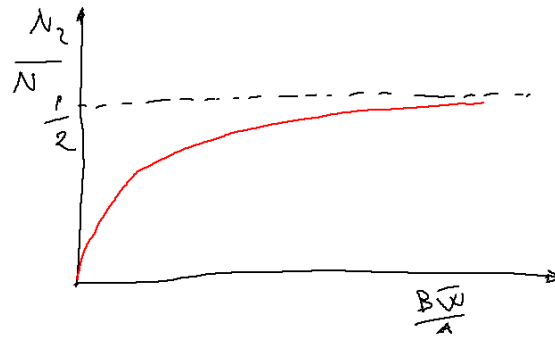
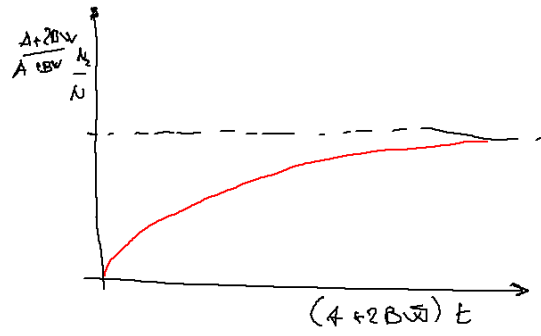
$$\frac{N_2}{N} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Nel sistema a due livelli, per quanti sforzi si facciano non si riesce a portare più di metà della popolazione al livello N_2 . Il sistema sta assorbendo, perché il termine di assorbimento prevale sull'aumento. L'assorbimento prevarrà sempre sull'emissione stimolata. Per quanto cresca l'emissione stimolata al massimo N_2 vale $N/2$. A quel punto il sistema diventa trasparente, avviene la saturazione dell'assorbimento. Con due livelli non faremo mai un laser. Ne servono almeno uno di più

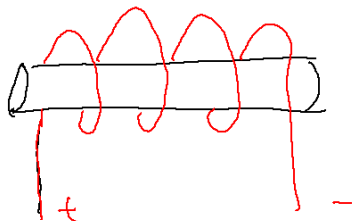
Questo fenomeno viene chiamato regime di saturazione. I laser possono essere a tre o a quattro livelli. Quello più conveniente è un sistema a 4 livelli. Tuttavia il laser a 3 livelli è utile didatticamente. Ci serve un livello di Buffer, con delle condizioni in più:

La stragrande maggioranza dei sistemi laser è a 4 livelli, tuttavia, il primo laser in banda ottica è stato a 3 livelli.

Bisogna fare in modo che N_2 sia maggiore di N_1 . Possiamo fornire al mezzo attivo che è più alta dell'energia che è in grado di riemettere. Come forniamo l'energia di un cristallo di rubino? Siamo nello stato solido, abbiamo vere e

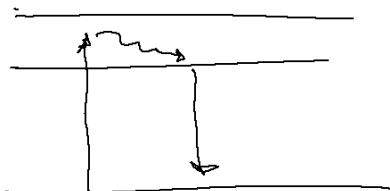


proprie allargamenti. Lo spettro d'assorbimento del rubino: Serve luce tutta nel verde. Si usavano delle lampade a flash con uno spettro di emissione che può essere matchato con quelle bande di assorbimento. C'è un problema di accoppiamento di efficienza. Il cilindro di rubino viene chiuso in una lampada a flash fatta in un solenoide:



Per focalizzare il flash fu fatta con una carta di alluminio riflettente. L'efficienza di accoppiamento tra luce ottica emessa se va bene arriva allo 0.5 %, molto in perdita. Con una cosa del genere c'era un banco di 240 microfarad su cui venivano scaricati 2000 Volts.

Bisogna fare in modo che $N_2 > N_1$. Il livello 2 è scelto all'interno della banda di assorbimento, cioè tra 3 e due c'è un salto intrabanda:



Il decadimento avviene con un rilassamento intrabanda non radiativo (di tipo fononico). Per funzionare questo sistema deve rispettare la condizione:

$$\tau_{32} \ll \tau_{21} \quad \tau_{21} \sim 3\text{ms}$$

Il τ_{32} è intrabanda, dell'ordine dei picosecondi. Questa condizione è così importante perché nel tempo in questo modo la popolazione del livello 3 rimanga sempre vuota. Quindi avrò sempre la possibilità di pompare il livello 3. Quando gli atomi arrivano al livello 2 hanno tanto prima di ricadere sul livello 1. Posso pomparne a sufficienza. Allora le approssimazioni sono:

$$N_3 \sim 0$$

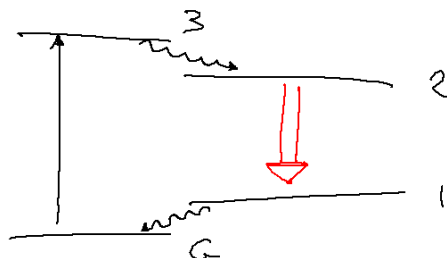
Il terzo livello permette il pompaggio ottico, posso arrivare all'inversione delle popolazioni quando:

$$N_2 - N_1 \geq 0$$

$$N_2 = \frac{N_t}{2} + 1$$

Rispettando questa condizione posso creare un laser. Questa cosa comporta ancora fare uno sforzo enorme. Perché della N_t se ne devono eccitare la metà più uno.

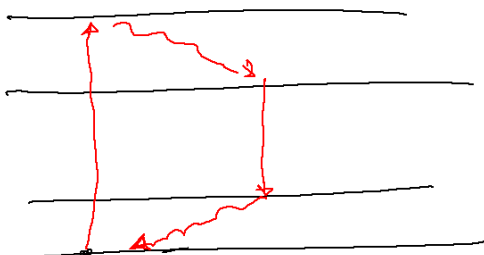
L'aggiunta di un quarto livello rende l'interno gioco più semplice:



L'assorbimento è verso l'infrarosso, e l'emissione intorno a un micron (infrarosso).

$$\tau_{32} \ll \tau_{21} \quad \tau_{10} \ll \tau_{21}$$

Per cui abbiamo due rilassamenti fononici. Questi sono sulla scala dei picosecondi. Nel caso del materiale è comunque molto lungo (centinaia di microsecondi).



L'enorme vantaggio è che N_1 è sempre uguale a zero, adesso basta mandare un solo livello e si è ottenuta l'inversione di popolazione.

Da questa discussione qualitativa abbiamo ricavato informazioni molto importanti, vedremo dalla prossima volta tutto quanto in modo quantitativo, e ritroveremo proprio questo ragionamento.

2.3.3 Comportamento del sistema laser a 3 e 4 livelli

Prendiamo un laser a 4 livelli. Il livello fondamentale, il ground, ha associata una popolazione N_g . I due livelli che interessano il laser sono N_1 , N_2 , e il livello di pompaggio è N_3 .

Ci mettiamo nell'ipotesi che il laser oscilli sul singolo modo del campo (singolo modo longitudinale e singolo modo trasversale). Data una generica cavità si seleziona il singolo modo trasversale (esempio gaussiano), e facciamo funzionare il laser su una sola frequenza longitudinale.

Assumiamo che i tempi di decadimento spontaneo dal livello 3 al livello 2, e tra il livello 1 ed il ground state siano molto più brevi del tempo di decadimento tra il livello 2 al livello 1. La popolazione totale del sistema può essere approssimata come

$$N = N_g + N_2$$

$$N_3 \sim N_1 \sim 0$$

Scriviamo una rate equation che mi tenga conto della variazione di N_2 . Questa sarà data un termine che tiene conto del rate di pompaggio, ossia dal meccanismo che permette di passare da ground a livello 3, chiamiamo questo tempo W_p :

$$\dot{N}_2 = W_p N_g - BqN_2 - \frac{N_2}{\tau}$$

Da un punto di vista dimensionale W_p è l'inverso di un tempo, ed è legato all'energia che si immette nel sistema di pompaggio nell'unità di tempo. È conveniente pompare l'emissione con un sistema che matchi il più possibile la banda di assorbimento del livello. Questo è vero in un sistema a stato solido, dove abbiamo delle vere e proprie bande. Se però avessimo un gas le righe spettrali sono molto più strette, ed è molto più efficiente usare una scarica per eccitare il sistema nel livello 3. Una scarica elettrica provoca l'eccitazione degli atomi. Il meccanismo di pompaggio può essere fatto ancora più efficiente usando un altro laser per pompare. I moderni sistemi a stato solido vengono pompati da diodi laser.

Il termine BqN_2 è l'emissione stimolata, il termine B è molto simile al coefficiente di Einstein B_{21} . L'assorbimento non c'è perché il livello 1 è sempre spopolato

Il termine N_2/τ è l'emissione spontanea, in realtà bisognerebbe distinguere tra diseccitazione radiativa e diseccitazione non radiativa (per collisioni o altro). In realtà possiamo metterci in condizione in cui τ_{nr} sia trascurabile:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_{nr}}$$

Oltre a questa equazione bisogna dare una forma a q (numero di fotoni del corrispondente modo della cavità laser). Il numero di fotoni aumenta con il processo di emissione stimolata:

$$\dot{q} = V_a BqN_2 - \frac{q}{\tau_c}$$

Il termine V_a serve per aggiustare le dimensioni, e rappresenta fisicamente il volume del modo che risuona nella cavità. In realtà la cavità ha un termine di

Dumping, infatti uno dei due specchi deve trasmettere qualcosa perché il nostro segnale deve uscire. Questo è dato dal termine di vita del fotone nella cavità (τ_c). Dovremo aggiungere all'equazione di q un altro pezzo che deve far partire il processo laser (infatti serve un primo decadimento che mi innesca l'emissione stimolata). Tuttavia per studiare le condizioni di regime, il termine di emissione spontanea domina in modo preponderante, e quindi possiamo trascurarlo.

Il tempo di vita del fotone l'avevamo scritto come:

$$\tau_c = -\frac{2L}{c \ln [R_1 R_2 (1 - T_i)^2]}$$

Dove $1 - T_i$ è la frazione di energia che rimane all'interno della cavità, al quadrato perché passo per il mezzo di gain due volte. La larghezza di riga a cui si risuona si può calcolare $\Delta\nu_c = 1/2\pi\tau_c$, e il fattore di merito

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu_c}$$

Passiamo al calcolo di V_a . Il volume occupato da un modo può essere ricavato integrando l'intensità normalizzata del campo elettrico del modo su tutto lo spazio:

$$V_1 = \int_V \left(\frac{E(x, y, z)}{E_0} \right)^2 dV$$

Facciamo un calcolo in modo che il waste del modo sia circa costante ($z_0 \gg L$). Questo si ottiene quando il raggio di curvatura è molto maggiore di L .

$$V_a = \int e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \cos(kz - \varphi) dx dy dz$$

SI può spezzare questo integrale in tre integrali in x, y e z. Tenendo presente che:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx = 1$$

Si ottiene:

$$V_a = \pi \frac{w_0^2 l}{4}$$

Con l che indica la lunghezza del mezzo attivo che stiamo prendendo.

Proviamo a calcolare di come cambia l'intensità nella cavità in un round Trip, ossia la variazione di intensità. La cavità che vogliamo descrivere è rappresentata in Figura 2.7.

$$\Delta I = I \left[(1 - a_1 - T_1)(1 - a_2 - T_2)(1 - T_i)^2 e^{2\sigma(N_2 - N_1)l} - 1 \right]$$

Urtando sul primo specchio la percentuale di intensità rimasta sarà $1 - T_1 - a_1$ (energia trasmessa + perdite). Stessa cosa per il secondo specchio e per perdite generali interne. Il termine esponenziale è il termine che mi genera l'amplificazione. La σ rappresenta la sezione d'urto dell'emissione stimolata.

Ora presumiamo che a_1 e a_2 siano molto piccoli possiamo scomporre i termini nel seguente modo:

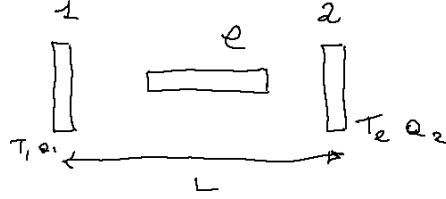


Figura 2.7: Schema semplice di una cavità laser: due specchi che racchiudono il mezzo attivo di gain.

$$1 - a_i - T_1 \approx (1 - a_1)(1 - T_1)$$

$$\gamma_1 = -\ln(1 - T_1) \quad \gamma_2 = -\ln(1 - T_2)$$

$$\gamma_L = -[\ln(1 - a) + \ln(1 - T_i)] = -\ln[(1 - a)(1 - T_i)]$$

Possiamo definire un fattore di perdita totale:

$$\gamma = \gamma_i + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$$

$$\Delta I = I \left[(1 - a)^2 (1 - T_1)(1 - T_2) e^{2\sigma(N_2 - N_1)l} - 1 \right]$$

$$\Delta I = I \left[e^{-2\gamma_i} e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)} e^{2\sigma(N_2 - N_1)l} - 1 \right]$$

Aver introdotto i fattori γ logaritmici determina un bel vantaggio matematico:

$$\Delta I = I \left[e^{-2\gamma} e^{2\sigma(N_2 - N_1)l} - 1 \right]$$

Fin tanto che il termine di perdita prevale sul termine di guadagno il laser non funziona, si crea una transizione di fase nel punto di soglia, quando i due esponenziali si equivalgono. In questa situazione il sistema può laserare.

Il funzionamento del Laser può avvenire in continua o in impulsata. La differenza tra questi due regimi è dettata dal pompaggio a cui è sottoposto il laser; se il meccanismo di scarica è talmente forte e violento da creare uno squilibrio tra le popolazioni che rende il termine di gain molto maggiore di quello di perdita si dice che il laser lavora in regime transiente. Questo modo di lavorare è fortemente lontano dall'equilibrio, e richiede per poter essere descritto matematicamente la risoluzione numerica della *rate-equation* che abbiamo scritto.

Il laser in continua (CW⁵) lavora invece nella condizione di soglia. Questo secondo caso può essere studiato analiticamente.

⁵Continuous Wave

In questa condizione i due esponenziali sono molto vicini, e in generale otteniamo:

$$\sigma(N_2 - N_1)l - \gamma \ll 1$$

In questa approssimazione possiamo sviluppare il termine esponenziale:

$$\Delta I = 2[\sigma(N_2 - N_1)l - \gamma] I$$

Possiamo dividere questo in un tempo corrispondente al Round-Trip:

$$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \left(\frac{\sigma(N_2 - N_1)lc}{L} - \frac{\gamma c}{L} \right) I$$

Questa equazione è discretizzata, possiamo passare alle variabili continue, inoltre $I \propto q$, e possiamo riscrivere questa equazione interpretandola in funzione di q :

$$\dot{q} = \left(\frac{\sigma(N_2 - N_1)lc}{L} - \frac{\gamma c}{L} \right) q$$

Questa è esattamente l'equazione che avevamo scritto per \dot{q} con ragionamenti qualitativi. Da qui derivano automaticamente due cose. Riusciamo a legare B alla sezione d'urto del processo di emissione stimolata:

$$B = \frac{\sigma lc}{V_a L}$$

$$\tau_c = \frac{L}{\gamma c}$$

Definendo il coefficiente di guadagno g :

$$g = \sigma(N_2 - N_1)$$

Si può ridefinire la condizione di laser in continua:

$$gl - \gamma \ll 1$$

Analogamente possiamo semplificare la notazione definendo il guadagno G del mezzo attivo:

$$G = e^{gl}$$

Introduciamo due nuove variabili:

$$N_t = N_2 + N_1 \quad N = N_2 - N_1$$

In un sistema a 4 livelli N coincide con N_2 :

$$\dot{N} = W_p(N_t - N) - BqN - \frac{N}{\tau}$$

$$\dot{q} = \left[V_a B N - \frac{1}{\tau_c} \right] q$$

Dobbiamo metterci opportune condizioni iniziali, a $t = 0$ avremo una $N(0) = 0$.

$$q(0) = 1$$

Il tempo $t = 0$ è il tempo in cui viene emesso il primo fotone ad emissione spontanea (necessario poiché non abbiamo inserito l'emissione spontanea nell'equazione di q). Il regime continuo CW è stazionario.

2.3.4 Equazioni del laser a tre livelli

Apriamo una piccola parentesi per specificare le equazioni ottenute in linea generica (o particolare per il laser a 4 livelli) nel caso di laser a tre livelli:

$$N_1 + N_2 = N_t$$

$$\dot{N}_2 = W_p N_1 - Bq(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau}$$

$$\dot{q} = \left[V_a B q N_2 - \frac{1}{\tau_c} \right] q$$

In questa ultima equazione non è presente il termine di assorbimento. A rigore questo termine dovremo mettercelo, però possiamo metterci nelle condizioni che questo assorbimento sia davvero trascurabile.

$$\dot{N} = W_p(N_t - N) - 2BqN - \frac{N_t + N}{T}$$

$$q = \left[VBN - \frac{1}{\tau_c} \right] q$$

L'equazione che cambia in maniera rilevante è la prima. Il meccanismo di emissione stimolata deve almeno eguagliare le perdite. L'equazione di soglia (threshold) la otteniamo quando poniamo $\dot{q} = 0$:

$$VBN_c = \frac{1}{\tau_c}$$

Questa è la situazione critica. Da questa condizione si ottiene che:

$$N_c = \frac{1}{VB\tau_c}$$

$$B = \frac{\sigma l c}{V_a L} \quad \tau_c = \frac{L}{\gamma c}$$

$$N_c = \frac{\gamma}{\sigma l}$$

Questa espressione ci dice quale deve essere la differenza di popolazioni critica per far sì che il sistema possa laserare.

Se non tenessimo conto della cavità diremmo che il valore critico per N_c sia zero, in realtà il fatto che sia un po' maggiore di zero è dovuto al termine di dumping della cavità γ e del mezzo attivo σ . Quindi tanto maggiore è l'emissione

stimolata tanto minore sarà N_c , e tanto maggiore sono le perdite, tanto maggiore è N_c . Poiché N_c è inversamente proporzionale a l .

Questa condizione è comune al tre livelli così come al quattro livelli.

A questo punto però se poniamo nelle equazioni le condizioni di stazionarietà, ci accorgiamo delle differenze:

$$N = N_c \quad \dot{N} = 0$$

Nel laser 4 livelli otteniamo che esiste un pompaggio critico, che otteniamo sostituendo questi termini nell'equazione del quattro livelli. Trovandoci a soglia supponiamo q molto piccolo:

$$W_{pc} = \frac{N_c}{(N_t - N_c)\tau}$$

$$W_{pc} \approx \frac{\gamma}{\sigma l N_T \tau}$$

Questa rappresenta proprio il rate che dobbiamo fornire nel sistema a quattro livelli. Nel sistema a tre livelli otteniamo:

$$W_{pc} = \frac{N_t + N_c}{N_t - N_c} \frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{\tau}$$

Entrambi questi termini sono proporzionale a $1/\tau$. Tuttavia W_{pc} del 4 livelli è $1/N_t$ volte più piccolo del sistema a 3 livelli.

Il pompaggio critico nel sistema a tre livelli ha bisogno di un tempo radiativo molto piccolo, non è un caso che il laser al Rubino usa un τ dell'ordine del millisecondo.

La condizione di soglia in definitiva è quella in cui l'emissione stimolata, che emette in tutto l'angolo solido, emetterà un fotone lungo il modo principale della cavità laser. A questo punto passando attraverso il gain viene emesso un secondo fotone, poi diventano quattro ecc. fin quando il guadagno per emissione stimolata compensa esattamente le perdite.

Normalmente una cavità impiega parecchi round trip per raggiungere la soglia.

Una volta raggiunta la soglia che succede?

$$W_p > W_{pc}$$

$$\dot{q} = 0 \quad \longrightarrow \quad N_0 = N_c = \frac{\gamma}{\sigma l}$$

Se aumentiamo l'energia pompata, non aumenta l'inversione di popolazione, ma aumentano il numero di fotoni. Questo è interessante:

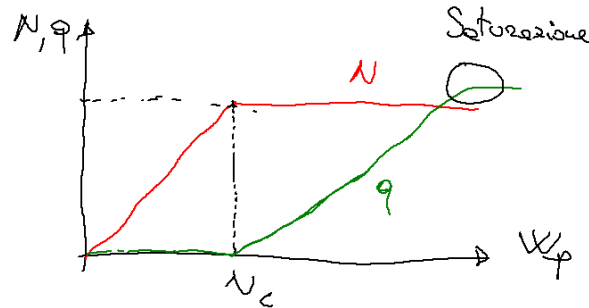
$$\dot{N} = 0$$

$$q_0 = \frac{1}{BN_0} \left[W_p(N_c - N_0) - \frac{N_0}{\tau} \right]$$

$$q_0 \sim \frac{V_a N_0 \tau_c}{\tau} (x - 1)$$

$$x = \frac{W_p}{W_{pc}}$$

Il comportamento in generale di N e q al variare del pompaggio. Chiaramente il numero di fotoni ha una saturazione, che non è contemplata in questa semplice trattazione (non possiamo estrarre dalla cavità più fotoni di un tot).

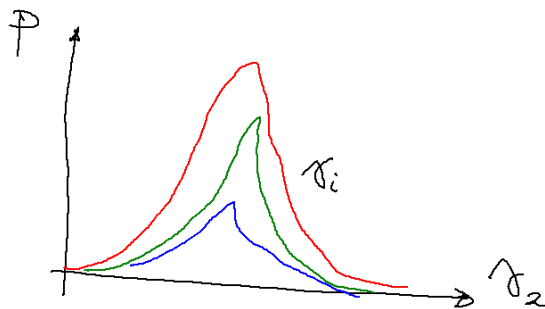


La potenza di uscita nello specchio 2, possiamo costruirla in modo qualitativo:

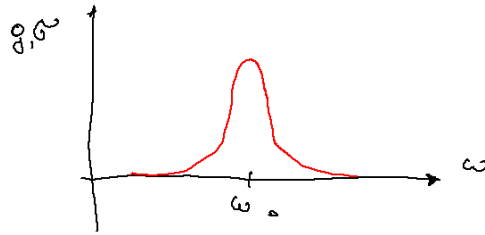
$$P_2 = h\nu q \frac{\gamma_2 c}{2L}$$

Dove il termine con γ_2 mi definisce l'unità di tempo per cui dividere l'energia.

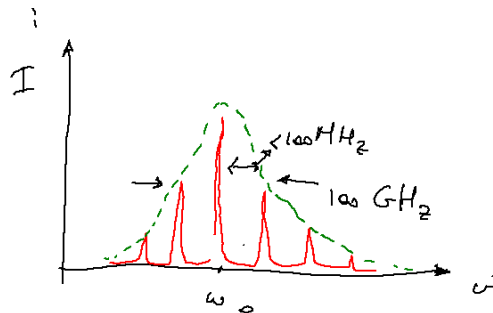
Almeno la perdita dallo specchio in uscita deve esserci. Bisogna trattare il problema dell'optical coupling. Quando progettiamo la migliore cavità possibile devo tenere conto della necessità contrastante di ridurre le perdite to cour, e quello di avere in uscita una forte radiazione. La tecnica è quella di scegliere la riflettività dello specchio in modo da massimizzare la potenza di uscita:



Un laser che lavora in continua avrà una riflettività molto elevata (mai sotto il 90 %). Che conseguenze ha il fatto che l'azione laser abbia necessità di una soglia. Il sistema attivo nello spazio delle frequenze emette in corrispondenza di una frequenza ω_0 , la quale risente di una serie di effetti di allargamenti di riga. Avremo una banda di emissione, o banda di guadagno. Quindi la sezione d'urto d'emissione stimolata è fatta in questo modo:

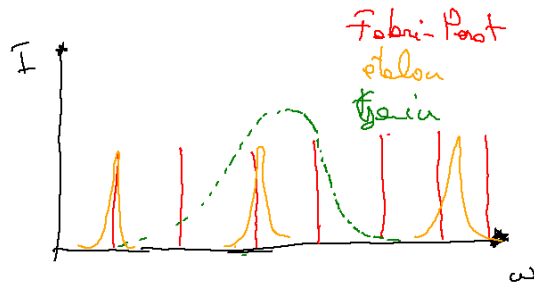


La larghezza della riga dipenderà dal tipo di sistema, nel caso di materia condensata $\delta\omega$ sarà molto grande. Le condizioni al contorno imposte dal risonatore ci daranno una serie di modi longitudinali, ciascuno dei quali a loro volta avranno un certo allargamento che dipende da τ_c . L'azione combinata del mezzo attivo e del Fabrit-Perot fa sì che soltanto i modi longitudinali che si trovano in corrispondenza della riga di guadagno possono oscillare. Potranno raggiungere la soglia soltanto alcuni modi che cadono all'interno del Fabrit-Perot. Il risultato finale sarebbe una emissione del laser che è un'emissione multimodale:



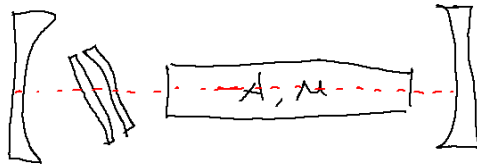
Può capitare che il numero di modi longitudinali siano qualche centinaio. Abbiamo un'emissione laser multimodale, infatti questo è il motivo principale per cui si possono vedere le oscillazioni nella funzione di coerenza del laser. Come si fa a far funzionare un laser multimodale in regime di singolo modo, ossia tale che il tempo di coerenza dipenda dalla trasformata di Fourier del singolo modo. In questo modo il tempo di coerenza sarebbe enormemente più lungo. Trasformare un laser in multimodale in un laser singolo modo può essere interessante. Anziché fare funzionare il laser con un solo Fabrit perot si usa un altro Fabrit perot. All'interno della cavità si piazza un altro sistema a due specchi paralleli tra loro che a sua volta costituisce un Fabrit-Perot. Se andiamo a riportare i due set di modi abbiamo: Possiamo scegliere la riflettività del Fabrit perot piccolo (detto etalon) in modo che il singolo modo sia molto più largo.

L'unico modo a passare è quello selezionato da tutti e tre i termini. Abbiamo fatto un'azione di filtraggio. Abbiamo aumentato moltissimo le perdite per i modi che non sono trasmessi anche dall'altro Fabrit Perot in modo che non



raggiungano mai la soglia. Oscillano solo le autofunzioni del primo e del secondo Fabry-Perot.

Sfruttiamo il fatto che l'emissione laser è un processo a soglia, per tale fortemente non lineare, e introduciamo delle perdite selettive. Aver aggiunto un altro Fabry-Perot mi comporta il fatto di aver in realtà più di due cavità (tutte le possibili interfacce a due specchi). Per evitare questo problema si angola leggermente l'etalon:



Il filtro in questo modo sarà in grado di lavorare ugualmente, ma abbiamo eliminato in questo modo l'accoppiamento di tutti gli altri specchi lasciando solo due cavità. Non è la stessa cosa di metterlo fuori dalla cavità. Infatti messo fuori funzionerà come un filtro lineare, e agirà sul sistema già formato a molti modi. Viceversa quando lo mettiamo dentro la cavità agisce direttamente sulla creazione della soglia impedendo il raggiungimento della soglia per i modi che non soddisfano la sua condizione di risonanza. Quindi il processo deve essere fatto all'interno del processo non lineare. (Se lo facciamo fuori il processo sarebbe enormemente in perdita e poco efficiente).

Lo stesso discorso può essere fatto per i modi trasversali. Bisogna introdurre delle perdite selettive sui k . Le perdite di questo caso saranno perdite per diffrazione.

Possiamo mettere un'apertura nella cavità, una sorta di ghigliottina che mi permette l'oscillazione del solo modo TEM_{00} . Le perdite introdotte per diffrazioni giocano ancora il ruolo di evitare che i modi trasversali di ordine superiore raggiungano la soglia.

Allo stesso modo è molto sconveniente piazzare questo filtro fuori dalla cavità laser, in quanto introdurremo delle perdite su tutto il sistema, abbattendo anche molto l'intensità del segnale. Si può pensare di ottenere il singolo modo longitudinale diminuendo la lunghezza della cavità, in modo che all'interno della riga di guadagno ce ne capiti una sola (questo può essere fatto usando soltanto i gas, che hanno bande di guadagno sufficientemente strette).

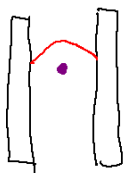
Questo può essere portato al regime di laser microscopico. Parliamo di microlaser (o microcavità).

2.4 Microlaser

La cavità microscopica è una cavità la cui distanza è

$$d = n \frac{\lambda}{2}$$

con n di ordine 1. È un Fabrit Perot di dimensioni microscopiche. Negli anni 80 la Cavity QED era una assoluta novità. Il processo di emissione spontanea all'interno di un risunatore di una microcavità può venire fortemente alterato. Riamiano a pensare al microlaser. È un laser microscopico con specchi che si toccano quasi con un mezzo attivo che sta in mezzo. Un singolo atomo di questo mezzo attivo nel centro. La distribuzione del campo stazionario nella cavità è massima al centro ed è nulla tra i due specchi, quindi

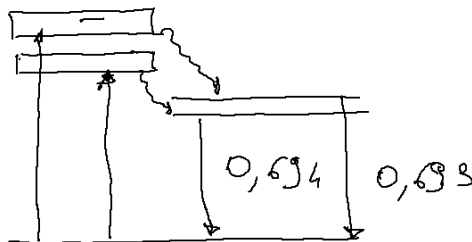
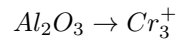


Questo atomo non emette più su tutto l'angolo solido, ma le condizioni al contorno lo obbligano ad emettere nell'unico modo possibile permesso dalla cavità. L'emissione spontanea normalmente è un effetto di perdita, perché quello che esce fuori ce lo siamo persi. Se invece avviciniamo gli specchi, ammazziamo tutti i possibili canali di uscita. L'atomo è costretto ad emettere sul singolo modo longitudinale. L'emissione spontanea può essere alterata alterando l'environment.

Immaginiamo che oltre a questo atomo ce ne sia un altro identico. Anche lui può emettere sull'unico modo del campo. Ci troviamo in una condizione per la quale su quell'unico modo del campo possono emettere. La soglia di questo laser è infinitamente bassa, bastano due fotoni per avere un azione coerente.

2.5 Cenni sull'ingegneria del laser

Il laser al rubino sfrutta una proprietà del drogaggio con gli ioni Cromo che dà il rosso al rubino. Il livello di percentuale è tale che si hanno 10^{21} ioni cromo. Si sfrutta la transizione dello ione cromo. Si ha la struttura cristallina dello ione. La transizione avviene tra il livello fondamentale e due livelli allargati, centrati circa tra le due lunghezze d'onda $0.42 \mu\text{m}$ e $0.52 \mu\text{m}$. L'emissione avviene tra due livelli metastabili:



Un altro sistema laser a stato solido è detto il neodimio di Yag. Il neodimio è una terra rara. Questa emette nell'infrarosso attorno a un micro. Lo Yag è un cristallo sintetico. Questo è un tipico sistema a quattro livelli.

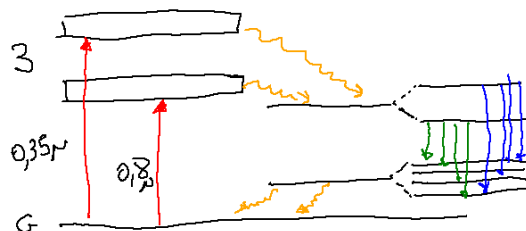


Figura 2.8: Laser a Neodimio Yag

Il neodimio potrebbe fare la stessa cosa in un altro tipo di materiale, come un vetro, abbiamo un neodimio glass. In questo caso gli oggetti abbiamo un allargamento forte di tipo inhomogeneo. In questo caso quindi la riga emessa è molto più grossa. Passando ai sistemi gassosi forse il più interessante è l'He-Ne.

Il laser He-Ne ha una miscela molto strana, il ruolo dell'Helio fa da buffer per il neon.

Un altro laser interessante è quello ad Argon. Andiamo a vedere le transizioni dal livello eccitato degli ioni con una scarica elettrica. Prima eccitiamo

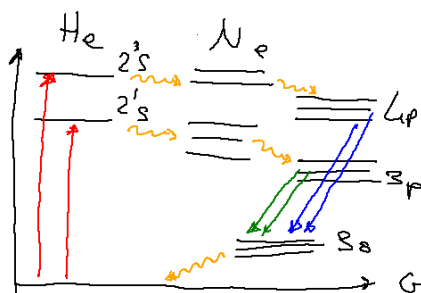


Figura 2.9: Funzionamento del laser He-Ne, l'Helio presente in quantità maggiori risuona con il neon.

l'atomo, facendolo ionizzare, e poi eccitando lo ione. Questa maggiore energia fa sì che questo tipo di laser possa emettere a frequenze maggiori, anche nell'ultravioletto.

Si parla di laser al Titanio-Zaffiro, questo è un meccanismo in cui l'emissione avviene su delle vere e proprie bande, ed è estremamente tunabile.

2.6 Mode Locking

Abbiamo mezzi attivi con differenti larghezze di guadagno. È ovvio che una banda larga può oscillare su una banda larga. Questa volta anziché preoccuparci di selezionare la singola riga longitudinale e fare un tempo molto lungo, un laser con una riga molto stretta che ha come obiettivo la spettroscopia. Se vogliamo fare interferometria che coinvolga un alto tempo di coerenza.

Immaginiamo di avere un laser che lavori su molti modi longitudinali.

Supponiamo di fare un'analisi in frequenza di questi modi, il cui involucro mi dà la forma della riga del mezzo attivo. Se non facciamo nulla non si può creare una relazione di fase tra i modi oscillanti. Questo set discreto di modi di onde piane. Se lo prendiamo nel dominio del tempo quello che avviene è che è un andamento caotico nel tempo. Questo è il risultato della sovrapposizione di N modi che non hanno relazione di fase tra di loro. Possiamo esprimere il campo totale:

$$E = \sum_n E_n e^{i[\omega_n(t - \frac{z}{c}) + \phi_n]} + c.c.$$

$$\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega$$

$$\Delta\omega = 2\pi \left(\frac{c}{2L} \right)$$

$$E(t) = e^{i\omega_0(t - \frac{z}{c})} \sum_n E_n e^{i[n\Delta\omega(t - \frac{z}{c}) + \phi]}$$

Se vogliamo giustificare la forma temporale dobbiamo vedere l'intensità del tempo del campo elettromagnetico. L'intensità totale è semplicemente la somma

delle intensità di tutti i contributi, perché i termini incrociati hanno media temporale nulla (a causa della fase di ϕ).

Se ci fosse un meccanismo per far mantenere una relazione di fase tra un modo e il successivo allora il discorso cambierebbe, poiché tutti i termini incrociati non si annullano più. Il *mode-locking* vuol dire aggancio dei modi, ossia che bisogna creare nella stessa azione laser una situazione per far sì che si stabilisca una fase costante tra i vari termini. La situazione completamente differente mi da un singolo impulso molto stretto. Il laser smette di essere un laser in continua (non è più in un regime in cui il laser occupa lo specchio da una all'altro). La durata di questo pacchetto è l'inverso di $\Delta\nu$. Possiamo avere impulsi molto corti. Da un laser in continua si passa ad un laser che genera impulsi che sono tanto più corti, tanto più larga è la banda del mezzo attivo. Ci aspettiamo impulsi molto più corti nel caso di un laser agli stati solidi. Possiamo arrivare ad impulsi che hanno una durata in banda ottico di pochissimi femtosecondi. Arriviamo a impulsi che sono i più corti che si possono fare.

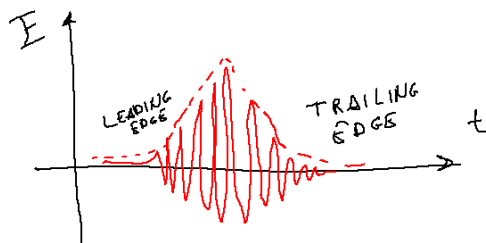
Questo pacchetto può essere di appena 30 micron. Dalla cavità esce un treno di impulsi distanziati esattamente da un Round-Trip. Abbiamo un Clock perfetto. Il mode-locking viene dimostrato sperimentalmente una decina di anni dopo. Si arriva fino agli atto-secondi nei raggi X.

Impulsi corti permettono di andare ad interrogare le dinamiche dal punto di vista temporale. Si possono fare spettroscopie nel tempo, non più solo in frequenza. È come se avessimo una potente videocamera con un tempo di esposizione con tempi brevissimi. Possiamo andare a misurare oggetti piccolissimi. Un impulso porta energie piccole ma potenze altissime, quindi con potenza di picco elevatissimo che possa avere.

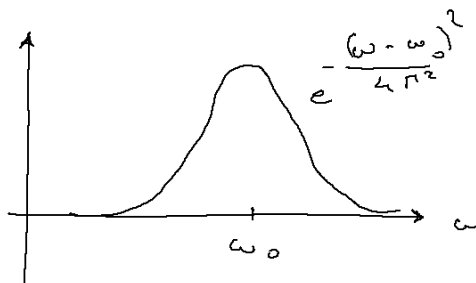
Il mode-locking può essere fatto in vari modi, esiste mode-locking attivo o passivo, si può giocare su perdite che variano nel tempo. Tra le varie conseguenze bisogna fare i conti con il fatto che un impulso lungo pochi femtosecondi ha uno spettro larghissimo, cosa succede quando questo impulso si propaga in un mezzo dispersivo? L'impulso si spappola. Vedremo in seguito nel dettaglio questa trattazione.

2.7 Propagazione di un impulso ottico

Cosa avviene quando un impulso in regime lineare si propaga in un mezzo di questo tipo. Immaginiamo di partire da un impulso gaussiano, il cui campo ha un'evoluzione del tipo:



Questo impulso ha una frequenza costante lungo tutto l'impulso. Se stiamo parlando di un impulso molto corto, lo spettro in frequenza sarà molto largo:



Tutte le frequenze contenute all'interno di questo spettro viaggiano e sono contemporaneamente presenti tutte quante. Quando stiamo in una situazione del genere possiamo dire che l'impulso è in perfetta trasformata di Fourier. La durata dell'impulso del tempo è la più corta possibile per un dato spettro della lunghezza Γ .

Consideriamo un impulso gaussiano di durata pari a $\Delta t = 10^{-12} s$

$$\Delta\nu = 4.41 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

Se $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$, con $\nu_0 = 4.84 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 10^{-3}$$

Se l'impulso invece è lungo

$$\Delta t = 10 \text{ fs} \quad \implies \quad \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 10^{-1}$$

Cosa succede quando consideriamo un impulso corto che si propaga in un mezzo. Consideriamo un impulso gaussiano, che possa essere scritto come:

$$E = E_0 e^{-\Gamma t^2 + i\omega_0 t}$$

Un impulso transform limited è un impulso per cui la fase dipende linearmente dal tempo. Per un impulso gaussiano il prodotto. Gaussiana.

$$k = \Delta t \Delta\nu = 0.44$$

Per la forma esponenziale:

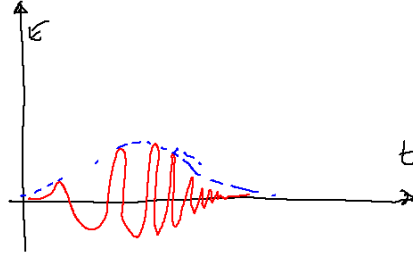
$$k_{exp} = 0.14$$

Per la forma di secante iperbolica:

$$k_{sech} = 0.31$$

Per un impulso rettangolare

$$k_{rett} = 0.892$$



Nel caso di una lorentziana

$$k_{\text{lorentz}} = 0.14$$

Un impulso *chirped* è un impulso che non è transform limited. Un impulso chirpato è fatto in questo modo:

Vediamo arrivare il rosso prima del blu in questo impulso. Il Leading Edge è più rosso del Trailing edge. Se facciamo propagare la luce in un mezzo dispersivo come il vetro, dove l'indice di rifrazione non è costante a tutte le lunghezze d'onda. Il rosso viaggia più rapidamente del blu, quindi l'impulso viene chirpato.

Il chirping si prende in considerazione come la derivata della fase.

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt}$$

$$E_0 e^{-[\Gamma t^2 + i\omega_0 t + \alpha t^2]}$$

Uno spettro molto ampio non implica che l'impulso sia molto corto, non è detto che l'impulso sia chirpato.

$$E = \mathbb{R}(E_0 e^{-\Gamma t^2 + i\omega_0 t}) \quad \xrightarrow{\text{F.T.}} \quad E_0(\omega) = e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{4\Gamma}\right)^2}$$

Facciamo propagare la funzione di un tratto x :

$$E(\omega, x) = E_0(\omega) e^{\pm i k(\omega)x} \quad k(\omega) = \frac{n\omega}{c}$$

$$k(\omega) = k(\omega_0) + k'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k''(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

$$k' = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} \quad k'' = \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}$$

Questo possiamo farlo se $\Delta\omega \ll \omega_0$

$$E(\omega, x) \propto e^{-[ik(\omega_0)x - ik'x(\omega - \omega_0) - \left(\frac{1}{4\Gamma} + \frac{1}{2}k''\right)(\omega - \omega_0)^2]}$$

Abbiamo sostituito a k questa espressione. I termini con k'' vengono raggruppati insieme a questo. Facciamo una trasformata di Fourier inversa:

$$E(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, x) e^{i\omega t} d\omega$$

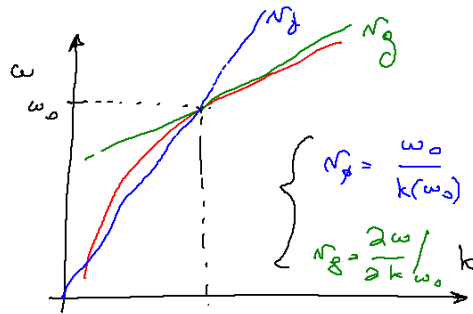
$$E(t, x) = \sqrt{\frac{\Gamma(x)}{\pi}} e^{i\omega_0 \left(t - \frac{x}{v_\phi(\omega_0)}\right)} e^{-\Gamma(x) \left(t - \frac{x}{v_g(\omega_0)}\right)^2}$$

Dove abbiamo introdotto la velocità di fase v_ϕ e velocità di gruppo v_g :

$$v_\phi(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)} \quad v_g(\omega_0) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{\omega=\omega_0}$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma} + 2ik''x$$

L'argomento del primo esponenziale è un termine di fase che viene ritardato di un fattore x/v_ϕ . L'involuppo gaussiano è ritardato di un termine che è determinato dalla velocità di gruppo. Tutto il pacchetto corrispondente al trasporto di energia viaggia più lentamente. Se vogliamo andare a rappresentare uno spazio ω vs k :



Ricordando che k è il numero d'onda

$$k = \frac{2\pi}{n\lambda} \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega n(\omega)}$$

$$v_\phi = \frac{c}{n(\omega)}$$

$$v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{c} \left[n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right]}$$

$$v_g \sim v_\phi \left[1 - \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn}{d\omega} \right]$$

Da cui

$$k'' = \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{d}{d\omega} \frac{1}{v_g(\omega)}\right)_{\omega=\omega_0}$$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\frac{1}{\Gamma} + 2ik''x} = \frac{\Gamma}{1 + 2i\Gamma k''x}$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma}{1 + \xi^2 x^2} - i \frac{\xi x}{1 + \xi^2 x^2}$$

$$\xi = 2\Gamma k''$$

Nell'ultimo esponenziale in cui c'era $\Gamma(x)$

$$e^{-\Gamma(x)\left(t-\frac{x}{v_g}\right)^2} = e^{-\frac{\Gamma}{1+\xi^2 x^2}\left(t-\frac{x}{v_g}\right)^2 + i\frac{\xi x}{1+\xi^2 x^2}\left(t-\frac{x}{v_g}\right)^2}$$

La parte reale è ancora una funzione gaussiana ritardata, inoltre la gaussiana è allargata. La parte immaginaria contiene un termine di fase modificato quadratico nel tempo, quindi è un termine di chirping. Se abbiamo un mezzo che si propaga in un mezzo a dispersione normale abbiamo come effetti, un ritardamento dell'impulso, un allargamento temporale e un chirp in frequenza.

Questo è solo un tipo di chirping, quello in cui nel leading edge c'è una prevalenza di rosso, rispetto al trailing edge dove c'è una prevalenza di blue. Questo tipo di chirping si chiama chirping positivo. È possibile immaginare un chirping negativo, in cui il blu arriva prima del rosso. Esistono vari tipi di vetri, tutti questi nella regione del visibile hanno un andamento che cresce $n(\omega)$. Per bassi n (come il quarzo fuso) è quasi costante. Si arriva fino ai vetri drogati con titanio. Gli effetti in regime lineare può introdurre distorsioni profonde in un impulso. Gli specchi a multi layer sono fatti a molti strati. Il numero di layer può essere molto grande. Ciascuno di questi layer ha differenze di tipo $\lambda/4$. Ciascuno di questi introduce uno shift di fase. Si possono creare delle condizioni per cui il comportamento globale possa avere una dipendenza della fase violentissima. In certi casi si preferisce usare specchi metallici che non presentano questo effetto qui.

Questi effetti possono essere controllati. Il tempo di coerenza è la durata dell'impulso stesso in transform limited. La durata dell'impulso è la durata di tutto il pacchetto luminoso. Se l'impulso è chirped la durata dell'impulso sarà maggiore del tempo dell'impulso. Se facciamo lavorare una coppia di reticoli in riflessione. Questi reticoli possono essere usati in modo da introdurre una dispersione anomala. La stessa cosa può essere fatta usando una coppia di prismi. Questo sistema è privo di perdite. Una coppia di prismi viene usata nei laser che funzionano al femtosecondo.

Capitolo 3

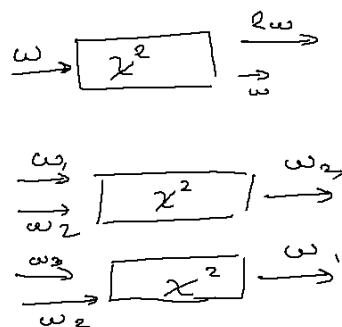
Ottica non lineare

Nell'ambito dell'ottica non lineare c'è una vastissima gamma di fenomeni. Focalizzeremo la nostra attenzione su alcuni aspetti importanti, dal punto di vista storico, delle prospettive. Nell'ambito degli effetti non lineari del secondo ordine utilizzeremo un formalismo semiclassico che ci permette di dare una visione unificante dei principali effetti di ottica non lineare del secondo ordine (Generazione di seconda armonica, generazione della frequenza somma, generazione della frequenza differenza). Questo ultimo fenomeno apre le porte all'amplificazione parametrica, la cui applicazione ha consentito lo studio della formazione di coppie di fotoni quantistici.

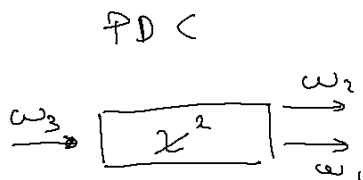
Per quanto riguarda gli effetti non lineari del terzo ordine, concentreremo l'attenzione sugli effetti che non comportano un cambio di frequenze, nei quali la non linearità si manifesta attraverso un cambiamento dell'indice di rifrazione. Parleremo di effetti come self-focusing e self-phase-modulation, ed effetto raman stimolato.

Vediamo una breve panoramica sugli effetti del secondo ordine. Stiamo parlando di effetti a tre campi, di cui due sono normalmente i campi in ingresso e uno in uscita (anche se esistono casi come la fluorescenza parametrica in cui c'è un campo in entrata e due campi in uscita).

Quando immettiamo due campi di frequenza ω e otteniamo 2ω , oppure immettiamo ω_1 e ω_2 in un mezzo non lineare otteniamo un terzo campo a frequenza ω_3 (sum frequency generation), oppure con ω_1 in uscita e ω_2 e ω_3 in uscita. In questi tre casi abbiamo che lo stato finale sia univocamente determinato.



Invece nella PDC, abbiamo una condizione, con una probabilità piccolissima, il fotone entrante si annichila spaccandosi in due stati finali più piccoli. Questo effetto è spontaneo, possiamo comprendere quello che avviene, ma rigorosamente questo processo può essere giustificato quantizzando il campo.



Come si vede in questo processo ω_2 e ω_1 non sono univocamente determinati, l'unica condizione è che $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$.

Il termine di PDC rappresenta un caso particolare della difference frequency generation, in cui uno dei campi di ingresso è dato dallo stato di vuoto.

Quando facciamo queste considerazioni energetica stiamo supponendo che i materiali debbano presentare determinate regole di simmetria, inoltre deve essere trasparente alle frequenze in gioco.

Generare la frequenza somma vuol dire che due fotoni portano il sistema in uno stato virtuale, e poi il sistema è riportato nello stato fondamentale.

Abbiamo delle polarizzazioni che sono nelle loro componenti non lineari. Da questo momento in poi considereremo i termini di ordine superiore:

$$P^T = P^{(Lin)} + P^{(Nonlin)} = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \dots$$

Normalmente l'uso della χ^2 e della χ^3 permette di trattare qualunque processo non lineare. Possiamo ottenere 5ω come frequenza usando generazione di seconda armonica a cascata, piuttosto che usando la generazione di quinta armonica.

L'ottica non lineare nasce subito dopo il laser. Gli effetti che si possono studiare hanno bisogno della coerenza e della brillantezza che solo le sorgenti laser possono dare. Il primo effetto non lineare dimostrato è stato fatto l'anno dopo della scoperta del laser.

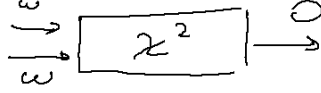
C'è un altro effetto non lineare del secondo ordine minore, ed è l'inverso della seconda armonica. Possiamo immaginare di fare la differenza tra due frequenze uguali:

Questo effetto si chiama OR (Optical Rectification). Questo processo mi genera una differenza di potenziale (un campo elettrico continuo), o radiazione a bassissima frequenza).

Analogamente possiamo ottenere la polarizzazione al terzo ordine:

$$P^{(3)}(t) = \chi^{(3)} E^3(t)$$

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t)$$



$$\cos^3(\omega t) = \cos(\omega t) \cos^2(\omega t) = \cos(\omega t) [\cos(2\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{4}(3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t))$$

L'aver potuto sviluppare il coseno al cubo abbiamo un termine che va come 3ω , nel secondo un termine ω . La generazione di terza armonica è veramente poco importante, poiché lo stesso effetto può essere ottenuto combinando due generazioni di seconda armonica.

Molto più interessante è il termine che oscilla ad ω , questo effetto modula le caratteristiche dielettriche del mezzo. Questa è un automodulazione, si presenta in varie forme. Questo è un impulso che passa attraverso questo mezzo. Questo impulso cambia l'indice di rifrazione del mezzo, quindi la fase cambia e si agiusta sulla intensità dell'impulso stesso. L'indice di rifrazione può aumentare in funzione dell'intensità, quindi il fascio varia l'indice di rifrazione più verso il centro del fascio che verso le code. Questo impulso entra nel mezzo gaussiano, vede un indice di rifrazione pari ad una lente convergente, abbiamo un effetto di self-focusing. Tuttavia la diffrazione tenderà ad allargarmi il fascio. Ad un certo punto i due effetti si bilanciano esattamente.

Dalla frequenza centrale dell'impulso creiamo delle bande laterali dell'impulso, è la non linearità che crea nuove frequenze. Globalmente abbiamo una cosa lunga, non regolare, con frequenze nuove, con un chirping molto presente. Possiamo ricompattare l'impulso, possiamo creare impulsi più corti rispetto a quello di ingresso. Possiamo avere l'analogo dell'effetto Kerr, solo che possiamo farlo in un laser, abbiamo la possibilità di orientare questi dipoli grazie al campo elettrico del laser. Possiamo avere un effetto tutto ottico Kerr. Aprire e chiudere porte ottiche. Se sfruttiamo una non linearità del tipo elettronica, possiamo fare un effetto Kerr estremamente rapido, o effetti Kerr giganti ma che lavorano con macromolecole (cristalli liquidi).

3.1 Polarizzazione non lineare

Esprimiamo il campo totale del processo non lineare scritto in questa maniera:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{E}_n(\vec{r}, t)$$

Il generico campo possiamo scriverlo come:

$$E_n(t) = E_n e^{-i\omega_n t}$$

$$E_n^{(-)} = E_n^{(+)*} = E_m^* e^{i\omega t}$$

$$E_n = A_n e^{ik_n r}$$

$$\vec{E}(-\omega_n) = \vec{E}(\omega_n)^* \quad A(-\omega_n) = A(\omega_n)^*$$

$$\vec{E}(r, t) = \sum_n \vec{A}_n e^{i(k_n r - \omega_n t)} + c.c. = \sum_n \vec{A}(\omega_n) e^{i(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - \omega_n t)}$$

Possiamo anche esprimerla come:

$$E(\vec{r}, t) = \sum \cos(k_n r - \omega_n t)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2} \sum e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad E(-\omega) = \frac{1}{2} \sum e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Fatta questa precisazione passiamo alla polarizzazione:

$$\vec{P}(r, t) = \sum_n \vec{P}(\omega_n) e^{-i\omega_n t}$$

Questo termine avrà in se tutti gli effetti a tutte le possibile componenti del processo di secondo ordine, studiamo solo ad esempio il termine di somma:

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \sum_{ik} \sum_{nm} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m)$$

In questa figura gli argomenti della $\chi^{(2)}$ sono così distinti: il primo argomento è la frequenza uscente, le altre sono le frequenze entranti:

Il termine $\chi^{(2)}$ è un tensore di rango 3. Il primo problema è di conoscere le componenti di questo tensore dato un certo materiale. Potremo ridurre moltissimo il numero di questi elementi. Facciamo l'esempio della sum frequency generation:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$P_i(\omega_3) = \sum_{jk} \left[\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) + \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1) E_j(\omega_2) E_k(\omega_1) \right]$$

Da cui possiamo usare la proprietà di permutazione:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_m + \omega_n, \omega_m, \omega_n) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_m + \omega_n, \omega_n, \omega_m)$$

Da cui otteniamo

$$P_i(\omega_3) = 2\chi_{ijk}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2)$$

A seconda della polarizzazione del campo che ho a disposizione vado a interessare differenti componenti del tensore χ .

La stessa cosa può essere fatta per il processo di generazione di seconda armonica.

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \rightarrow 2\omega = \omega + \omega$$

Ripetendo tutto il procedimento si arriva ad un termine:

$$P_i(\omega_3) = \sum_{ij} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_1) E_j(\omega_1) E_k(\omega_1)$$

La differenza tra questi due termini è data solo dal fattore 2 che in questa formula non è presente rispetto alla sum frequency generation. Nella generazione di seconda armonica abbiamo un solo campo. Questo fattore 2 c'è in più nella sum frequency generation viene dal fatto che in quel caso c'è un termine in più.

Formule analoghe potremmo scriverle per la *difference frequency generation*.

3.1.1 Oscillatore di Lorentz anarmonico

Abbiamo necessità di capire qualcosa di più della suscettività non lineare. Riprendiamo il modello dell'oscillatore di Lorentz, e introduciamo un termine di anarmonicità. Scriviamo l'equazione di un oscillatore anarmonico :

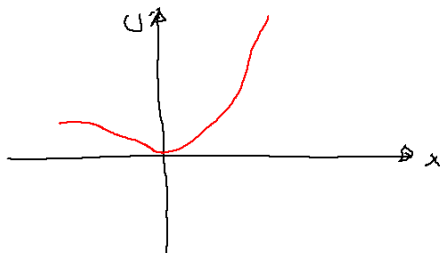
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x + ax^2 = -\frac{eE}{m}$$

Questa equazione va bene per i mezzi che *non* hanno simmetria di inversione. In questo oscillatore posso scrivere una forza di richiamo del tipo:

$$F_r = -m\omega_0^2 x - max^2$$

Se guardiamo l'energia potenziale:

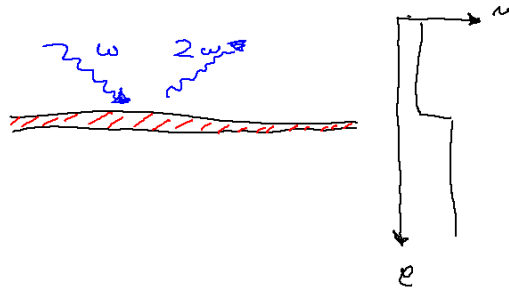
$$U = -\int F_x dx = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \underbrace{\frac{1}{3}max^3}_{\text{Anarmonicità}}$$



Questa anarmonicità ci dà la presenza di un'asimmetria, per questo è necessario che il mezzo non abbia simmetria di inversione.

Se però facciamo uno strato di pochi layer atomici del vetro nell'aria abbiamo una discontinuità. È possibile fare ottica non lineare del secondo ordine

da superficie, da interfaccia. In questo caso la $\chi^{(2)}$ è nulla ovunque tranne che nella origine. La cosa interessante è che andando a incidere campo laser, un segnale 2ω mi da informazioni estremamente selettive sulla superficie. Questo può essere utile per studiare le interfacce dei materiali. Questo può essere usato per far legare su un interfacce molecole organiche, posso avere informazioni sui legami di queste molecole, oppure possiamo vedere come evolvere una superficie che evolve nel tempo. Furono fatti esperimenti da silicio cristallino a cristallino amorfo, e si vedeva dalla risposta in seconda armonica nel dominio dei femtosecondi il materiale transisce da stato cristallino e amorfo.



Avremo un campo di tipo:

$$E(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c.$$

Supponiamo di poter usare un approccio perturbativo:

$$ax^2 < \omega_0^2 x$$

$$E(t) = \lambda E(t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + ax^2 = -\frac{\lambda e E(t)}{m}$$

$$x = \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_3 + \dots$$

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\gamma\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\frac{e E(t)}{m}$$

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\gamma\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + a [x^{(1)}]^2 = 0$$

$$\ddot{x}^{(3)} + 2\gamma\dot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} + 2a [x^{(1)} x^{(2)}] = 0$$

Dalla prima equazione si ottiene come soluzione (risultato già noto dall'ottica lineare):

$$x^{(1)}(t) = x^{(1)}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} + x^{(1)}(\omega_2) e^{-i\omega_2 t}$$

$$x^{(1)}(\omega_{1,2}) = -\frac{e}{m} \frac{E_{1,2}}{\underbrace{\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2 - 2i\omega_{1,2}\gamma}_{D(\omega)}}$$

Con questa espressione possiamo prederla e sostituirla nella seconda. Quindi abbiamo la possibilità di avere termini in cui il campo gioca due volte, abbiamo tutte le combinazioni tra ω_1 e ω_2 . Ci troviamo come conseguenza tutti i termini di somma o differenza delle frequenze.

Concentriamo la nostra attenzione su un caso particolare, quello di seconda armonica:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\gamma\dot{x}^{(2)}\omega_0^2 x_0^{(2)} = -\frac{a \left(\frac{eE_1}{m}\right)^2 e^{-2i\omega_1 t}}{D^2(\omega_1)}$$

Questo mi permette di cercare una soluzione per $x^{(2)}$, ad esempio:

$$x^{(2)}(t) = x^{(2)}(2\omega_1)e^{-2i\omega_1 t}$$

Che risulta da:

$$x^{(2)}(2\omega_1) = -\frac{a \left(\frac{e}{m}\right)^2 E_1^2}{D(2\omega_1)D^2(\omega_1)}$$

Analogamente per tutti gli altri termini. Proviamo a scrivere quello per la frequenza somma:

$$x^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{-2a \left(\frac{e}{m}\right)^2 E_1 E_2}{D(\omega_1 + \omega_2)D(\omega_1)D(\omega_2)}$$

Lo scopo finale è quello di arrivare alla forma della $\chi^{(2)}$. Passiamo alle suscettività, avremo che:

$$\chi^{(1)}(\omega_1) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{D(\omega_1)}$$

Che si ricava dall'espressione:

$$P^{(1)}(\omega_1) = -ex^{(1)}(\omega_1)N$$

Allo stesso modo ricaviamo la suscettività al secondo ordine:

$$P^{(2)}(2\omega_1) = \chi^{(2)}(2\omega_1, \omega_1, \omega_1)E^2(\omega_1) \quad P^{(2)}(2\omega_1) = -Nex^{(2)}(2\omega_1)$$

Da cui otteniamo

$$\chi^{(2)}(2\omega_1, \omega_1, \omega_1) = \frac{N \frac{e^3}{m^2} a}{D(2\omega_1)D^2(\omega_1)}$$

Possiamo esprimere la $\chi^{(2)}$ in termini della $\chi^{(1)}$

$$\chi^{(2)}(2\omega_1, \omega_1, \omega_1) = \frac{ma}{N^2 e^3} \chi^{(1)}(2\omega_1) \left[\chi^{(1)}(\omega_1) \right]^2$$

Andando avanti con questo set di equazioni potremo trovare la $\chi^{(3)}$.

Fermiamoci agli effetti del secondo ordine nei mezzi non centro simmetrici. Soffrermiamoci su una regola euristica (regola di Miller).

$$\frac{\chi^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2)}{\chi^{(1)}(\omega_1 + \omega_2)\chi^{(1)}(\omega_1)\chi^{(1)}(\omega_2)} = \frac{ma}{N^2 e^3}$$

Questo rapporto è circa costante, infatti:

$$N \sim 10^{22} \text{ cm}^3$$

Il termine a cambia poco, lo possiamo valutare dai contributi lineari e non lineari della forza di richiamo. In questa situazione il termine:

$$m\omega_0^2 d \sim mad^2$$

Questo ci permette di dare una stima dell'ordine di grandezza della $\chi^{(2)}$. In questi settori la $D(\omega) \sim \omega_0^2$, $N \sim \frac{1}{d^3}$, $a \sim \frac{\omega_0^2}{d}$. La $\chi^{(2)}$ è dell'ordine di:

$$\chi^{(2)} \approx \frac{e^2}{m^2 \omega_0^4 d^4}$$

Prendiamo valori plausibili, siamo in banda ottica:

$$\omega_0 \sim 10^{16} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad d = 4 - 5 \text{ \AA} \quad e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ esv} \quad m = 9.1 \cdot 10^{-28} \text{ g}$$

$$\chi^{(2)} \sim 10^{-8}$$

$$\chi^{(3)} \sim 10^{-15}$$

Gli effetti ottici non lineari sono possibili solo del laser, che hanno campi molto intensi da permettere l'osservazione di questi fenomeni. La regola di Miller è una regola empirica che ci dice che il rapporto tra suscettività del secondo ordine e quella del primo ordine rimane costante in ordine di grandezza. È possibile ricavare l'ordine della $\chi^{(2)}$ prendendo il campo elettrico tipico del campo atomico:

$$E = \frac{e}{a_0^2} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ esl}$$

I due contributi:

$$\chi^{(1)} E_{atm} = \chi^{(2)} E_{atm}^2$$

$$\chi^{(2)} \sim \frac{\chi^{(1)}}{E_{atm}} \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ esl}$$

Questo rapporto viene più o meno mantenuto quando passiamo dalla $\chi^{(2)}$ alla $\chi^{(3)}$.

Se andiamo a considerare la non linearità del terzo ordine rientrano in gioco i mezzi centrosimmetrici. In questo caso se andiamo a riscrivere l'equazione di Lorentz otteniamo un oggetto del tipo:

$$F_r = -m\omega_0^2 x + mbx^3$$

Il potenziale di questa forza di richiamo:

$$U = \int F_r dx = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 - \frac{1}{2} nbx^4$$

Quindi la correzione anarmonica conserva la simmetria per inversione. Questa non linearità è presente anche nei mezzi centro-simmetrici. Gli effetti non lineari del secondo ordine in bulk sono prerogativa dei mezzi non centro simmetrici, non devono conservare la simmetria di inversione. I mezzi centrosimmetrici presentano tutti quanti non linearità del terzo ordine. Il vetro ad esempio è per sua natura isotropo (amorfo) e presenta forti effetti non lineari del terzo ordine (come la self-phase-modulation). La non linearità del secondo ordine è sempre elettronica, mentre per quella del terzo ordine possiamo avere tantissime origine, quella elettronica, orientazione molecolare, termica e altro. I più rapidi come tempi di risposta sono quelli di tipo elettronico, ma sono anche i meno intensi. Gli effetti più grossi sono quelli di tipo termico e orientazionale (come ad esempio i cristalli liquidi), ma sono molto lente. Una delle possibili realizzazioni riguarda la realizzazione di switch ottici.

3.2 Simmetrie

Rimaniamo nei dettagli della suscettività non lineare del secondo ordine.

Prendiamo il caso classico di tre frequenze $\omega_3, \omega_1, \omega_2$ dove $\omega_3 > \omega_1, \omega_2$. In linea di principio vanno determinati sei tensori:

$$\begin{array}{ccc} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_3, -\omega_2) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, -\omega_3, \omega_2) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, \omega_3, \omega_1) \\ \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, -\omega_1, \omega_3) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, -\omega_2, \omega_1) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1) \end{array}$$

Abbiamo per ogni tensore 27 termini, più i complessi coniugati, in totale 324 termini. per fortuna questo numero è possibile ridurlo sfruttando delle regole generali di simmetria. La prima è che lavoriamo con dei campi reali.

$$P_i(\vec{r}, t) = P_i(\omega_1 + \omega_2)e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + P_i(-\omega_1 - \omega_2)e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}$$

Affinché P_i sia un numero reale deve valere:

$$P_i(-\omega_1 - \omega_2) = P_i(\omega_1 + \omega_2)^*$$

Poiché vale che:

$$E_j(\omega_2) = E_j^*(-\omega_2) \quad E_k(\omega_2) = E_k^*(-\omega_2)$$

Questo implica che

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2, -\omega_1, -\omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)*}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2)$$

La seconda regola è la simmetria di permutazione:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2)E_j(\omega_1)E_k(\omega_2) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_2, \omega_1)E_k(\omega_1)E_j(\omega_2)$$

Questo perché gli indici j, k, m, n sono indici muti. L'altra assunzione è che assumiamo di lavorare in sistemi privi di perdite. In questo modo tutte le componenti di χ sono numeri reali.

Un'altra approssimazione è la simmetria di permutazione completa, abbiamo uno scambio simultaneo degli argomenti delle frequenze e indici cartesiane:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3)$$

Sappiamo già che (campi reali)

$$\chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3) = \chi_{jki}^{(2)*}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3)$$

E d'altra parte abbiamo che: (mezzi non assorbenti)

$$\chi_{jki}^{(2)*}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) = \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3)$$

Si dimostra che

$$ch_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1)$$

C'è una quinta regola di simmetria, che è la simmetria di Kleimann, se

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ll \omega_0$$

In prima approssimazione possiamo supporre che $\chi^{(2)}$ sia indipendente da ω .

Se stiamo lontani dalla frequenza propria dell'oscillatore, la frequenza cambia poco al variare di ω .

Possiamo tenere conto di questa serie di relazioni, e sfruttando queste simmetria i termini di cui tenere conto. Per non appesantire ulteriormente le notazioni si usa una notazione contratta.

Introduciamo il tensore:

$$d_{ijk} = \frac{1}{2}\chi_{ijk}^{(2)}$$

Se scriviamo la componente i esima della P :

$$P_i(\omega_1 + \omega_2) = \sum_{jk} \sum_{1,2} 2d_{ijk} E_j(\omega_1) E_k(\omega_2)$$

La simmetria di Kleeman ci dice:

$$d_{ijk} = d_{ikj}$$

Siccome per jk o kj è uguale si introduce l'indice l tale che:

$$jk = 11 \quad l = 1$$

$$jk = 22 \quad l = 2$$

$$jk = 33 \quad l = 3$$

$$jk = 23, 32 \quad l = 4$$

$$jk = 13, 31 \quad l = 5$$

$$jk = 12, 21 \quad l = 6$$

In questo modo i termini che rimangono sono molto pochi, la matrice che rimane è:

$$d_{il} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{26} \end{pmatrix}$$

Abbiamo ancora alcune regole di simmetria da usare, alla fine si ottiene una matrice:

$$d_{il} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{pmatrix}$$

Esistono poi tutta una classe di simmetria dei cristalli che fa sì che gli elementi di cui alla fine non nulli sono soltanto pochi. E poi non tutti questi termini servono per descrivere il fenomeno che vogliamo studiare, supponiamo di studiare la seconda armonica:

$$\begin{pmatrix} p_x(2\omega) \\ P_y(2\omega) \\ P_z(2\omega) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} d_{11} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x(\omega)^2 \\ E_y(\omega)^2 \\ E_z(\omega)^2 \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \end{pmatrix}$$

Di tutti questi termini a seconda di quali campi abbiamo ne utilizziamo solo alcuni. Andremo ovviamente ad utilizzare quelli che danno effetti più grossi, in particolare i termini che rispetteranno la condizione di *phase-matching* (affrontato più avanti).

Lo stesso tipo di relazione la possiamo scrivere nel caso della *sum frequency generation*. La scelta della polarizzazione è imposta dai termini del tensore d (e quindi dalla $\chi^{(2)}$).

3.3 Three wave mixing

Per descrivere analiticamente gli effetti di ottica non lineare dobbiamo scrivere un'equazione d'onda che mi tenga conto di questo effetto. Partiamo dalle equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{c\partial t} & \nabla \wedge \vec{B} &= \frac{\partial D}{c\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E} &= \frac{4\pi}{c^2}\partial_t^2 \vec{P} \\ \nabla \times \nabla E &= \nabla(\nabla E) - \nabla^2 E \end{aligned}$$

Nel vuoto $\nabla \cdot E = 0$. Questo non è strettamente vero perché $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ dove p è parte lineare e non lineare:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{NL} & \vec{D} &= \vec{D}^{(1)} + 4\pi\vec{P}^{NL} \\ \vec{D}^{(1)} &= \vec{E} + 4\pi P^{(1)} \\ \nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D}^{(1)} &= -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P^{NL}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Supponiamo di avere un mezzo non dispersivo privo di perdite.

$$D^{(1)} = \varepsilon^{(1)} \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\varepsilon^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P^{NL}}{\partial t^2}$$

Anche in questo caso scriviamo:

$$E(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{E}_n(\vec{r}, t)$$

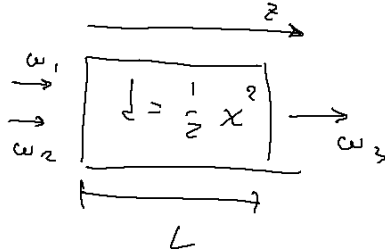
$$D^{(1)}(\vec{r}, t) = \sum_n D_n^{(1)}(\vec{r}, t)$$

$$P^{NL}(\vec{r}, t) = \sum_n P_n^{NL}(\vec{r}, t)$$

Questa equazione va scritta per ciascuna frequenza ω_n . In generale avremo che per ogni n :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_n + \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_n)}{c^2} \frac{\partial^2 E_n}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_n^{NL}}{\partial t^2}$$

Entriamo nello specifico. Prendiamo un mezzo non lineare, identificato dal tensore $d = \frac{1}{2}\chi^{(2)}$. La propagazione avviene collinearmente lungo l'asse z , e all'ingresso abbiamo i due campi a frequenza ω_1 e ω_2 , in uscita ω_3 , in generale il cristallo ha lunghezza L



$$P_3(z, t) = P_3 e^{-i\omega_3 t} + c.c. \quad P_3 = 4dE_1 E_2$$

Stiamo considerando frequenze distinte. Possiamo togliere la notazione vettoriale perché la propagazione avviene lungo z .

$$P_3 = 4dA_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)z} e^{-i\omega_3 t}$$

Dovremo esplicitare tutti questi termini, sostituendo il laplaciano quadro al posto del rotore (trascuriamo il termine di divergenza che è piccolo).

$$-\partial_z^2 \left(A_3 e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} \right) + \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_3)}{c^2} \partial_t^2 \left(A_3 e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} \right) = -\frac{4\pi}{c^2} \partial_t^2 \left[4dA_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)z - i\omega_3 t} \right]$$

Il termine k_3^2 può essere riscritto:

$$k_3^2 = \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_3)\omega_3^2}{c^2}$$

La derivata rispetto a z può essere fatta:

$$\partial_z \left[A_3 e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} \right] = (\partial_z A_3 + ik_3 A_3) e^{i(k_3 z - \omega_3 t)}$$

$$\partial_z^2 \left[A_3 e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} \right] = (\partial_z^2 A_3 + 2ik_3 \partial_z A_3 - k_3^2 A_3) e^{i(k_3 z - \omega_3 t)}$$

Analogo discorso per il tempo:

$$\partial_t^2 \left[A_3 e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} \right] = -\omega_3^2 A_3 e^{i(k_3 z - \omega_3 t)}$$

$$\left[-\partial_z^2 A_3 - 2ik_3 \partial_z A_3 + k_3^2 A_3 - \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_3)\omega_3^2}{c^2} A_3 \right] e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} = \frac{16\pi d\omega_3^2}{c^2} A_1 A_2 e^{i(k_1 + k_2)z - i\omega_3 t}$$

I termine con k^2 si cancella con la derivata seconda fatta rispetto a t sostituendo l'espressione per k_3^2 data prima:

$$-\partial_z^2 A_3 - 2ik_3 \partial_z A_3 = \frac{16\pi d\omega_3^2}{c^2} A_1 A_2 e^{i(k_1 + k_2 - k_3)z}$$

Possiamo fare un'ulteriore approssimazione, che è la SVEA *Slow varying envelope approximation*. Questa approssimazione permette di dire che:

$$\partial_z^2 A_3 \ll k_3 \partial_z A_3$$

Che equivale a dire che il campo varia poco in una singola lunghezza d'onda.

$$\partial_z A_3 = \frac{8\pi id\omega_3^2}{k_3 c^2} A_1 A_2 e^{i\Delta k z}$$

Dove

$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$$

A questo punto possiamo scrivere direttamente l'equazione anche per A_1 e per A_2 :

$$\partial_z A_1 = \frac{8\pi id\omega_1^2}{k_1 c^2} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z}$$

Il fatto che A_2^* compaia complesso coniugato vuol dire che $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$, quindi dobbiamo prendere il termine complesso coniugato in A_2 (quello che ha un meno all'esponente).

$$\partial_z A_2 = \frac{8\pi id\omega_2^2}{k_2 c^2} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z}$$

Mettiamoci nell'ipotesi in cui A_1 e A_2 rimangano circa costanti. Supponiamo che A_1 e A_2 rimangano costanti. Consideriamo un processo non lineare a bassa efficienza. Il numero di fotoni che ciascun campo porta in questa interazione è un numero grande. Se l'interazione è a bassa efficienza si genererà un campo a efficienza molto bassa, ma il numero totale di fotoni cambia poco. Se ci fosse una forza efficienza dovremo anche considerare lo svuotamento dei campi entranti.

Il caso in cui si fa interagire un grosso campo laser con un debole campo (anche un singolo fotone). Non consideriamo variazioni rilevanti dei campi di ingresso.

Focalizziamoci sulla derivata di A_3 rispetto all'asse z , supponiamo $\Delta k = 0$:

$$A_3 \propto z$$

$$I_3 = f(z^2)$$

Abbiamo supposto una condizione di perfetto phase-matching. Dire $\Delta k = 0$ implica dire che c'è una relazione di fase tale che il mismatch di fase è nulla e che questa relazione si mantiene per distanze molto grandi. Immaginiamo di suddividere il cristallo in tante fettine, il campo si propaga e ciascuna fettina fornisce un effetto non lineare, ciascuno contributo elementare, quando $\Delta k = 0$ rimane in fase con i contributi generati subito prima e subito dopo, questo implica che stiamo mantenendo una coerenza di fase. Questo non è scontato che avvenga, infatti la velocità di fase alla frequenza ω_3 sarà diversa alla velocità di fase ω_1 , potrebbe bastare anche una brevissima propagazione che mi crea uno shift di fase che porta $\Delta k \neq 0$ in una larghezza macroscopica. Questa realizzazione del phase matching è critica.

Se non poniamo $\Delta k = 0$ dovremo integrare l'equazione tra 0 e L :

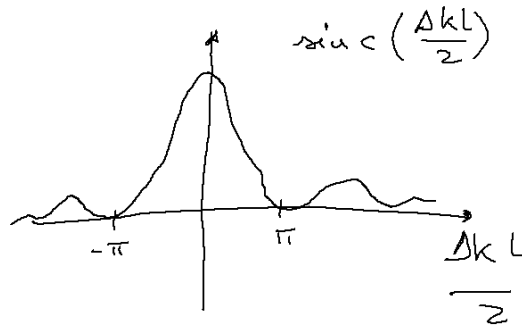
$$A_3(L) = \frac{8\pi i d \omega_3^2 A_1 A_2}{k_3 c^2} \int_0^L e^{i\Delta k z} dz$$

Troviamo che:

$$\int_0^L e^{i\Delta k z} dz = \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{i\Delta k}$$

A questo punto possiamo scrivere l'intensità del campo:

$$I_3 = |A_3|^2 \frac{n_3 c}{2\pi} = \frac{32\pi d^2 \omega_3^4 |A_1|^2 |A_2|^2 n_3}{k_3^2 c^3} \underbrace{\left| \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{i\Delta k} \right|^2}_{\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)^2}}$$



In breve:

$$I_3 \propto I_1 I_2 d^2 L^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)$$

L'intensità del campo prodotto dipende dal quadrato del tensore di suscettività, dal quadrato della L , ma soprattutto dipende in modo fortissimo dal Δk .

Definendo la lunghezza di coerenza:

$$L_c = \frac{2}{\Delta k}$$

Possiamo scrivere la funzione:

$$I_3 \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{L}{L_c} \right)$$

L'idea di far tendere Δk a zero mi porta ad avere L_c infinito, e quindi lunghezze macroscopiche di generazione dell'effetto. Tipicamente bastano pochi micron di cristallo per perdere completamente coerenza se non ci curiamo di diminuire il Δk . Siamo arrivati alle tre equazioni del Three Wave mixing. Prima di tutto se passiamo all'intensità possiamo controllare alcune relazioni:

$$I_i = \frac{n_i c}{2\pi} A_i A_i^*$$

$$\frac{dI_i}{dz} = \frac{n_i c}{2\pi} \left(A_i^* \frac{dA_i}{dz} + A_i \frac{dA_i^*}{dz} \right)$$

Se andiamo a scrivere la derivata del I_i :

$$\frac{dI_1}{dz} = \frac{n_1 c}{2\pi} \frac{8\pi d\omega_1^2}{k_1 c^2} (iA_1^* A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z} + c.c.) = 4d\omega_1 (iA_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta k z} + c.c.)$$

E analogamente:

$$\frac{dI_3}{dz} = -4d\omega_3 (iA_3 A_2^* A_1^* e^{-i\Delta k z} + c.c.)$$

La derivata di I_1 e di I_2 rispetto a zeta hanno lo stesso segno opposto a quella di I_3 . Questo dipende dalla relazione di fase dei campi. Se esprimiamo l'intensità totale.

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\frac{dI}{dz} = 3d \underbrace{(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)}_{=0} (iA_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta k z} + c.c.) = 0$$

Questo implica la conservazione dell'energia, c'è uno scambio completo di energia tra i campi in gioco. Possiamo ricavare le equazione di Manley-Rowe:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{I_3}{\omega_3} \right)$$

Possiamo ricavare che:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} + \frac{I_3}{\omega_3} \right) = 0$$

O analogamente:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} - \frac{I_2}{\omega_2} \right) = 0$$

Queste equazioni rappresentano una considerazione fisica importante. Esprimono la conservazione del numero di fotoni totali. Il processo microscopico è tra tre fotoni. La derivata del numero di fotoni di quelli ad ω_2 più quello ω_3 deve essere nulla. Infatti I/ω rappresenta il numero di fotoni per unità di superficie e unità di tempo. In una situazione di fasci gaussiani la sezione di fasci gaussiane a frequenze differenti può avere larghezze differenti, quindi questa considerazione vale a rigor di logica solo per onde piane, tuttavia possiamo sempre ricondurci al processo microscopico.

3.3.1 Sum frequency Generation

Riferiamoci ad un processo di un cristallo trasparente (non assorbe nessuna frequenza). Ci troviamo distanti dalle frequenze proprie, supponiamo una bassa dispersione.

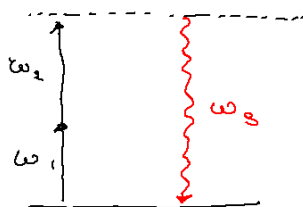


Figura 3.1: Schema della sum frequency generation.

Possiamo immaginare due casi in cui trattare il processo. Possiamo trattare l'interazione tra due grandi campi laser, ω_1 e ω_2 che creano un altro campo coerente e molto intenso alla frequenza ω_3 . Questo è il caso classico alla base del funzionamento di dispositivi che possono generare onde di uscita alla frequenza somma. Comportamento del tutto classico, che può essere risolto con tutte le interazioni. Tutte e tre le derivate a questo punto sono differenti da zero. Lo scambio di energia può essere così forte da osservare un grande decremento di energia per i vari campi. Questo è il caso dei dispositivi che generano nuove frequenze.

Un modo per utilizzare questo dispositivo è quello di far sì che entriamo in un sistema che genera un'altra frequenza (per esempio un SHG) e poi generare la frequenza somma:

Supponiamo per adesso di usare due laser, a frequenza differente ω_1 e ω_2 , e avremo in uscita $\omega_1 + \omega_2$.

Questo processo non lineare può essere così efficiente che la creazione del nuovo campo alla frequenza somma corrisponde ad un campo molto intenso, un vero proprio fascio laser (proprio per questo motivo non possiamo trascurare i decrementi di A_1 e A_2). Quindi non è detto che esista una soluzione analitica, ma per via numerica può essere sempre risolto.

Mettiamoci nella situazione in cui si può studiare una situazione analitica, un sottocaso particolare che si chiama *up conversion*. Questo è un caso parti-

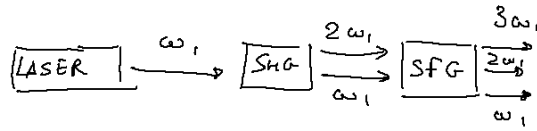


Figura 3.2: Schema del funzionamento semplice di un sistema a *sum frequency generation*.

colare della SFG. È il caso in cui uno dei tre campi in gioco risulta costante. Supponiamo costante o A_1 o A_2 . Questa situazione si verifica quando abbiamo un'interazione in ingresso del cristallo tra un campo laser robusto e un campo molto debole (al livello del singolo fotone). In questo caso, dal punto di vista di queste equazioni (supponiamo ω_2 campo classico robusto), A_2 è praticamente costante, poiché cambia in funzione di quanti fotoni riesce a mettere in gioco l'altro campo. Se A_2 è composto da centinaia di migliaia di fotoni e A_1 ne ha una decina, la variazione di A_2 è semplice. Questo caso può essere risolto analiticamente e ci aiuta a capire la fisica del sistema. Questo caso è molto utilizzato: C'è un esperimento particolare in cui dobbiamo voler rivelare un segnale molto debole in una regione spettrale in cui non abbiamo rivelatori e detector sufficientemente adeguati (caso tipico dell'infrarosso, intorno a qualche micron). Se il segnale che stiamo rivelando è l'effetto dovuto ad una eccitazione fononica nell'infrarosso, un plasmone, non abbiamo rivelatori di pochi fotoni nell'infrarosso. Il rivelatore per eccellenza è il fotomoltiplicatore, ma questo vale solo dove l'effetto fotoelettrico è possibile. In rivelazione possiamo voler trasformare questo segnale in un segnale visibile.

Facciamo interagire questo fascio laser con un campo opportuno, in modo che possiamo generare in uscita un campo che viene prodotto a frequenza somma, ad un angolo dettato dalle condizioni di phase-matching. Stiamo riportando le caratteristiche del segnale incognito dall'infrarosso, nel visibile.

Questo diventa una parte integrante del nuovo rivelatore, dato dal fotomoltiplicatore unito dall'effetto non lineare che si trova davanti. Chi ci dice che l'effetto non lineare non cambia le caratteristiche predominanti del segnale che vogliamo rivelare? Questo avviene perché ha una non linearità di origine di natura elettronica. Questo avviene per una deformazione della nube elettronica, andiamo a coinvolgere tempi di risposta brevissimi, e in quanto tali, la trasformazione non lineare è una trasformazione unitaria, mantiene pienamente la coerenza del segnale che stiamo studiando.

Questa applicazione ha un range di utilizzo nel campo della spettroscopia risolta in tempo o in frequenze, applicata a problematiche di fisica dei solidi, e anche nell'informazione quantistica. Questo mi permette di trasformare tutta l'informazione in un qbit di ingresso dall'infrarosso e portarla nel visibile. Immaginiamo che ci sia un quanto di infrarosso che si propaga su distanze molto

grandi, se vogliamo che questo quanto sia utilizzato e mantenuto in una memoria ottica, rappresentato da un sistema a due livelli nel visibile. Abbiamo un qbit nella regione delle lunghezze d'onda telecom e dobbiamo arrivare ad utilizzare una lunghezza d'onda ottica nel visibile. Possiamo utilizzare dispositivi del tipo di quello descritto. Questo è un salto di frequenza che permette di passare da una regione all'altra. È pensare che schemi di questo tipo possano essere usati in reti di regione quantistica.

Andiamo a vedere le equazioni per la *up-conversion*.

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{8\pi i d \omega_1^2}{k_1 c^2} A_2^* A_3$$

Mettiamoci nelle condizioni in cui c'è phase matching ($\Delta k = 0$). Definiamo per comodità:

$$\frac{8\pi i d \omega_1^2 A_2^*}{k_1 c^2} = R_1$$

$$\frac{dA_3}{dz} = R_3 A_1$$

Dove abbiamo definito anche R_3

$$\frac{8\pi i d \omega_3^2 A_2}{k_3 c^2} = R_3$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_1}{dz^2} &= R_1 \frac{dA_3}{dz} = R_1 R_3 A_1 = -R^2 A_1 \\ -R^2 &= \frac{-64\pi^2 d^2 \omega_1^2 \omega_3^2 |A_2|^2}{k_1 k_3 c^4} \end{aligned}$$

Questa equazione è semplice da risolvere:

$$A_1(z) = B \cos(Rz) + C \sin(Rz)$$

R contiene l'intensità del campo a frequenza ω_2 quindi la frequenza di queste oscillazioni dipende dall'intensità del campo.

$$A_3 = \frac{1}{R_1} \frac{dA_1}{dz} = \frac{1}{R_1} (-BR \sin(Rz) + CR \cos(Rz))$$

Le condizioni di ingresso sono date dal fatto che A_3 non è presente in entrate:

$$A_3(0) = 0$$

Da cui segue

$$C = 0 \quad B = A_1(0)$$

$$A_1(z) = A_1(0) \cos(Rz) \quad A_3(z) = -\frac{A_1(0)R}{R_1} \sin(Rz)$$

$$\frac{R}{R_1} = \frac{8\pi \omega_1 \omega_3 d |A_2|}{\sqrt{k_1 k_3} c^2} \frac{k_1 c^2}{8\pi \omega_1^2 d A_2^*} = -i \sqrt{\frac{n_1 \omega_3}{n_3 \omega_1}} \frac{|A_2|}{A_2^*}$$

$$\frac{|A_2|}{A_2^*} = e^{i\varphi_2}$$

Da cui

$$A_3(z) = i\sqrt{\frac{n_1\omega_3}{n_3\omega_1}} A_1(0) \sin(Rz) e^{i\varphi_2}$$

Questo oggetto dipende dalla fase del campo che non si svuota. In funzione di Rz andiamo a riportare l'intensità dei due campi abbiamo un andamento del tipo $\cos^2(Rz)$. Il campo che all'inizio è nullo raggiunge un'intensità massima che può corrispondere come numero di fotoni ad un'intensità corrispondente al campo a frequenza ω_1 . Lo svuotamento può essere totale. Lungo la propagazione del cristallo abbiamo uno scambio di energia del cristallo. Dobbiamo regolare questa periodicità in modo tale da stare nella condizione di un massimo (Figura 3.3)

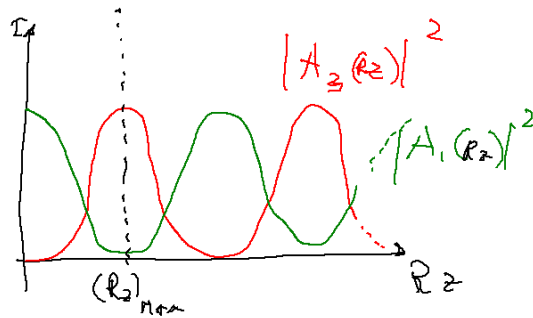


Figura 3.3: Schema dell'efficienza del processo di *up conversion*, è periodico in z , occorre pertanto regolare la lunghezza del cristallo e l'intensità di A_2 (che entra nel parametro R) in modo da avere in uscita dal cristallo il massimo dell'efficienza.

Possiamo ricavare un'espressione dell'efficienza di conversione del cristallo η :

$$\eta = \frac{|A_3(L)|^2}{|A_1(0)|^2} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \sin^2(RL)$$

$$\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 = \frac{\omega_3^2 n_1 \omega_1}{\omega_1^2 c}$$

Questo rapporto può arrivare ad avere un'efficienza del 100%. Come diventano queste equazioni quando non possiamo porre $\Delta k = 0$? Adesso mettiamoci nell'ipotesi di $\Delta k \neq 0$. Avremo in questo caso una soluzione più generale delle equazioni da cui eravamo partiti:

$$A_1(z) = (F e^{igz} + G e^{-igz}) e^{-i\frac{\Delta k z}{2}}$$

$$A_3(z) = (C e^{igz} + D e^{-igz}) e^{i\frac{\Delta k z}{2}}$$

Le costanti vanno determinate sulla base delle condizioni iniziali. Se sostituiamo le condizioni precedenti si ottiene:

$$\frac{dA_1}{dz} = (igF e^{igz} - igG e^{-igz}) e^{i\frac{\Delta k z}{2}} - \frac{1}{2}i\Delta k (F e^{igz} + G e^{-igz}) e^{-i\frac{\Delta k z}{2}} = (R_1 C e^{igz} + R_1 D e^{-igz}) e^{-i\frac{\Delta k z}{2}}$$

Uguagliando i termini comuni otteniamo un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} F(ig - \frac{1}{2}i\Delta k) = R_1 C \\ -G(ig + \frac{1}{2}i\Delta k) = R_1 D \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'altra derivata si ottiene un sistema analogo:

$$\begin{cases} C \left(ig + \frac{1}{2} i \Delta k \right) = R_3 F \\ -D \left(ig - \frac{1}{2} i \Delta k \right) = R_3 G \end{cases}$$

Prendendo le prime due equazioni possiamo scrivere una matrice:

$$\begin{pmatrix} i \left(g - \frac{1}{2} \Delta k \right) & -R_1 \\ -R_3 & i \left(g + \frac{1}{2} \Delta k \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ C \end{pmatrix} = 0$$

Dobbiamo porre il determinante della matrice uguale a zero per garantirci l'esistenza delle soluzioni da cui otteniamo:

$$g^2 = -R_1 R_3 + \frac{1}{4} \Delta k^2$$

$$g = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4} \Delta k^2}$$

E adesso le costanti possono essere determinate a partire dalle condizioni iniziali, come ad esempio:

$$A_1(0) = F + G \quad A_3(0) = C + D$$

Supponiamo che $A_3(0) = 0$.

$$A_1(z) = \left[A_1(0) \cos(gz) + \left(\frac{R_1}{g} A_3(0) + i \frac{\Delta k}{2g} A_1(0) \right) \sin(gz) \right] e^{-\frac{i \Delta k z}{2}}$$

$$A_3(z) = \left[A_3(0) \cos(gz) + \left(\frac{R_3}{g} A_1(0) - i \frac{\Delta k}{2g} A_3(0) \right) \sin(gz) \right] e^{\frac{i \Delta k z}{2}}$$

Da cui:

$$A_3(z) = \frac{R_3}{g} A_1(0) \sin(gz) e^{\frac{i \Delta k z}{2}}$$

Da cui l'intensità del campo generato è:

$$|A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \left(\frac{R_3}{g} \right)^2 \sin^2(gz)$$

Adesso la conversione ha efficienza minore poiché il termine moltiplicativo in g si porta dietro un Δk che abbassa l'efficienza del segnale. In funzione di z abbiamo:

Tutto questo è stato ottenuto in approssimazione di onde piane, cosa avviene se consideriamo diverse geometrie spaziale, ci accorgiamo che date le non linearità in gioco l'intensità che di A_2 , pur ipotizzando un *phase-matching* nulla, non si riesce a raggiungere un'efficienza al 100 %.

Possiamo far propagare i fasci all'interno di una guida d'onda a singolo modo, in modo che il mezzo non lineare sia in una guida d'onda, il cristallo stesso faccia la guida d'onda. In questo caso l'intensità può aumentare molto perché si va a lavorare solo con un modo trasmesso del campo. Le moderne tecnologie ottiche permettono questa situazione, anche con basse potenze si raggiungono potenze molto elevate. L'altra possibilità è quella di aumentare l'intensità passando da un'onda piana continua ad un impulso. Possiamo realizzare impulsi molto corti.

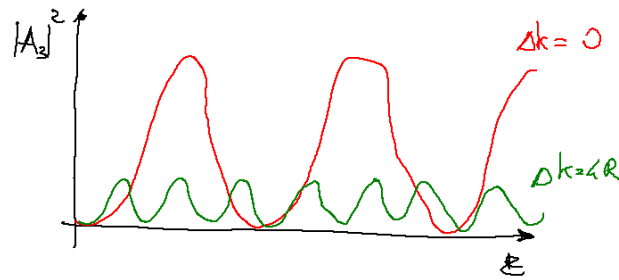


Figura 3.4: Sum frequency generation in presenza di phase matching.

Naturalmente l'onda piana comincia a mostrare delle discordanze rispetto a quello che vediamo.

Il sistema più pulito è quello di lavorare con una guida d'onda, si può lavorare con efficienze di conversioni molto grandi. Questo fotone del campo debole, costituito da un unico fotone, riusciamo a convertirlo nel campo alla frequenza 2ω . Questo è un esempio di applicazione di un metodo ottico non lineare. L'altro esempio è quello di usare due campi laser per andare a generare. Se vogliamo andare a interagire con un effetto fisico che si trova nell'infrarosso, non abbiamo una disponibilità di sorgenti nel lontano infrarosso per fare questo, possiamo usare due campi, possiamo generare due campi $\omega_3 - \omega_1$, usando la down-conversion

3.3.2 Difference Frequency Generation

Con la Difference frequency generation possiamo generare un campo infrarosso a bassa frequenza, in una regione in cui non sono presenti sistemi laser. Abbiamo un mezzo con non linearità $\chi^{(2)}$, un campo ω_3 in ingresso, un campo a frequenza ω_1 e nella nostra approssimazione ω_3 è un campo laser forte, e ω_1 è molto debole *down-conversion*. In uscita avremo ω_3 , praticamente invariato, ω_1 che sarà cambiato, e in più abbiamo una nuova frequenza $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$.

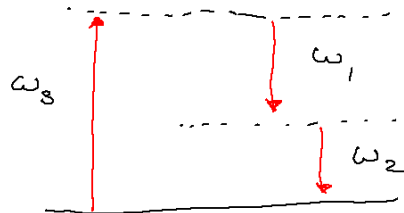


Figura 3.5: Difference frequency generation. In questo modo abbiamo contemporaneamente due effetti, la generazione ω_2 , e anche l'amplificazione di ω_1 .

Questo processo funge anche da amplificazione parametrica. Questo è un processo più ricco, abbiamo la creazione di un nuovo segnale, e l'amplificazione di quello in ingresso.

Le due equazioni che dobbiamo prendere sono quelle per A_2 e A_1 , A_3 lo supponiamo costante.

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{8\pi i \omega_1^2 d}{k_1 c^2} A_3 A_2^* e^{i\Delta k z}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{8\pi i \omega_2^2 d}{k_2 c^2} A_3 A_1^* e^{i\Delta k z}$$

La soluzione è differente dall'altra, adesso abbiamo nella soluzione seni e coseni iperbolici:

$$\Delta k = 0$$

$$\frac{d^2 A_2}{dz^2} = R^2 A_2$$

$$R^2 = \frac{64\pi^2 \omega_1 \omega_2 d^2}{k_1 k_2 c^4} A_3 A_3^*$$

$$A_2(z) = C \sinh(Rz) + D \cosh(Rz)$$

E queste possono essere determinate sulla base delle condizioni iniziali:

$$A_2(0) = 0 \quad A_1(0) \neq 0$$

$$A_1(z) = A_1(0) \cosh(Rz) \quad A_2(z) = A_1^*(0) \sinh(Rz) i \sqrt{\frac{n_1 \omega_2}{n_2 \omega_1}} \frac{A_3}{|A_3|}$$

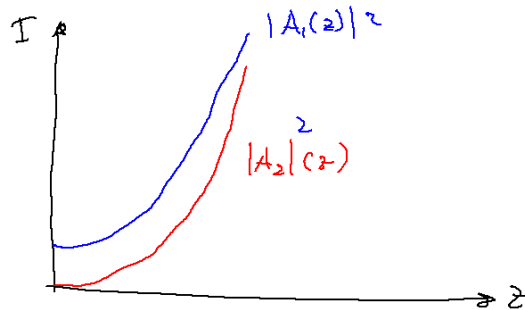


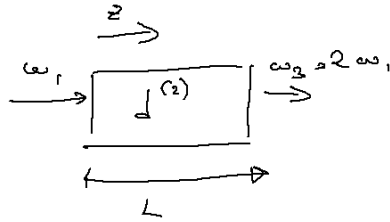
Figura 3.6: Schema dell'amplificatore parametrico, la presenza dei seni iperbolici generano un andamento esponenziale che mi determina un amplificazione del segnale.

Anche in questo caso possiamo andare a riscrivere come diventano queste equazioni nel caso di phase-matching differente. Troveremo esattamente cose simili, in cui al posto di R ci sarà il fattore g . Questo è molto importante perché l'effetto è decisamente più ricco della sum frequency generation. Questi due effetti in comune hanno il fatto che sono univocamente determinate dalle condizioni iniziali. Abbiamo due campi che ci stabiliscono condizioni iniziali. Essendo tre campi in gioco, abbiamo un'unica condizione finale data due condizioni iniziali. I campi sono quindi univocamente determinati, sulla base di conservazioni dell'energia e phase-matching.

Tuttavia la differenza tra i due effetti è che nella DFG abbiamo anche un effetto di amplificazione, infatti questo oggetto è amplificazione parametrica. Questo amplifica tutto, anche il rumore enormemente amplificato (se partiamo ad esempio da un solo fotone). La difference frequency generation apre il campo ad un ulteriore effetto non lineare che è quello relativo dell'emissione parametrica spontanea, quella situazione in cui in ingresso avremo un solo campo laser a frequenza ω_3 , con condizione iniziale molto diversa da prima. Questo è un effetto spontaneo. Tra gli effetti non lineari è uno dei pochi effetti di tipo emissione spontanea che per essere giustificato richiede la quantizzazione del campo in ingresso. Se abbiamo un solo campo in entrata la molteplicità dei possibili stati finali sono infiniti. Le possibili combinazioni di $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ sono infinite. Il processo è molto poco efficiente ma riveste un'importanza considerevole nell'ambito dell'ottica quantistica.

3.3.3 Generazione di seconda armonica

Seguendo lo schema che abbiamo fatto prima abbiamo in ingresso un unico campo a frequenza ω_1 :



La situazione è molto peculiare, in ingresso abbiamo un unico campo. Il campo elettrico totale è pari alla somma di E_1 ed E_3 :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_3(z, t)$$

Giochiamo con le polarizzazioni non lineari:

$$P_1(z) = 4dA_3A_1^*e^{i(k_3-k_1)z}$$

$$P_3(z) = 2dA_1^2e^{ik_1z}$$

Le tre equazioni che avevamo espresso nei campi ne rimangono due:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{8\pi i \omega_1^2 d}{k_1 c^2} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z}$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{4\pi i \omega_3^2 d}{k_3 c^2} A_1^2 e^{i\Delta k z}$$

Mettiamoci nel caso $\Delta k = 0$

$$\frac{dA_1}{dz} \propto i(A_3 A_1^*) \quad \frac{dA_3}{dz} \propto i(A_1^2)$$

Andiamo nella condizione in cui la soluzione è del tipo tangente iperbolica. Il caso banale è quello che il caso di campo di ingresso (*pompa*) non svuotata. Supponiamo che la pompa non venga svuotata e rimanga circa costante:

$$\frac{dA_1}{dz} = 0$$

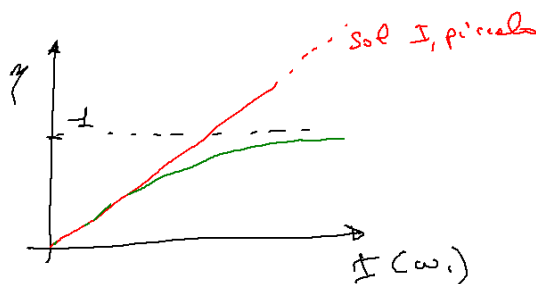
$$A_3(L) \propto A_1^2 d \frac{e^{i\Delta k L}}{i\Delta k}$$

$$I_3(L) \propto I_1^2 d^2 L^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)$$

Passando dall'intensità alla potenza:

$$\eta = \frac{P(\omega_3)}{P(\omega_1)} \propto d^2 L^2 I(\omega_1) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)$$

Otteniamo un'efficienza che cresce linearmente con l'intensità di I_1 :



Esprimiamo i campi attraverso l'intensità e di grandezze adimensionali:

$$A_1 = \sqrt{\frac{2\pi I}{n_1 c}} u_1 e^{i\phi_1}$$

$$A_3 = \sqrt{\frac{2\pi I}{n_3 c}} u_3 e^{i\phi_3}$$

$$I = I_1 + I_3$$

Con l'intensità

$$I_i = \frac{n_i c}{2\pi} |A_i|^2$$

Possiamo assumere I costante. Otteniamo da questa relazione che:

$$u_1^2(z) + u_3^2(z) = 1$$

Introduciamo altre variabili adimensionali:

$$\zeta = \frac{z}{l} \quad l = \sqrt{\frac{n_1^2 n_3^2 c^3}{2\pi I}} \frac{1}{8\pi\omega_1 d}$$

La l è una sorta di lunghezza di coerenza. La lunghezza all'interno della quale vi è un effettivo scambio di energia tra i due campi. Bisogna tener conto della fase relativa dei campi:

$$\theta = 2\phi_1 - \phi_3 + \Delta kz$$

Tutti i termini che contribuiscono alla fase saranno ϕ_1 (2 volte) ϕ_3 meno il mismatch. Il parametro di *phase-matching* è:

$$\Delta s = \Delta kl$$

Le equazioni accoppiate possono essere riscritte in questa maniera.

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{d\zeta} &= u_1 u_3 \sin \theta \\ \frac{du_3}{d\zeta} &= -u_1^2 \sin \theta \\ \frac{d\theta}{d\zeta} &= \Delta s + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d}{d\zeta} (\ln u_1^2 u_3)\end{aligned}$$

Il caso di perfetto *phase-matching* è quello per cui $\Delta k = \Delta s = 0$:

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \ln (\cos(\theta) u_1^2 u_3) = 0$$

Che integrata ci dice che l'argomento del logaritmo è costante

$$u_1^2 u_3 \cos \theta = \Gamma$$

Possiamo scrivere che:

$$\frac{du_3}{dz} = \pm (1 - u_3)^2 \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

Possiamo esprimere $\cos^2 \theta$ in funzione di Γ :

$$\begin{aligned}\frac{du_3}{dz} &= \pm (1 - u_3^2) \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{u_1^4 u_3^2}} = \pm (1 - u_3^2) \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{(1 - u_3^2) u_3^2}} \\ u_3 \frac{du_3}{d\zeta} &= \pm \sqrt{(1 - u_3^2)^2 - \Gamma^2} \\ \frac{du_3^2}{d\zeta} &= \pm 2 \sqrt{(1 - u_3^2)^2 - \Gamma^2}\end{aligned}$$

Stabilendo le condizioni iniziali possiamo dare un andamento di questo tipo:

Un caso interessante è quello per cui $\Gamma = 0$. Questo avviene nelle seguenti condizioni:

$$u_1 = 0 \quad u_3 = 0 \quad \cos \theta = 0$$

Se lo sfasamento è a $\pi/2$:

$$\sin \theta = -1$$

Possiamo trovare:

$$\frac{du_1}{d\zeta} = -u_1 u_3 \quad \frac{du_3}{d\zeta} = u_1^2$$

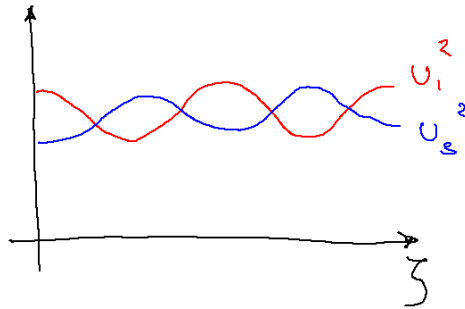


Figura 3.7: Inq uesto esempio c'è perfetto scambio di energia tra i campi.

$$\frac{du_3}{d\zeta} = 1 - u_3^2$$

$$u_3 = \tanh(\zeta + \zeta_0) \quad u_1 = \operatorname{sech}(\zeta)$$

Abbiamo trovato la soluzione più comune. In condizioni $u_1(0) = 1$ e $u_3(0) = 0$ abbiamo:

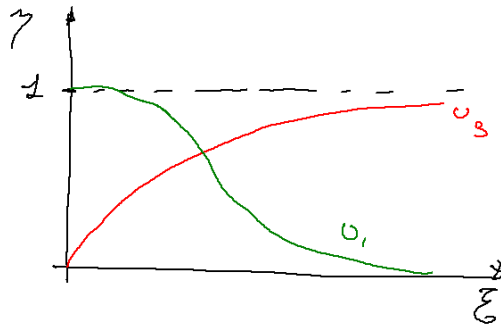


Figura 3.8: Efficienza della generazione classica di seconda armonica.

Da questo otteniamo che possiamo convertire tutti i fotoni in seconda armonica, quindi in teoria possiamo avere una conversione totale del campo. Le generazioni di seconda armonica effettive possono arrivare nell'ordine del 70-75%. La possibilità di avere cristalli in guida d'onda può permettere di raggiungere efficienze molto alte con basse potenze, poiché ci troviamo sul singolo modo.

Cosa succede se non abbiamo un perfetto *phase-matching*? Si può ripetere un discorso analogo. Quello che avviene

Optical Rectification - Parametrici

Usando un solo campo è possibile ottenere un campo statico. Possiamo generare una corrente con due impulsi in banda ottica (Optical Rectification). Questo non ha ampi effetti, si utilizza quando si vuole generare radiazione nel Terahertz. A partire dalla banda ottica si può andare verso frequenze molto più basse, tutti questi effetti sono detti effetti parametrici.

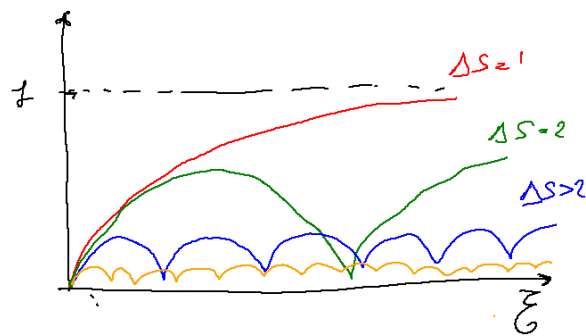


Figura 3.9: Phase matching non perfetto, come modifica l'efficienza

Un esempio è la possibilità combinata di andare, attraverso difference-frequency generation, nel lontano infrarossi (poiché non abbiamo sorgenti coerenti in questa regione), e poi riportare nel visibile per utilizzare i detector più efficienti.

Studio di eccitazioni elementari in solidi e nel lontano infrarosso. Si possono utilizzare due campi per far sì che per differenza si possa generare un certo k_p che corrisponda ad un'eccitazione elementare. Questo k_p può essere combinata con un'altra k_3 per generare per somma il segnale nel visibile:

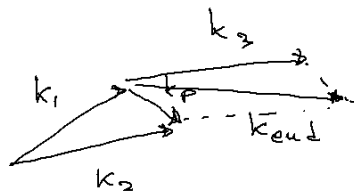


Figura 3.10: Sfruttare la non linearità del materiale per eccitare nell'infrarosso k_p e rivelare nel visibile k_{end}

3.4 Phase-Matching

Immaginiamo di voler ottenere la condizione di perfetto *phase-matching*:

$$\Delta k = 0 \quad n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = n_3\omega_3$$

Questo non è affatto garantito in regime di dispersione. Se pensiamo alla generazione di seconda armonica infatti:

$$\omega_2 = \omega_1 \quad \omega_3 = 2\omega_1$$

La condizione di phase-matching diventa:

$$n(\omega_1) = n(2\omega_1)$$

E questo è semplicemente impossibile da ottenere. Questo è il motivo per cui il primo effetto non lineare rilevato fatto con un piccolo cristallo di quarzo dava un'efficienza di conversione dell'ordine 10^{-7} . Sono anisotropi tutti i cristalli che non presentano una simmetria di inversione. Tutte le classi cristalline, tranne quella cubica, di fatto hanno una $\chi^{(2)}$ differente da zero. Dato per scontato che tutti i cristalli non posseggono simmetria di inversione, al loro interno, giocando sull'onda ordinaria e onda straordinaria, abbiamo la possibilità di far sì che si verifichi la condizione di *phase-matching*. Esistono due tipi di phase-matching. Questo avviene quando le onde a frequenza più bassa hanno la stessa polarizzazione.

Abbiamo due casi, il tipo 1:

- uniassico positivo: $n_e > n_o$.

$$n_3^o \omega_3 = n_1^e \omega_1 + n_2^e \omega_2$$

Se sfruttiamo due differenti tipi di indici di rifrazione facciamo in modo che l'onda ordinaria appartenga alla frequenza più alta.

- Uniassico negativo $n_e < n_o$:

$$n_3^e \omega_3 = n_1^o \omega_1 + n_2^o \omega_2$$

Questa è la situazione opposta.

Oppure di tipo 2:

- uniassico positivo: $n_e > n_o$.

$$n_3^o \omega_3 = n_1^o \omega_1 + n_2^e \omega_2$$

- Uniassico negativo $n_e < n_o$:

$$n_3^e \omega_3 = n_1^e \omega_1 + n_2^o \omega_2$$

Finiamo per giocare con le polarizzazioni dell'onda. In un processo di *sum frequency generation* devono avere le polarizzazioni opportune, in modo da ottenere la condizione di phase-matching. L'indice di rifrazione straordinario dipende da θ , la direzione in cui si propagano i campi in ingresso rispetto agli assi ottici dei cristalli.

Prendiamo il caso di un cristallo birifrangente uniassico. Rappresentiamo l'ellissoide di rotazione Figura 3.11

La relazione che si ottiene:

$$\begin{aligned} n_e(\theta) &= n_o & \theta &= 0 \\ n_e(\theta) &= n_e & \theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

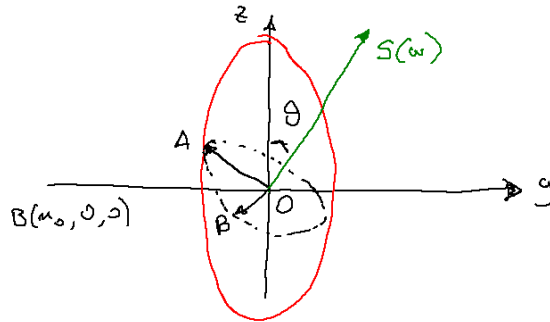


Figura 3.11: Schema dell'ellissoide di formazione. Il segmento OA misura l'asse straordinario $n_e(\theta)$. S è il vettore di Poynting, e il piano ortogonale a S mi individua la sezione trasversale, separata nelle due polarizzazioni ortogonali (semiasse dell'ellissi).

Dove otteniamo $n_e(\theta)$ è dato dalla relazione:

$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

Iniziamo a vedere un effetto che ci fa vedere come l'indice si modifica. In un caso particolare, nel caso uniassico negativo ($n_e < n_o$), abbiamo nella regione spettrale di interesse un andamento in funzione della lunghezza d'onda dell'indice di rifrazione:

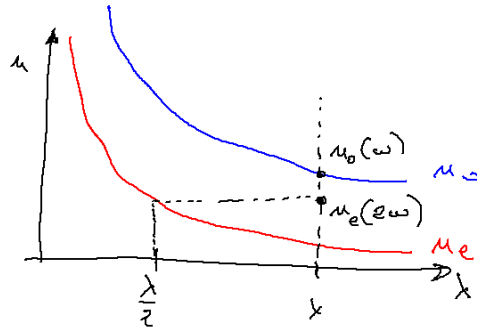


Figura 3.12: Caso tipico di lavoro a regime negativo. Se si verifica la relazione $n_e(2\omega) < n_o(\omega)$.

Bisogna ottenere per la condizione di *phase matching*

$$n_e(2\omega) = n_o(\omega)$$

Possiamo giocando l'angolo θ di entrata, traslare n_e in alto. Esiste un angolo tale che :

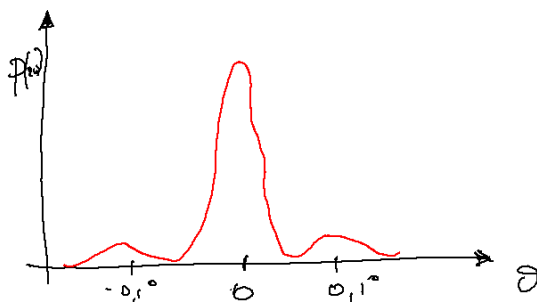
$$\frac{\cos^2 \theta_m}{n_o(2\omega)^2} + \frac{\sin^2 \theta_m}{n_e^2(2\omega)} = \frac{1}{n_o(\omega)^2}$$

Da questa relazione possiamo ricavare θ_m che realizza il phase-matching.

$$\sin^2 \theta_m = \frac{n_o^{-2}(\omega) - n_o^{-2}(2\omega)}{n_e^{-2}(2\omega) - n_o^{-2}(2\omega)}$$

Questa è una condizione molto facile da ottenere, ma bisogna avere il cristallo giusto. Bisogna che il cristallo deve essere tagliato in modo da poter lavorare direttamente con quella lunghezza d'onda. Questo motivo è quello per cui non è possibile fare phase-matching nel quarzo (in fatti questa condizione non si riesce a soddisfare).

Il phase-matching può essere molto critico. Uno dei cristalli utilizzati è il KDP, i punti sperimentali sono riportati in Figura 3.13



ù

Figura 3.13: Efficienza di conversione rispetto al θ_0 di perfetto phase-matching. Come si può vedere l'efficienza nella generazione di seconda armonica è sensibilissimo (al decimo, centesimo di grado) all'angolo di entrata.

Se il cristallo non riesce a generare *phase-matching* si può cambiare famiglia di cristalli (in base ai 2 tipi illustrati e alle 4 configurazioni (uniassico positivo o uniassico negativo). A volte il *phase-matching* non può essere ottenuto, o può essere ottenuto solo in determinate regioni spettrali.

Il mezzo non lineare in cui si fa il matching parametrico ci da un risultato ottimale in una direzione particolare, questo mi impone infatti anche nella direzione possibile. Possiamo avere anche propagazione non collineare nei mezzi non lineari. Occorre scegliere adeguatamente polarizzazioni e direzioni dei campi in ingresso, e arrivare a rilevare il risultato in una direzione ben precisa.

Queste considerazioni possono essere ripetute parlando della *parametric down conversion*. In questo modo possiamo avere fotoni ordinari (polarizzazione) che si annichilano in due straordinari, oppure uno ordinario e uno straordinario, e vice versa (dallo straordinario all'ordinario).

3.5 Misure di impulsi ultracorti

Come si può fare a misurare la durata di un impulso laser ultracorto? Il problema si pone, perché mentre le tecniche di rivelazione di impulsi ci permettono di rivelare oggetti di qualche centinaia di picosecondi non possiamo andare a misurare oggetti di qualche femtosecondo. Andremo a studiare la differenza tra tempo di coerenza e la durata del pacchetto. Supponiamo di avere un impulso

di forma gaussiana, che sia in perfetta trasformata di Fourier. Se è così un modo che abbiamo è quello di utilizzare uno schema interferometrico.

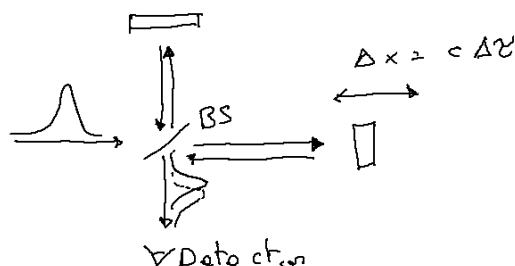


Figura 3.14: Interferometro di Michelson per misurare un pacchetto in Transform-Limited.

Possiamo vedere il risultato di un'interferenza tra i campi:

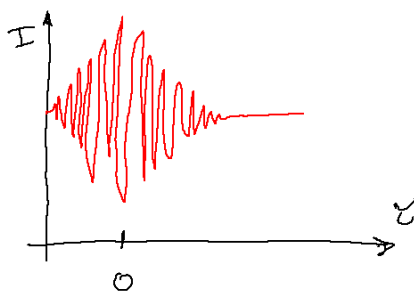


Figura 3.15: Risultato interferometrico di impulsi transform limited.

Questo vale per impulsi in perfetta trasformata di Fourier, abbiamo di fatto misurato il tempo di coerenza. Se l'impulso non è in perfetta trasformata di Fourier potrebbe esserci un chirping, che fanno sì che la durata dell'impulso conservi il tempo di coerenza, siamo in grado soltanto di vedere frange di questa durata. Misureremo un tempo che è minore della durata dell'impulso stesso.

Quello che possiamo dire è che

$$\tau_c \leq \tau$$

Abbiamo bisogno di un effetto non lineare per poter distinguere questi due tempi. Introduciamo un cristallo con una certa $\chi^{(2)}$

Il segnale generato alla frequenza 2ω è dato da:

$$I(2\omega) \propto I^2(\omega)$$

Siccome l'intensità che arriva nel cristallo dipende anche dal matching temporale. Abbiamo la possibilità di vedere un andamento temporale di una funzione

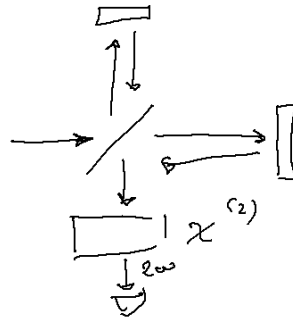


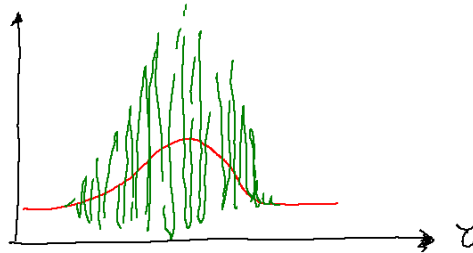
Figura 3.16: Interferometro di seconda armonica.

che è legata alla $I(\omega)$ abbiamo la possibilità di fare solo una misura indiretta dell'impulso.

$$\begin{aligned}
 I_2(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| E(t)e^{i(\omega t + \varphi(t))} + E(t-\tau)e^{i[\omega(t-\tau) + \varphi(t-\tau)]} \right| dt = \\
 &= \int \left[2E^4 + 4E^2 + 4E(t)E(t-\tau) [E^2(t) + E^2(t-\tau)] \cdot \cos[(\omega t + \varphi) - \varphi(t-\tau)] + \right. \\
 &\quad \left. + 2E^2(t)E^2(t-\tau) \cos[2(\omega\tau + \varphi(t) - \varphi(t-\tau))] \right] dt
 \end{aligned}$$

A parte i termini costanti quello che riveliamo è che la dipendenza da τ ci da una dipendenza più lenta da τ , più ci sono i termini con i coseni che ci danno informazioni sulla coerenza dell'impulso.

In condizioni di perfetta coerenza abbiamo una risposta del genere



In questo modo sappiamo parecchie cose sul nostro impulso. Stiamo misurando al funzione di correlazione al secondo ordine del nostro impulso. Anche perché questo oggetto sarà sempre simmetrico.

Cosa succede se ci troviamo in presenza di impulsi non perfettamente coerenti? Vedremo che le frange si concentrano solo in prossimità di $\tau = 0$, queste frange saranno visibili sono per intensità molto piccoli. Questa misura, di autocorrelazione interferometrica, permette di conoscere durata e tempo di coerenza. Se non fossimo direttamente interessati a conoscere l'aspetto di coerenza

di segnale, e vogliamo cancellare l'effetto di frange di interferenza. Un modo per cancellare la coerenza è quello di rendere i cammini separati tra di loro. Andremo a vedere un altro apparato

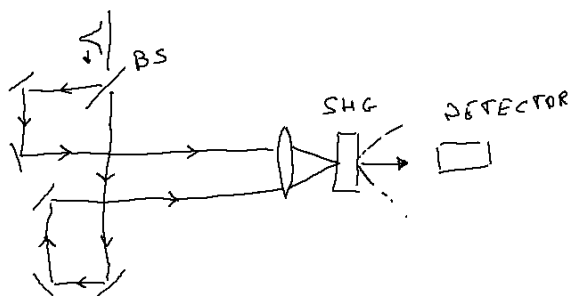


Figura 3.17: Schema di autocorrelazione a seconda armonica non collineare.

All'interno dei cristalli ciascuno dei due impulsi può dare un contributo di seconda armonica che è un fondo, Il rivelatore preleva se presente soltanto la radiazione che esce nella direzione non collineare a nessuno dei due fasci. La condizione di phasematching comincia a dare un segnale nella direzione media. Il fotomoltiplicatore non deve più essere rapido, deve poter dare una risposta integrata, trasferiamo il problema di misura temporale in misura spaziale. L'interferenza nasce dal pattern di interferenza spaziale dei due vettori. Queste frange nascono all'interno dello stesso cristallo, e quindi perdiamo l'informazione sulle frange.

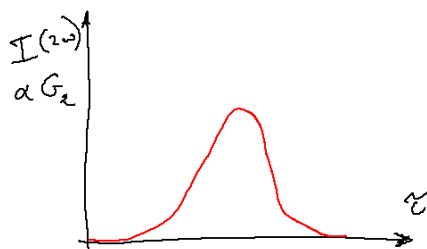


Figura 3.18: Schema che ci da informazioni sulla G_2 delle intensità.

Facciamo la misura di una funzione pari, una misura indiretta della funzione che descrive l'impulso. Rimane aperta una questione, che ne è della forma dell'impulso? Immaginiamo varie forme di impulso: Immaginiamo avere una funzione di tipo rettangolare

- Funzione rettangolare: $\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = 1$
- Gaussiana: $\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \sqrt{2}$

- $\text{sech}^2\left(\frac{t}{\Delta t}\right), \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = 1.55$
- Funzione esponenziale: $\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = 2$

Solo nel caso di impulsi rettangolari potremo avere esattamente 1, per tutti i casi normali questo rapporto giace tra 1 e 2, abbastanza verso 1.5.

L'aver utilizzato un effetto ottico non lineare al secondo ordine per aver misurato eventi rapidi, ci apre la strada per la misurazione di qualsiasi fenomeno fisico ultracorto. Utilizzando una non linearità del secondo ordine, che ha origine di tipo elettronico, ha dei tempi di risposta istantanee nei tempi a cui lavoriamo. Non si perturba attraverso questo tipo di misura l'evento che vogliamo misurare. Qualsiasi altro evento potrebbe essere utilizzato attraverso l'uso di tecniche di ottiche non lineari.

Abbiamo uno strumento per rivelare eventi anche a segnali bassi. La sum frequency generation ci può far sì che abbiamo un campo classico e debole (al livello del singolo fotone) ci permette di rivelare il segnale ω_3 , e questo ci permette di studiare tempi a livello dei femtosecondi. È come se avessimo rivelatori complessivi a femtosecondi. Globalmente è come se avessimo nuovi rivelatori, dati dal gate nonlineare, e il rivelatore vero e proprio. Ci sarà un'efficienza quantica del rivelatore e un'efficienza quantica del processo di conversione. Il prodotto tra le due efficienze è l'efficienza totale. Queste efficienze possono essere molto importanti (nel dominio del femtosecondo).

3.6 Effetti del terzo ordine

La strada per studiare gli effetti del terzo ordine è analoga a quella che abbiamo studiato per gli effetti del secondo ordine. Si parte anche qui da un'equazione dell'oscillatore:

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x + \Sigma x^3 = eE_x(t)$$

Si ricava la soluzione di ordine basso:

$$X(T) = \frac{\frac{e}{m} E_0 \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Si studia la soluzione perturbativa:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t - \frac{\left(\frac{e}{m}\right)^3 E_0^3 \cos^3 \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}$$

Abbiamo due contributi diversi

$$x(t) = x_1 \cos \omega t + x_2 \cos(3\omega t)$$

Abbiamo un effetto non lineare che ci dà un termine a una nuova frequenza ed uno alla stessa frequenza entrante. Questo termine che non cambia frequenza compie una modulazione del campo stesso, modula la costante elettrica del mezzo. Gli effetti in cui si creano nuove frequenze hanno avuto una loro importanza storica. Tra questi rientra anche la versione stimolata dell'effetto Raman. A causa del guadagno non lineare si supera una situazione in cui si ha una transizione di fase tra una fase incoerente ad una fase coerente. L'effetto raman

stimolato è un effetto che nasce dalla scoperta del laser, è stato fortemente utilizzato fin dagli inizi per ragioni di interesse e di utilizzo. Possiamo andare a studiare l'effetto di scattering di una radiazione su una molecola modellizzando la vibrazione molecolare con il nostro solito oscillatore armonico. Se andiamo a studiare uno schema di livelli:

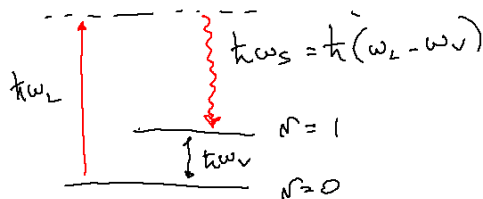


Figura 3.19: Shift raman

Si possono avere effetti raman molto forti. Si può con lo stesso modo si può avere una generazione di una frequenza di antistokes se parto dallo stato eccitato. La creazione di fasci coerenti nella versione stimolata del raman può avvenire attraverso una serie di meccanismi parametrici. L'effetto raman spontaneo è un effetto spontaneo, al pari dell'emissione spontanea, è un effetto che si innesca attraverso il campo di vuoto. Per giustificare la trattazione di un segnale coerente, partiamo dall'ipotesi che sia stato già generato un debole campo alla frequenza Stokes.

Assumiamo la z come unica coordinata. Scriviamo l'ampiezza degli oscillatori indipendenti.

$$\partial_t^2 X(z, t) + \gamma \partial_t X + \omega_v^2 X = \frac{F(z, t)}{m}$$

Dove $\gamma = 2\pi\Delta\nu$ è la larghezza della riga spontanea. La forza può essere ottenuta dall'energia:

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Dove

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + N\alpha) = \varepsilon_0 \left\{ 1 + N \left[\alpha_0 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 X \right] \right\}$$

$$F = \partial_x H = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 \overline{E^2}(z, t)$$

Stiamo mediando E nel tempo perché la risposta del sistema non può essere istantanea. Abbiamo una vibrazione molecolare che può essere guidata dal campo elettrico se questa derivata di α è non nulla. Questa modulazione di ε porta alla possibilità di avere uno scambio di energia tra il campo laser e il campo immediatamente vicino ad esso.

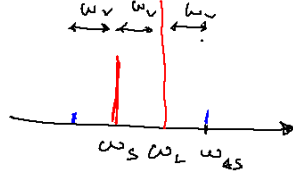


Figura 3.20: si crea un pettine di frequenze usando questa serie di processi.

Stiamo supponendo che ci sia qualcosa vicino a ω_s . Se la crescita è molto ampia possiamo avere un vero e proprio impulso che si genera. Si potranno creare le condizioni per avere anche altre frequenze

Abbiamo un campo totale:

$$E(z, t) = \frac{1}{2}E_s e^{i\omega_s t} + \frac{1}{2}E_L(z, t)e^{i\omega_L t} + c.c.$$

Dobbiamo calcolare il modulo quadro medio:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{4}E_L(z)E_s^*(z)e^{i(\omega_L - \omega_s)t} + c.c.$$

Sostituendo nell'equazione del modo che abbiamo ottenuto.

$$\frac{1}{2}(\omega_v^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)X(z)e^{i\omega t} = \frac{\varepsilon_0}{8m} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} \right)_0 E_L(z)E_s^*(z)e^{i(\omega_L - \omega_s)t}$$

$$X(z) = \frac{\varepsilon_0 \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} \right)_0 E_L(z)E_s^*(z)e^{i(\omega_L - \omega_s)t}}{4m [\omega_v^2 - (\omega_L - \omega_s)^2 + i(\omega_L - \omega_s)\gamma]}$$

A questo punto possiamo scrivere la polarizzazione indotta:

$$P = \varepsilon_0 N \alpha(z, t) E(z, t) = \varepsilon_0 N \left[\alpha_0 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} \right)_0 X(z, t) \right] E(z, t)$$

$$P_{nl} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 N \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} \right)_0^2 \left(\frac{\varepsilon_0 E_L E_s^* e^{i(\omega_L - \omega_s)t}}{4m [\omega_v^2 - (\omega_L - \omega_s)^2 - 2i(\omega_L - \omega_s)\gamma]} + cc \right) (E_s(z)e^{i\omega_s t} E_L(z)e^{i\omega_L t} + c.c.)$$

Abbiamo componenti a tutte le frequenze, a seconda di quale termine oscillante della polarizzazione andiamo a selezionare.

Selezioniamo solo la frequenza che oscilla a ω_s :

$$P_{nl}(\omega_s) = \varepsilon_0 N \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} \right)_0^2 \frac{|E_L(z)|^2}{4m [\omega_v^2 - (\omega_L - \omega_s)^2 - 2i(\omega_L - \omega_s)\gamma]} E_s(z)$$

Questo può essere scritto come una:

$$P_{nl}(\omega_s) = \varepsilon_0 \chi_{raman}(\omega_s) |E_L(z)|^2 E_s(z)$$

Dove la χ dell'effetto raman è proprio quella di un effetto al terzo ordine:

$$\chi_{raman} = \frac{\varepsilon_0 N \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_0^2}{4m [\omega_v^2 - (\omega_l - \omega_s)^2 - 2i(\omega_l - \omega_s)\gamma]}$$

Questa a sua volta sarà un tensore complesso:

$$\chi_{raman} = \chi'_R(\omega_s) + i\chi''_R(\omega_s)$$

$$\chi'_R = \frac{\varepsilon_0 N \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_0^2 [\omega_v - (\omega_l - \omega_s)]}{16m\omega_v \left[\omega_v^2 - (\omega_l - \omega_s)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right]}$$

Una cosa analoga per la parte reale possiamo andare a vedere entrambi questi contributi:

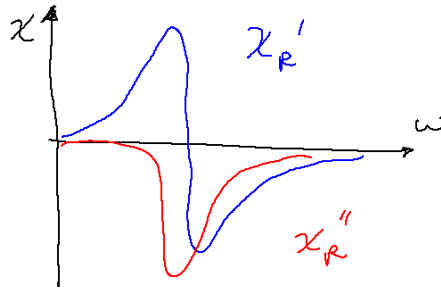


Figura 3.21: Schema delle due suscettività

Il campo alla frequenza ω_s sarà dato da:

$$k'_s = k_s \left[1 + \frac{\chi_r(\omega_s)}{2m} |E_l|^2 \right]$$

Poiché la k ha una parte immaginaria questo mi trasforma in un esponenziale che esplode in z . Si passa da un effetto incoerente ad un effetto coerente. Tutti questi fenomeni vengono governati anche dal phase-matching. Sull'antistokes il phase-matching fa uno scherzo strano (Figura 3.22): Per generare un vettore antistokes vi servono due vettori k_l e uno antistokes, k_{as} può chiudere questo quadrilatero solo per angoli θ piccoli (ma non nulli), quindi il campo antistokes viene generato ad anelli intorno al campo entrante, abbiamo una generazione del segnale laser a frequenze più alti ad angoli che via via si allontanano dall'effetto centrale. Una struttura ad anelli è tipica di questa tipologia di misure.

Quello che abbiamo fatto avremo potuto non chiamarla non linearità del terzo ordine. La suscettività raman che abbiamo scritto è tipica dell'effetto non lineare del terzo ordine. Questo è un modello di interazioni a quattro campi, tre in ingresso e uno che viene generato.

3.7 Parametric Down Conversion

Questo metodo è il metodo principale in cui vengono prodotti fotoni quantistici. Nel processo della difference frequency generation si può avere emissione di

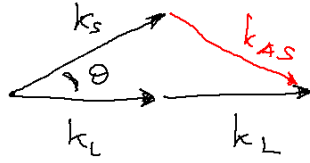


Figura 3.22: Phase-matching per l'antistokes

rumore se non inviamo segnale. Il rumore è una limitazione intrinseca del processo. Il responsabile di questo rumore è il campo di vuoto. Il campo di vuoto è uno stato quantistico molto particolare, amplificato dalla DFG. Il campo di vuoto è responsabile per tutti i processi di emissione spontanea, e altri effetti molto "esotici".

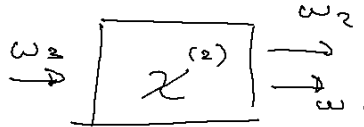


Figura 3.23: Schema della down conversion

Vogliamo scrivere un'equazione che descriva la down conversion. Si introduce una quantità:

$$A_1 = \sqrt{n_1} \omega_1 E_1$$

Il campo elettrico così riscritto è conveniente, rappresenta il flusso di fotoni.

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{1}{2} \alpha_1 A_1 - i(\tilde{\kappa} A_3) A_2^* e^{-i\Delta k z}$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = -\frac{1}{2} \alpha_2 A_2^* + i(\tilde{\kappa} A_3^*) A_1 e^{i\Delta k z}$$

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 \quad \tilde{\kappa} \propto d_{eff}$$

Supponiamo \$A_3\$ costante nel tempo. La prima parte in questo termine è la parte di attenuazione, che possiamo trascurare. Le due equazioni sono accoppiate. Possiamo arrivare ad una soluzione per queste equazioni: Abbiamo più guadagno per \$g = \tilde{\kappa} A_3\$

Prendiamo il caso in cui il phase-matching è perfetto e condizioni iniziali:

$$A_1(0) \neq 0 \quad A_2(0) = 0$$

Le soluzioni sono:

$$A_1(z) = A_1(0) \cosh \frac{gz}{2} \quad A_2^*(z) = iA_1(0) \sinh \frac{gz}{2}$$

Questo viene fuori dalla teoria classica, adesso proviamo a capire questo risultato in termini di fotoni.

$$\langle n_1(z) \rangle = \langle n_1(0) \rangle \cosh^2 \frac{gz}{2}$$

Questo va bene se il numero di fotoni sono molto alti. In realtà la trattazione quantistica ci da un termine correttivo che tiene conto di due cose:

$$\langle n_1(z) \rangle = \langle n_1(0) \rangle \cosh^2 \frac{gz}{2} + \langle n_2(0) + 1 \rangle \sinh^2 \frac{gz}{2}$$

La presenza di quel +1 descrive l'effetto del campo di vuoto. Se non abbiamo fotoni in ingresso, il numero medio di fotoni in uscita vale:

$$\langle n_1(L) \rangle = \sinh^2 \frac{gL}{2}$$

Comunque una quantità piccola. Se abbiamo un numero piccolo di fotoni in media vuol dire che molto spesso non succederà nulla, ma qualche volta vedrò un fotone, poiché le equazioni sono correlate, se vedo un fotone da una parte mi aspetto di un fotone anche dall'altra parte, ci sono due condizioni che dobbiamo soddisfare. Interpretiamo il fenomeno come un flusso di fotoni ω_3 che ogni tanto, in modo aleatorio decadono in fotoni ω_1 e ω_2 . Bisogna conservare sempre l'energia:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

E in più bisogna conservare il momento:

$$n_3(\omega_3)\omega_3 = n_1(\omega_1) + n_2(\omega_2) \quad \Delta k = 0$$

Perché questo avvenga abbiamo bisogno di mezzi birifrangenti. Abbiamo due tipi di *phase-matching*, il tipo I e tipo II. Nei cristalli uniassici negativi:

- Tipo I: $e \rightarrow o + o$
- Tipo II: $e \rightarrow o + e$

Come scelgo il modo dipende dall'angolo tra asse ottico e fascio in entrata. Cambiando la temperatura del cristallo influisco sugli indici di rifrazione. Se usare un tipo o l'altro. Il phasematching è una condizioni in termini di onde è che l'onda incidente è sempre in fase con l'onda prodotta, in modo che possa esserci un amplificazione coerente.

Iniziamo parlando del tipo I non collineare.

$$n_3^{(e)}(\omega_3, \phi)\omega_3 = n_1^{(o)}(\omega_1)\omega_1 \cos \theta_1 + n_2^{(o)}(\omega_2)\omega_2 \cos \theta_2$$

Dove ϕ è l'angolo fatto dalla pompa con l'asse ottico del cristallo. I fotoni emessi sono chiamati signal e idler. Se l'emissione è degenera ($\omega_2 = \omega_1$) l'angolo

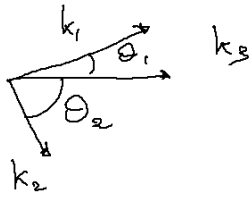


Figura 3.24: Phase matching

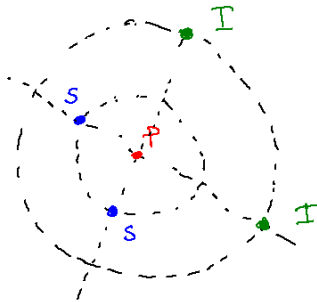


Figura 3.25: Schema della simmetria nel caso non degenero dell'angolo di emissione del signal e dell'idler.

del signal e dell'idler deve essere lo stesso. Per motivi di simmetria l'emissione avviene su un cerchio la cui pompa è il centro.

Se l'emissione non è degenera gli angoli cambiano ($\theta_1 \neq \theta_2$) questo è ovvio:

C'è sempre anche in questo caso una simmetria circolare, il signal e idler sono emessi su diametri di due cerchi differenti (Figura 3.25)

Questa proprietà di simmetria è vera solo per il tipo I, infatti per il tipo II i due fotoni sono distinguibili (uno è ordinario e l'altro è straordinario).

$$n_3^{(e)}(\omega_3, \phi)\omega_3 = n_1^{(0)}(\omega_1)\omega_1 \cos \theta_1 + n_2^{(e)}(\omega_2, \psi)\omega_2 \cos \theta_2$$

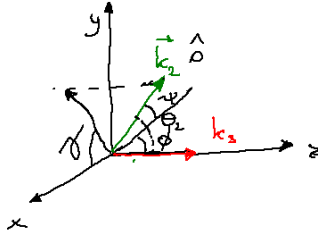
Adesso anche il fotone in ω_2 vede un angolo ψ con l'asse ottico.

L'asse ottico ha coordinate:

$$\hat{O} = (0 \quad \sin \phi \quad \cos \phi)$$

Il vettore della polarizzazione k_2 può essere determinato:

$$\hat{k} = (\sin \theta_2 \cos \gamma \quad \sin \theta_2 \sin \gamma \quad \cos \theta_2)$$



L'angolo di interesse è dato dal prodotto scalare tra \hat{k} e \hat{O} :

$$\cos \psi = \hat{O} \cdot \hat{k}$$

L'asse di simmetria è sempre quello della pompa, dato in questo modo (Figura 3.26)

Essendo un'emissione stimolata in teoria i fotoni escono da tutte le direzioni. In realtà ciascuna coppia di fotoni è in una sovrapposizione quantistica, di tutte quante le possibili posizioni in uscita. La cosa è anche peggiore. Il campo E_3 mi permette due modi:

$$E_3 \rightarrow |\omega_1\rangle |\omega_3\rangle$$

La pompa ha un certo spettro, quindi in realtà abbiamo un'ambiguità sulla frequenza ω_3 .

$$E_3 \rightarrow \int d\omega_3 d\omega_1 d\omega_2 S(\omega_3) \delta(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2) \underbrace{\int_0^L e^{i\Delta k z}}_{\text{sinc}(\frac{\Delta k L}{2})} |\omega_1\rangle |\omega_2\rangle$$

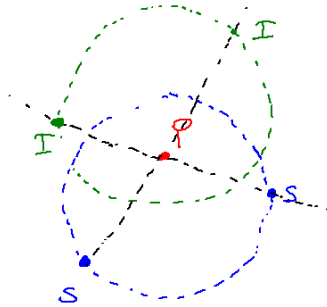


Figura 3.26: Schema della produzione di fotoni nel Tipo II.

Abbiamo quindi uno stato entangled, in cui abbiamo la sovrapposizione di tanti possibili stati a due fotoni. L'ultimo integrale è l'espressione del *phase-matching*. Il *phase-matching* è una delta solo se L è molto grande, quindi mi lascia un può di gioco rispetto alla conservazione dell'energia.

$$E_3 \rightarrow \int d\omega_1 d\omega_2 S(\omega_1 + \omega_2) \phi(\omega_1, \omega_2) |\omega_1\rangle |\omega_2\rangle$$

Nei punti in cui la Figura 3.26 ha l'intersezione tra i due cerchi i fotoni prodotti saranno in sovrapposizione quantistica:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|oe\rangle + |eo\rangle)$$

Avere fotoni in questo stato dà luogo ad una fenomenologia molto differente rispetto ad avere alcuni fotoni in uno stato determinato e altri in un altro, che possono essere misurati e studiati. Il problema di questa sorgente è data da un Tipo II, ha un'efficienza più bassa. Per avere una rate di generazione molto alta possiamo fare due cose, o allungare il cristallo (con il problema che la birifrangenza allarga il fascio su più modi trasversi, perdendo i modi gaussiani), o cambiare meccanismo di produzione di fotoni entangled. Sarebbe più comodo usare il tipo I, il problema è che ci sono dei fotoni determinati. Tuttavia possiamo mettere a mano l'ambiguità. Possiamo usare due cristalli uno dopo l'altro, con asse ottico ortogonale e pompo a 45 gradi. In questo modo posso emettere fotoni ordinari in entrambi i fotoni solo che hanno diversa polarizzazione a seconda se sono emessi dal primo o dal secondo cristallo. Se costruiamo bene geometricamente il sistema possiamo creare all'uscita del cristallo una sovrapposizione coerente (a patto di non avere informazioni da dove è stato prodotto).

Si parte sempre dallo stesso cristallo:

3.7.1 Tecniche di poling per il phase-matching

Posso aumentare l'efficienza di un processo chi 2 ribaltando la fase dell'onda ogni volta che il phase matching mi dà un'interferenza costruttiva. In questo modo il guadagno (che sarebbe un'oscillazione semplice) posso convertirla in una crescita (ogni volta che decresce inverte il cristallo):

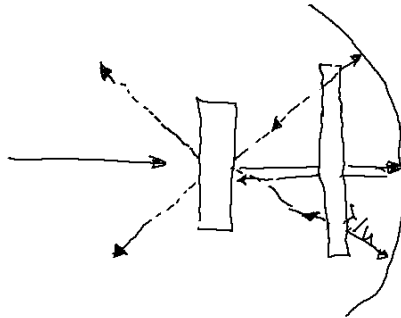
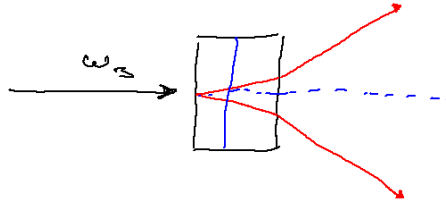


Figura 3.27: Schema di produzione delle coppie entangled sviluppata a Roma. Si sfrutta uno specchio sferico e una lamina di ritardo per invertire le polarizzazione dei fotoni entrati (la pompa non viene cambiata perché lavora ad una frequenza opportuna in cui la lamina funziona come una $\lambda/2$).

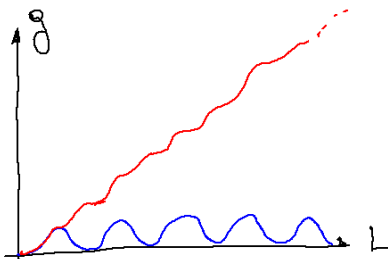


Figura 3.28: Questo salto di fase è ottenuto invertendo il cristallo.

In questo modo il cristallo ha una frequenza particolare $\frac{L}{\Lambda}$ con Λ periodicità con cui inverte il cristallo. In questo modo facendo la trasformata di Fourier del cristallo ottengo che il termine d_{eff} ha una componente principale a quella frequenza. Questo termine di fase possiamo introdurlo nel termine di *phase-matching* e possiamo usarlo come:

$$\Delta k - \frac{2\pi}{\Lambda} = 0$$

Questa tecnica detta di Poling è molto usata anche per vetri e fibre ottiche.

3.8 Effetti del terzo ordine non parametrici

L'effetto Raman Stimolato genera nuove frequenze nel campo. Esistono effetti che non generano nuove frequenze, vogliamo parlare di effetti che modulano la costante dielettrica del mezzo che viene attraversato da un intenso campo laser. Introduciamo una grandezza macroscopica detta indice di rifrazione non lineare. Supponiamo quindi di avere un campo intenso, assumiamo un campo laser ad impulsi corti, con una intensità di picco elevata. In pratica andiamo a considerare la media temporale di E :

$$\langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle \sim \frac{1}{2} |E|^2$$

Questo è direttamente legata al modulo quadro dell'intensità. Succede che la costante dielettrica del mezzo cambia. La densità totale sarà data dalla:

$$\varepsilon_T = \varepsilon + \varepsilon_2 \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle$$

Possiamo scrivere il vettore di spostamento come:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \left[1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)} |E|^2 \right] \vec{E}$$

Qui ci troviamo in mezzi isotropi, in questo caso quindi trascuriamo gli effetti del secondo ordine.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon [n^2 + \delta(n^2)] \vec{E} \\ \chi^{(3)} |E|^2 &= \delta(n^2) = 2n\delta n \end{aligned}$$

La variazione dell'indice di rifrazione è data quindi da:

$$\delta n = \frac{\chi^{(3)} |E|^2}{2n} = \frac{1}{2} n_2 I$$

Dove l'indice di rifrazione non lineare n_2 rappresenta la correzione all'indice di rifrazione.

$$n_t = n + \frac{1}{2} n_2 I$$

L'indice di rifrazione può cambiare in ragione del fatto che l'intensità è elevata e lo può modificare. La modulazione dell'indice di rifrazione genera curiosi effetti nella propagazione dell'impulso. L'impulso mentre viaggia nel mezzo cambia l'indice di rifrazione, vede un cammino ottico differente, e quindi cambia la fase.

Se abbiamo la possibilità di cambiare la fase possiamo fare un Gate nel tempo, usando un interferometro. Il materiale che vede cambiare l'indice di rifrazione, qual è il recovery time dell'indice di rifrazione? Se l'origine microscopica della non linearità è di tipo elettronico questa risposta sarà rapidissima, quasi istantanea. Se invece l'origine è legata a fenomeni di orientazioni di molecole in un liquido ci saranno delle condizioni di risposta di quelle molecole, una volta che hanno subito questa orientazione dalla loro capacità di ridiffondere. Se il tempo di risposta ha un origine di tipo termico, può essere lunghissimo. Andiamo dai femtosecondi ai secondi. Tanto più il tempo di risposta è lungo tanto più grande sarà la non linearità. Le risposte più rapide sono anche quelle più deboli. Se questo indice di rifrazione cambia può cambiare anche lungo la forma dell'impulso. Abbiamo un gradiente di n molto alto come il self-focusing e l'automodulazione di fase. Possiamo indurre, se le molecole che vengono interessate sono fortemente polari, il campo elettrico oriente queste molecole, che è breve, in quel piccolo intervallo di tempo il mezzo perde l'isotropia e genera birifrangenza nel mezzo, introducendo ritardo di fase, altra possibilità per fare gate e porte.

Il valore di n_2 può essere in principio sia positivo che negativo.

3.8.1 Self-Focusing

Immaginiamo di avere una forma dell'impulso spaziale (un profilo del modo) che sia una gaussiana (Figura 3.29)



Figura 3.29: Andamento del modo gaussiano.

Grazie a questo modo abbiamo che n diventa una funzione del raggio. Se n_2 è maggiore di zero il materiale vede un intensità maggiore all'indice. Questo vuol dire che è come se vedesse una lenta convergente. Questo è un processo a feedback positivo, infatti più converge maggiore è l'intensità. Questo arriva fino a quando la diffrazione non diventa talmente grande da compensare questo effetto. Abbiamo una vera e propria onda di rottura. Mettiamo in moto onde acustiche molto forti che possono polverizzare il materiale dall'interno.

Immaginiamo invece di avere un indice che dipenda dal tempo.

$$n_t = n + \frac{1}{2}n_2 I(t) \quad I(t) \propto e^{-\Gamma t^2}$$

$$E(t, x) = E_0 e^{i(\omega_0 t - kx)} \quad k = \frac{\omega_0}{c} n(t)$$

Avremo una frequenza istantanea.

$$\omega(t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c} \frac{\partial n}{\partial t} x$$

Avremo una variazione della frequenza nel tempo:

$$\delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0$$

$$\delta\omega(t) = -\omega_0 \frac{n_2 x}{2c} \frac{\partial I}{\partial t}$$

Poiché I è gaussiana, il $\delta\omega$ dipende dalla derivata di una gaussiana.

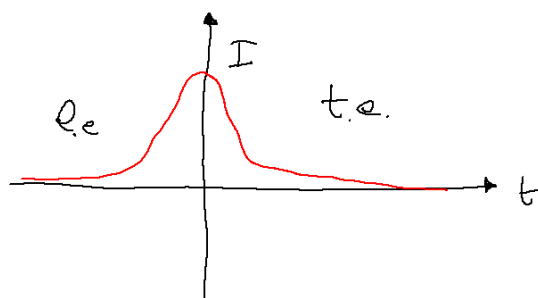


Figura 3.30: Profilo dell'impulso

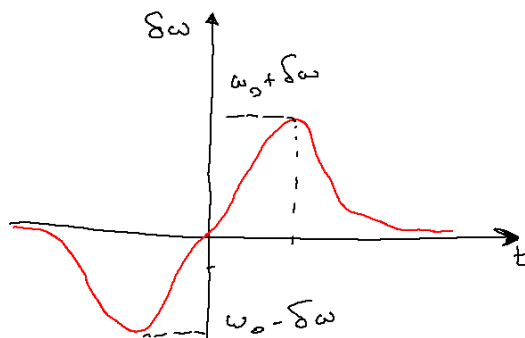


Figura 3.31: Creazione di nuove frequenze

Si creano molte nuove frequenze, perché l'impulso è già largo in frequenza. Si creano delle bande laterali in frequenza, e ciascuna di queste può avere un'intensità sufficiente per creare nuove frequenze ancora:

Basta che questo impulso si propaghi in una celletta di H_2O si vede proprio entrare il rosso e arrivare la luce bianca. Possiamo far propagare questo impulso in modo controllato in una fibra ottica a singolo modo.

Come è l'andamento temporale in frequenza? All'interno della fibra possiamo avere dei fenomeni di chirping. Le nuove frequenze che creiamo viaggeranno ciascuna con la propria differenza di fase. L'effetto non lineare genera nuove

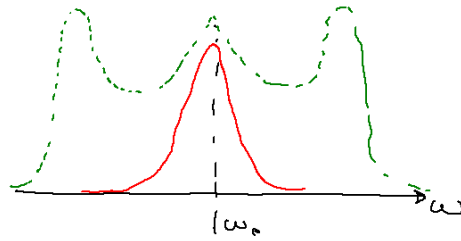
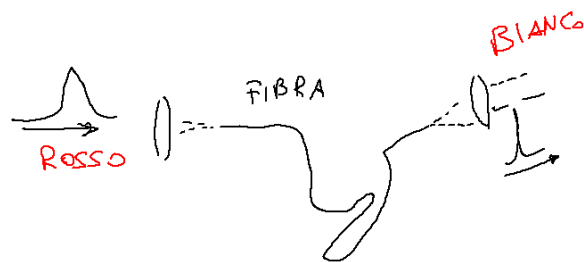


Figura 3.32: Generazione di continuo attraverso la *self-phase-modulation*



frequenze. Le componenti in frequenza sono tutte scollegate tra loro. Potremo usare questo nuovo spettro per ridurre la durata dell'impulso riallacciando in fase le nuove frequenze create; se riuscissimo a vincere il chirping avremo nuova banda a disposizione e impulsi molto più corti di quelli in entrata. Il modo per ricompattare il discorso è quello di usare la coppia di prismi. Il risultato è che abbiamo un impulso in cui tutte le frequenze si sono ricompattate in un impulso molto più corto di quello in ingresso.

Questo effetto ci permette di trarre vantaggi, permettendo di raggiungere impulsi ancora più corti. Farlo all'interno di una fibra in cui viene trasmesso il singolo modo è possibile avere maggior controllo.

3.9 Birifrangenza indotta

Discutiamo della possibilità di utilizzare la non linearità al terzo ordine per indurre birifrangenza nel mezzo. Se abbiamo un certo volume nel liquido, focalizzando l'impulso possiamo orientare queste molecole nella zona focale, secondo la direzione del campo elettrico. Nella zona del fuoco abbiamo introdotto una birifrangenza del mezzo, a tutti gli effetti un indice ordinario e uno straordinario. Questo è esattamente quello che si fa nell'effetto *Kerr* classico. Se si applica un campo elettrico robusto in questo liquido, le molecole si orientano, nella cella di *Kerr*. Questo ha bisogno di campi con differenze di potenziale di ordini di kilovolt su spessori nell'ordine del centimetro. Quello di cui parliamo noi invece è un effetto completamente ottico, è lo stesso campo elettrico del laser che induce questo effetto. Possiamo creare uno switch basato sulla birifrangenza.

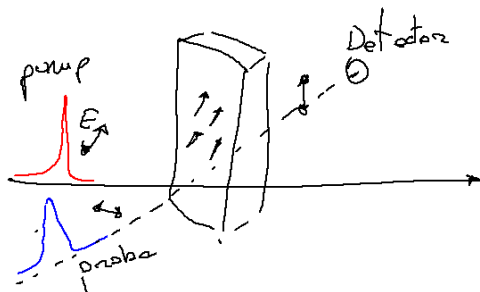


Figura 3.33: Schema di un gate ottico, l'impulso di probe non passa al detector (prima e dopo il mezzo ci sono due polarizzatori ortogonali), se passa l'impulso di pump mi crea birifrangenza all'interno del mezzo, adesso l'impulso la polarizzazione del probe viene ruotata dal mezzo, e quindi passa qualcosa all'interno del detector.

Tutta questa serie di fenomeni permettono di poter utilizzare nel dominio temporale dei fenomeni che avvengono nel transiente. Abbiamo bisogno di intervalli temporali molto brevi, per poter fissare ad intervalli differenti le cose che stiamo studiando. Questa cosa la si può fare anche con la up conversion. Si possono usare schemi logici in questo modo. Questo tipo di fenomenologia legata a effetti non lineari ad impulsi ultracorti diventa un mezzo per fare spettroscopia.

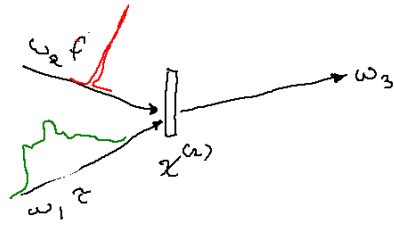


Figura 3.34: Up conversion usata come misuratore di impulso, la frequenza ω_3 è dato solo quando sono contemporanei, quindi possiamo studiare ω_1 a partire dal ritardo temporale con cui i due impulsi arrivano sul campione.

pia risolta in tempo. Si può studiare fenomeni temporali, con una risoluzione temporali altissime.

Capitolo 4

Ottica quantistica

Studieremo l'ottica quantistica a partire dai concetti di coerenza, in modo da avere il confronto tra luce caotica, e luce coerente, per poi andare a parlare direttamente di luce quantistica.

4.1 Coerenza al primo e al secondo ordine

I vari tipi di radiazione possono essere caratterizzati a partire dalla teoria della coerenza. Tutto questo permetterà di distinguere differenti comportamenti tra stati differenti di radiazione. La correlazione tra i campi è una funzione di correlazione al primo ordine. Possiamo fare correlazione anche al secondo ordine (quella sull'intensità del campo).

Parleremo in termini di stati coerenti di radiazione. Lo stato coerente è la migliore approssimazione possibile è quella di un campo laser perfettamente coerente dal punto di vista temporale e spaziale, questa è la migliore approssimazione di un'onda piana monocromatica. Oltre alla luce coerente parleremo anche di luce caotica, fornita da una sorgente non coerente, ad esempio da una lampada spettroscopica. Una lampada che possiamo rappresentare come un gas di atomi che emettono tutti alla stessa frequenza che hanno un effetto totalmente indipendente gli uni dagli altri. Come si distinguono i due comportamenti? Se rimaniamo al livello dell'interferenza tra i campi, ossia un esperimento fatto da un interferometro Michelson, non vedremo frange di interferenza. Vedremo le stesse caratteristiche per entrambi le radiazioni. Immaginiamo di caoticizzare questo laser, facendo passare questa radiazione coerente in uno scatteratore. In un mezzo composto da oggetti scateanti che diffondono la radiazione in tutte le direzioni dello spazio. Vogliamo delle particelle scatteranti che si muovano nel tempo, questo potrebbe essere un liquido in cui sono disperse microparticelle di pochi micron (polestirolo ad esempio) e si muovono. Facciamo passare il fascio laser, e questa diventa una sorta di lampada con un tempo dell'ordine di alcuni millisecondi. Un mezzo un po' rudimentale per creare luce caotica dal laser negli anni ottanta era quello di focalizzare il fascio laser su un vetro satinato. Questo disco viene fatto ruotare, e quindi abbiamo determinato una luce caotica. Negli anni 80 sono stati fatti lavori molto importanti per studiare questo tipo di radiazione. Un metodo naturale è quello di avere un gas di atomi, con un dominio temporale molto più breve. Abbiamo una luce caotica naturale

e artificiale, come si può descrivere? Se facciamo un effetto di interferenza in un Michelson il risultato è identico rispetto a quello in un laser. Non c'è modo di distinguere tra luce caotica e ordinata usando la coerenza al primo ordine.

La misura di correlazione al secondo ordine ci permetterà di fare questa cosa. Come appare un laser da un punto di vista temporale, se il laser è un laser perfettamente a singolo modo, questa è la migliore approssimazione a stato coerente. Se andiamo a studiare l'andamento del campo in funzione del tempo questa è un'onda piana monocromatica.

Supponiamo che il laser sia a multi modo, il treno d'onda si interrompa continuamente con i salti casuali. Se fossimo in grado di studiare il laser come andamento di intensità del tempo, con un detector sufficientemente rapido avremo visto qualcosa del tipo:

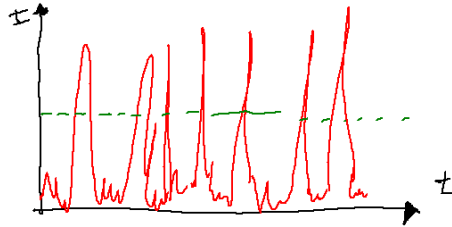


Figura 4.1: Andamento del laser nell'intensità

Questo succede perché il laser è multimodo, non bastano più le singole rate equation, i modi sono in competizione tra di loro perché non c'è una precisa relazione di fase. Questa serie di picchi nascono dai salti di fasi caotici tra i vari modi. Se il laser fosse satato singolo modo avremo visto una curva costante (andamento vero del tempo, non mediato). Il campo totale sarà dato da una sommatoria dei campi parziali.

$$E(t) = \sum E_i(t) = E_0 e^{-2\pi i \nu_0 t} \left[e^{i\varphi_1(t)} + e^{i\varphi_2(t)} + \dots + e^{i\varphi_n(t)} \right]$$

Prendiamo un'intensità mediata su un ciclo, otteniamo proprio l'andamento caotico mostrato nella Figura 4.1. Se lo mediamo nel tempo (osservando con un detector lento).

$$\langle I(t) \rangle = \langle |E(t)|^2 \rangle = E_0^2 \langle \left| e^{i\varphi_1(t)} + e^{i\varphi_2(t)} + \dots + e^{i\varphi_n(t)} \right|^2 \rangle = N E_0^2$$

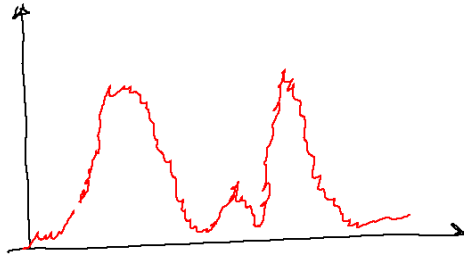
Il campo che può rappresentare in modo efficiente la luce caotica. Danno luogo ad un'espressione finale di questo tipo:

$$E(t) = \sum_i E_i(t) = E_0 \exp(-2\pi i \nu_0 t) \left[e^{i\varphi_1(t)} + e^{i\varphi_2(t)} + \dots \right]$$

In cui ciascuna fase cambia nel tempo in modo puramente caotico. Questa modellizzazione rappresenta una situazione fisica ben precisa, il caso in cui abbiamo N sistema atomici che stanno all'interno del volume che emettono in

modo completamente scorrelato a frequenza ν_0 . Il campo cambia con dei salti di fasi random sui quali si possono riconoscere dei tempi medi τ_c . Questo può essere dato da una serie di atomi che per una collisione che mi generano dei salti di fasi delle collisioni. Quello che viene fuori in una trasformata di Fourier di un oggetto del genere viene fuori una lorentziana con una larghezza di riga pari a τ_c . Se andiamo a cercare l'intensità di una cosa del genere abbiamo variazioni molto rapide nell'intensità. Questo si può osservare per un allargamento di riga lorentziano. Una cosa del genere può avvenire al di sotto dei 10^{-9} secondi. Un altro esempio può essere lo scattering di un laser su un liquido colloidale. Abbiamo in tutti questi casi emettitori sotto un effetto di un allargamento omogeneo. Possiamo creare una situazione del genere focalizzando una radiazione laser con un diffusore muoversi, e quello che conta è la rapidità con cui girano. Questo per ciò che riguarda l'allargamento omogeneo.

L'allargamento di tipo inhomogeneo la situazione è simile, vediamo un disordine a tempi lunghi e un disordine a tempi corti. Abbiamo delle sottostrutture di rumore all'interno dei picchi.



Questo è dovuto al fatto di avere una riga gaussiana che si annulla a tempi corti rispetto alla lorentziana.

La densità di intensità deve essere mediata su un ciclo ottico. Questo è quello che avremo su un laser multimodo. Se il rivelatore ha un tempo di risposta maggiore di τ_c allora la sorgente appare uniforme e non caotica.

4.2 Teoria classica del Beamsplitter

Il Beamsplitter ha due porte di ingresso in cui entra un campo E_1 e E_2 e due campi in uscita E_3 ed E_4 . Se i campi hanno tutti la stessa polarizzazione possiamo scrivere:

$$E_3 = \mathcal{R}_{31}E_1 + \tau_{32}E_2 \quad E_4 = \tau_{41}E_1 + \mathcal{R}_{42}E_2$$

$$\begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{31} & \tau_{32} \\ \tau_{41} & \mathcal{R}_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Si conserva l'energia (senza perdite)

$$|E_3|^2 + |E_4|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 \quad (4.1)$$

$$|E_3|^2 = |\mathcal{R}_{31}|^2|E_1|^2 + |\tau_{32}|^2|E_2|^2 + 2\Re(\mathcal{R}_{31}\tau_{32}^*E_1E_2^*)$$

$$|E_4|^2 = |\mathcal{R}_{42}|^2 |E_2|^2 + |\tau_{41}|^2 |E_1|^2 + 2\Re(\mathcal{R}_{42}^* \tau_{41} E_1 E_2^*)$$

$$|E_3|^2 + |E_4|^2 = (|\mathcal{R}_{31}|^2 + |\tau_{32}|^2) |E_1|^2 + (|\mathcal{R}_{42}|^2 + |\tau_{32}|^2) |E_2|^2 + E_1 E_2^* 2\Re(\mathcal{R}_{31} \tau_{32}^* + \tau_{41} \mathcal{R}_{42}^*)$$

Imponendo la condizione di conservazione dell'energia 4.1 Allora notiamo che:

$$|\mathcal{R}_{31}|^2 + |\tau_{41}|^2 = |\mathcal{R}_{42}|^2 + |\tau_{32}|^2$$

L'altra condizione è che:

$$\mathcal{R}_{31} \tau_{32}^* + \tau_{41} \mathcal{R}_{42}^* = 0$$

Questa condizione pone condizioni sugli sfasamenti dei campi. Possiamo scrivere:

$$\mathcal{R}_{31} = |\mathcal{R}_{31}| e^{i\varphi_{31}}$$

$$\tau_{32} = |\tau_{32}| e^{i\varphi_{32}}$$

Da cui

$$|\mathcal{R}_{31} \tau_{32}| e^{i(\varphi_{31} - \varphi_{32})} + |\tau_{41} \mathcal{R}_{32}| e^{i(\varphi_{41} - \varphi_{42})} = 0$$

Da cui

$$\begin{cases} \varphi_{31} - \varphi_{32} + \varphi_{42} - \varphi_{41} = \pi \\ |\mathcal{R}_{31} \tau_{32}| = |\tau_{41} \mathcal{R}_{32}| \end{cases} \quad \frac{|\mathcal{R}_{31}|}{|\tau_{41}|} = \frac{|\mathcal{R}_{42}|}{|\tau_{32}|}$$

La prima ipotesi che facciamo è che tutti i coefficienti siano reali:

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} = \varphi_{41} = 0 \quad \varphi_{42} = \pi$$

$$\mathcal{R}_{31} = -\mathcal{R}_{42} = |R|$$

$$\tau_{32} = \tau_{41} = |\tau|$$

L'altra ipotesi che può essere adottata è:

$$\varphi_{31} = \varphi_{42} = \varphi_{\tau} \quad \varphi_{32} = \varphi_{41} = \varphi_{\tau}$$

Dove

$$\mathcal{R}_{31} = \mathcal{R}_{42} = |R| e^{i\varphi_{\tau}}$$

$$\tau_{32} = \tau_{41} = |\tau| e^{i\varphi_{\tau}}$$

$$\begin{cases} |R|^2 + \tau^2 = 1 \\ R\tau^* + R^*\tau = 0 \\ \varphi_R - \varphi_{\tau} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

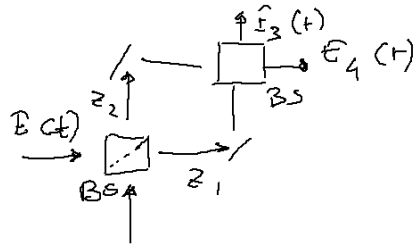
Normalmente si adotta la seconda convenzione. A questo punto se il beam-splitter è simmetrico, la matrice è unitaria:

$$|\mathcal{R}| = |\tau| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{31} & \tau_{32} \\ \tau_{41} & \mathcal{R}_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

E matrice inversa

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{31}^* & \tau_{41}^* \\ \tau_{32}^* & \mathcal{R}_{42}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix}$$



4.2.1 Funzione di correlazione al primo ordine

Il primo esperimento classico del beamsplitter è l'interferometro di Mike-Zender:

In questa configurazione avremo:

$$E_4(t) = \mathcal{R}\tau E(t_1) + \tau\mathcal{R}E(t_2)$$

$$\begin{cases} t_1 = t - \frac{z_1}{c} \\ t_2 = t - \frac{z_2}{c} \end{cases}$$

$$E_3(t) = \mathcal{R}^2 E(t_2) + \tau^2 E(t_1)$$

Nell'interferometro del Michelson invece una delle due oscite è il campo che ritorna all'indietro.

A questo punto passiamo all'intensità mediata su un ciclo. Avremo:

$$E_4(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c |E_4|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c |\mathcal{R}|^2 |\tau|^2 [|E(t_1)|^2 + |E(t_2)|^2 + 2\Re(E^*(t_1)E(t_2))]$$

Occorre fare questa misura di intensità su un tempo di misura T molto più lungo di τ_c

$$T \gg \tau_c$$

Dobbiamo prendere la media del campo:

$$\langle E_4(t) \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c |\mathcal{R}|^2 |\tau|^2 [\langle |E(t_1)|^2 \rangle + \langle |E(t_2)|^2 \rangle + 2\Re \langle E^*(t_1)E(t_2) \rangle]$$

L'ultimo termine è proprio il termine che contiene l'interferenza al primo ordine a cui siamo interessati. Avremo che:

$$\langle E^*(t_1)E(t_2) \rangle = \frac{1}{T} \int E^*(t_1)E(t_2) dt_1$$

Chiamiamo $\Delta\tau = t_1 - t_2$

$$\tau = \frac{z_1 - z_2}{c}$$

$$\langle E^*(t)E(t + \Delta\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int E^*(t)E(t + \Delta\tau)$$

Possiamo definire la.

$$g^{(1)}(\Delta\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t + \Delta\tau) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle}$$

Questo oggetto è la funzione di coerenza

$$\langle I_4(t) \rangle = 2|\mathcal{R}|^2|\tau|^2 \langle I(t) \rangle \left[1 + \Re g^{(1)}(\Delta\tau) \right]$$

Sappiamo già per come l'abbiamo costruita che:

$$g^{(1)}(-\tau) = g^{(1)*}(\tau)$$

Nel caso di un'onda piana la funzione di correlazione al primo ordine ha una forma banale:

$$g^{(1)}(\Delta\tau) = e^{-2\pi i\nu_0 t}$$

La visibilità di questo oggetto è pari ad 1 (modulo della $g^{(1)}$).

Se andiamo a considerare una luce allargata per collisione avremo che:

$$\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle = NE_0^2 e^{-(2\pi i\nu_0 t + \frac{|\Delta\tau|}{\tau_c})}$$

$$|g^{(1)}(\Delta\tau)| = e^{-\frac{|\Delta\tau|}{\tau_c}}$$

Se abbiamo un all'argomento di tipo doppler:

$$g^{(1)}(\Delta\tau) = e^{-2\pi i\nu_0 t} e^{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\Delta\tau}{\tau_c} \right)^2$$

In questo caso stiamo vedendo il differente valore del comportamento di un'onda piana monocromatica, ma non c'è nessuna differenza di comportamento tra i vari tipi di radiazioni. La coerenza possiamo averla anche nello spazio, a quale distanza si mantiene la coerenza? Un'onda piana ha una coerenza spaziale infinita, ma se un'onda piana viene perturbata da qualsiasi cosa localmente acquisisce delle fasi, è come se avessimo un piano con delle increspature.

Se abbiamo il campo espresso nel dominio del tempo possiamo indicarlo come:

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T dt E(t) e^{i\omega t}$$

Possiamo definire la $f(\omega)$ come:

$$f(\omega) = \frac{|E(\omega)|^2}{T} = \frac{1}{2\pi T} \int_T dt \int_T dt' E^*(t) E(t') e^{i\omega(t-t')}$$

Possiamo scriverlo come:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) \langle E^*(t)E(t + \Delta\tau) \rangle e^{i\omega\Delta\tau}$$

Dove abbiamo esteso all'infinito perché $T \gg \tau_c$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = \langle E^*(t)E(t + \Delta\tau) \rangle$$

Se definiamo

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) g^{(1)}(\Delta\tau) e^{i\omega\Delta\tau}$$

Questo è lo spettro di potenza normalizzato. Esiste un teorema che stabilisce che la $F(\omega)$ è la trasformata di Fourier della $g^{(1)}$ (teorema di **Wara-Kintcher**).

Questo è come si basa la tecnica di spettroscopia a trasformata di Fourier.

4.3 Fluttuazioni di intensità

Riprendiamo il modello di atomi, e vediamo le fluttuazioni di intensità al secondo ordine. Prendiamo la media dell'intensità effettuata su un periodo molto più grande di τ_c :

$$\bar{I} = \langle \bar{I}(t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \langle |e^{i\varphi_1(t)} + e^{i\varphi_2(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)}|^2 \rangle$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 N$$

Andiamo a studiare il valor medi di:

$$\langle \bar{I}^2(t) \rangle$$

In modo di avere informazioni sulla statistica. Questo ci da differenze tra i vari tipi di radiazione.

$$\langle \bar{I}^2(t) \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0^2 c^2 E_0^4 \langle |e^{i\varphi_1(t)} + e^{i\varphi_2(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)}|^4 \rangle$$

Andiamo a fare questo calcolo, i termini che non si annullano sono i seguenti:

$$\langle \bar{I}^2(t) \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0^2 c^2 E_0^4 \left[\sum_i |e^{i\varphi_i(t)}|^4 + \sum_{i>j} \langle |e^{i\varphi_1(t)+\varphi_j(t)}|^2 \rangle \right]$$

$$\langle \bar{I}^2(t) \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0^2 c^2 E_0^4 [N + 2N(N-1)] = \frac{1}{4} \varepsilon_0^2 c^2 E_0^4 (N + 2N^2 - 2N)$$

$$\langle \bar{I}^2(t) \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0^2 c^2 E_0^4 N(2N-1) = \frac{1}{4} \varepsilon_0^2 c^2 E_0^4 N^2 \frac{2N-1}{N}$$

$$\langle \bar{I}^2(t) \rangle = \left(2 - \frac{1}{N} \right) \bar{I}^2$$

Poiché $N \rightarrow \infty$

$$\langle \bar{I}^2(t) \rangle = 2\bar{I}^2(t)$$

$$\Delta I^2 = \langle \bar{I}^2 \rangle - \langle \bar{I}(t) \rangle^2 = \bar{I}^2$$

Le fluttuazioni sono dell'ordine del valore medio dell'intensità. Questo risultato è del tutto analogo a quello che dovremo riconoscere quando si considera un numero grande di fotoni all'interno di una scatola riflettente e considerando un singolo modo di oscillazione del campo. Ossia andiamo a considerare quando

$$\langle n \rangle \gg 1$$

Andiamo a scrivere la probabilità di avere m fotoni. Se andiamo a considerare un numero grande di fotoni che fluttuano, questo è equivalente a considerare la probabilità:

$$P(m) = \frac{e^{-\frac{E_m}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}} = \frac{x^m}{\sum_i x^m}$$

$$\sum x^m = \frac{1}{1-x}$$

$$P(m) = x^m(1-x)$$

Se vogliamo conoscere il numero medio di fotoni questo è dato da:

$$\sum_m mP(m) = (1-x) \sum_m mx^m = (1-x)x \partial_x \sum_m x^m = \frac{x}{1-x} = \frac{x}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Possiamo scrivere un nuovo tipo di radiazione, che è la radiazione di tipo termico. Prendiamo il valore medio di m :

$$\langle m \rangle - \langle m \rangle x = x$$

$$\langle m \rangle = x(1 + \langle m \rangle)$$

$$x = \frac{\langle m \rangle}{1 + \langle m \rangle}$$

$$P(m) = x^m(1-x) = \left(\frac{\langle m \rangle}{1 + \langle m \rangle} \right)^m \left(1 - \frac{\langle m \rangle}{1 + \langle m \rangle} \right) = \frac{\langle m \rangle^m}{(1 + \langle m \rangle)^{1+m}}$$

Se calcoliamo la varianza in questo caso otteniamo:

$$(\Delta m)^2 = \sum_m (m - \langle m \rangle)^2 P(m) = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2$$

$$\langle m(m-1)(m-2) \cdots (m-r+1) \rangle = \sum_m m(m-1)(m-2) \cdots (m-r+1) P(m)$$

Nel caso in cui abbiamo un momento secondo questa espressione diventa:

$$\langle m(m-1) \rangle = 2 \langle m \rangle^2$$

$$\langle m^2 - m \rangle = 2m^2$$

$$\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle = 2m^2$$

Da cui otteniamo la varianza:

$$2 \langle m \rangle^2 + \langle m \rangle = \langle m^2 \rangle$$

$$\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = \langle m \rangle^2 + \langle m \rangle$$

Questa è una differenza molto profonda tra questa luce (luce caotica termica) e il caso di una radiazione con statistica poissoniana. Qui troviamo la prima differenza, la vediamo all'ivello della varianza tra una radiazione coerente e una luce caotica. Nel caso del laser a singolo modo la varianza è sempre poissoniana, nel caso invece di una radiazione termica qui abbiamo un surplus di deviazione. Questa è detta *superpoissoniana*. Questo oggetto può anche essere una luce caotica purché la osserviamo con un tempo ΔT che è molto minore di τ_c .

Se andiamo a vedere tempi molto brevi vediamo questo questo comportamento superpoissoniano, se ci mettiamo a tempi molto lunghi abbiamo un comportamento poissoniano.

Esiste anche una statistica subpoissoniana, che appartiene ad una luce puramente quantistica. Come si quantifica questa differenza? Possiamo avere due tipi di relazioni, una luce coerente con un certo spettro, osservata con un tempo di misura che è molto maggiore di τ_c . Per quantificare questa cosa esistono le coerenze al secondo ordine.

4.3.1 Coerenza al secondo ordine

Sia la funzione:

$$G^{(2)}(\Delta\tau) = \langle I(t)I(t + \Delta\tau) \rangle = \langle E^*(t)E^*(t + \Delta\tau)E(t)E(t + \Delta\tau) \rangle$$

E definiamo la funzione di coerenza del secondo ordine:

$$g^{(2)}(\Delta\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \Delta\tau) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2}$$

Questa è una funzione pari: $g^{(2)}(\Delta\tau) = g^{(2)}(-\Delta\tau)$.

Un'altra proprietà interessante:

$$1 \leq g^{(2)}(0) \leq \infty$$

$$0 \leq g^{(2)}(\Delta\tau) \leq \infty$$

$$g^{(2)}(\Delta\tau) \leq g^{(2)}(0)$$

Un'altra proprietà interessante che vale per la luce caotica

$$g^{(2)}(\Delta\tau) = 1 + |g^{(1)}(\Delta\tau)|^2$$

Con la luce caotica abbiamo un surplus in prossimità di $\tau = 0$. Questo effetto viene detto effetto di Bouncing



I fotoni tendono a uscire insieme. Per misurare questo si usa l'interferometro di Angery-Brow. Un interferometro che misura le correlazioni di intensità.

Dobbiamo trarre informazione sulla statistica, e questo si manifesta sulle funzioni di correlazione al secondo ordine.

Una luce puramente quantistica ha una $g^{(2)}(0) = 0$ quindi i fotoni arrivano ben separati, e sul beamsplitter arrivano uno per volta.

Per fare luce quantistica, si usa la fluorescenza parametrica. La cosa interessante di questa sorgente è che siamo sicuri che se c'è un fotone in un modulo ce ne deve essere un altro in alla frequenza giusta. Questo tipo di misurazione si chiama eralding. Generare condizioni a singolo fotone abbiamo segnali che sono sempre uguali. Servono efficienti sorgenti a singoli fotoni non probabilistici, ed efficienti rivelatori a singoli fotoni.

$$g^{(2)}(\Delta\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \Delta\tau) \rangle}{\langle E^*(t)E(t + \Delta\tau) \rangle^2} \xrightarrow{\tau=0} \frac{\langle I^2(t) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

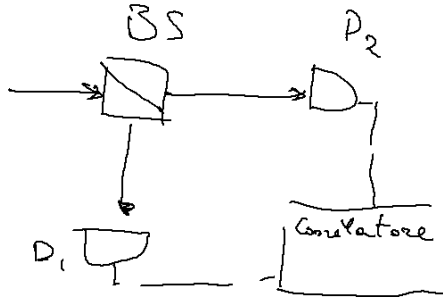


Figura 4.2: Il correlatore ci da il prodotto tra le intensità in media. Possiamo aggiungere sia ritardi elettronici che ottici. Le caratteristiche di coerenza nella catena di elettroni si mantengono. Questo strumento consente anche di vedere correlazioni spaziali. Se questi detector abbiamo una piccola fenditura e si muovono trasversalmente, e si può anche studiare la $g^{(2)}$.

Il fenomeno di Bouncing è quello per cui per $\tau = 0$ per una radiazione termica o caotica (se il tempo di osservazione è piccolo rispetto al tempo di coerenza) la $g^{(2)}(0) = 2$. Questo implica che i fotoni tendono ad uscire insieme. Se stiamo in regime di pochi fotoni questo aumenta la possibilità di osservare le coincidenze. Questa è l'effetto della statistica superpoissoniana.

4.4 Quantizzazione del campo elettro magnetico

Partiamo dalle equazioni di maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} & \nabla \times \vec{H} &= \partial_t \vec{D} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \sigma & \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Supponiamo di scrivere:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Possiamo introdurre questo potenziale vettore. Se sostituiamo questo oggetto:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \partial_t \vec{A} \\ \nabla \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) &= 0\end{aligned}$$

Da cui abbiamo che il campo

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A}$$

è conservativo, e possiamo introdurre un potenziale scalare.

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

Se ϕ è uno scalare. Questa proprietà è molto semplice da verificare.

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\nabla \phi(r, t)$$

Adesso abbiamo ricondotto le equazioni di Maxwell a due equazioni:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad -\nabla\phi = \vec{E} + \partial_t \vec{A}$$

Riscriviamo le altre due equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Quello che otteniamo sostituendo le equazioni per i potenziali.

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \vec{A} &= \mu_0 \varepsilon_0 \left[-\partial_t^2 \vec{A} - \nabla \partial_t \phi \right] + \mu_0 \vec{J} \\ -\partial_t (\nabla \vec{A}) - \nabla \cdot \nabla \phi &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Poi abbiamo l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \sigma = 0$$

I potenziali sono definiti a meno di un'invarianza di gauge; Supponiamo di avere:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_0 \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A}_0 - \nabla \phi_0$$

Mandiamo il potenziale vettore a meno di un campo a rotazione nulla:

$$\vec{A}_0 \rightarrow \vec{A}_0 + \nabla \chi$$

Allo stesso modo introduciamo una variazione nel potenziale ϕ :

$$\begin{aligned}\phi_0 &\rightarrow \phi_0 + z \\ E &= -\partial_t \vec{A}_0 - \partial_t \nabla \chi - \nabla \phi_0 - \nabla z\end{aligned}$$

Da cui la condizione di invarianza di gauge si ottiene:

$$\nabla (\partial_t \chi - z) = 0$$

Abbiamo trovato la relazione che lega z e χ .

Introduciamo la gauge di Coulomb, tale che

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Possiamo mostrare che questo è possibile:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= \nabla \cdot \vec{A}_0 - \nabla^2 \chi = 0 \\ \nabla^2 \chi &= \nabla \cdot \vec{A}_0\end{aligned}$$

L'esistenza della soluzione di questa equazione mi garantisce sempre l'esistenza della gauge di Coulomb.

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Nella gauge di Coulomb questo oggetto diventa:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Il potenziale scalare verifica l'equazione di Poisson. Possiamo scriverlo come:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dr' \frac{\sigma}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

Il teorema di Helmholtz dice che, dato un campo $\vec{A}(r, t)$ possiamo sempre separarlo in due termini:

$$\vec{A}(r, t) = \vec{A}_L(r, t) + \vec{A}_T(r, t)$$

Tali che

$$\nabla \cdot \vec{A}_T(r) = 0 \quad \nabla \times \vec{A}_L(r) = 0$$

Applichiamo questa suddivisione al vettore \vec{J} nell'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\vec{J}_L + \vec{J}_T) = \nabla \cdot \vec{J}_L = -\partial_t \sigma$$

Siccome J_L è a rotazione nulla, possiamo scriverlo come il gradiente di una funzione scalare:

$$\nabla \vec{J}_L = \nabla \psi$$

Da cui:

$$-\partial_t \sigma = \nabla^2 \psi$$

$$\psi = \varepsilon_0 \partial_t \phi \quad \vec{J}_L = \varepsilon_0 \nabla \partial_t \phi$$

Da questo segue che:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \phi = \mu_0 [\nabla \partial_t \phi + \vec{J}_T]$$

Rimane solo:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}_T$$

Questa equazione ammette una soluzione:

$$A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dr' \frac{J_T(r', t)}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

La gauge di Coulomb mi ha permesso di trovare una formula per A e per ϕ . Possiamo applicare il teorema di Helmholtz anche nel campo magnetico.

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \nabla \cdot B_L = 0$$

Inoltre

$$\nabla \times B_L = 0$$

Da cui \vec{B} è puramente trasversale:

$$\vec{B} = \vec{B}_T$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_T + \vec{E}_L \\ \vec{E}_L &= -\nabla\phi \quad \vec{E}_T = -\partial_t\vec{A} \\ \vec{J}_L &= -\varepsilon_0\partial_t\vec{E}_L\end{aligned}$$

Possiamo riscrivere le equazioni di Maxwell con queste convenzioni:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_T &= -\partial_t\vec{B} \\ \nabla \times \vec{B} &= \varepsilon_0\mu_0 [\partial_t E_L + \partial_t E_t] = \mu_0 [\vec{J}_L + \vec{J}_T] = \varepsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E}_t + \mu_0\vec{J}_T \\ \nabla \cdot E_T &= \nabla \cdot \vec{B} = 0\end{aligned}$$

Siamo arrivati a scrivere un'equazione d'onda utilizzando i potenziali, abbiamo riscritto le equazioni di Maxwell. Iniziamo a considerare il caso di un campo libero totalmente classico.

$$\begin{aligned}\vec{J}_T &= 0 \\ -\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} &= 0\end{aligned}$$

Immaginiamo un cubo nello spazio ed esprimiamo il potenziale come un'espansione in serie di Fourier:

$$\vec{A} = \sum_k \left[\vec{A}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + A^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]$$

Scriviamo le componenti del vettore d'onda:

$$\begin{aligned}k_x &= \frac{2\pi}{L}\nu_x \quad k_y = \frac{2\pi}{L}\nu_y \quad k_z = \frac{2\pi}{L}\nu_z \\ \nu_x, \nu_y, \nu_z &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{k}A_k(t) = \vec{k} \cdot A_k^*(t) = 0$$

$$\begin{aligned}k^2\vec{A}_k(t) + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 A_k &= 0 \\ \partial_t^2 A_k(t) + \omega_k^2 A_k(t) \quad \vec{A}_k(t) &= \vec{A}_k e^{i\omega_k t} \\ \vec{A} &= \sum_k \left[A_k e^{-i(\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{r})} + A_k^* e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right]\end{aligned}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}E_k &= i\omega_k \left[\vec{A}_k e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{A}_k^* e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \\ B_k &= i\vec{k} \left[\vec{A}_k e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{A}_k^* e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]\end{aligned}$$

E allo stesso modo l'energia mediata su un ciclo:

$$\bar{\mathcal{E}}_k = \frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_0 \bar{E}_k^2 + \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_k^2 \right) dV = 2\varepsilon_0 V \omega_k^2 \vec{A}_k \vec{A}_k^*$$

Da cui possiamo riscrivere il campo in modo da ottenerlo unitario:

$$\vec{A}_k = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0 V \omega_k^2}} (\omega_k Q_k + iP_k) \vec{\varepsilon}_k$$

$$\vec{A}_k^* = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0 V \omega_k^2}} (\omega_k Q_k - iP_k) \vec{\varepsilon}_k$$

Fino ad ora è tutto classico, questo è un oscillatore armonico classico, per ottenere la quantizzazione del campo elettromagnetico dobbiamo sostituire le grandezze Q e P con gli operatori quantistici di posizione e momento. L'hamiltoniana può essere scritta come:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2$$

Adesso gli operatori \hat{q} e \hat{p} sono :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega\hat{q} + i\hat{p})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega\hat{q} - i\hat{p})$$

E le trasformazioni inverse:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

L'operatore $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ diventa:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{q}^2 - im\omega\hat{q}\hat{p} + im\omega\hat{p}\hat{q}) = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega \right)$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega \right)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

Possiamo subito vedere gli autostati di questo oggetto:

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger \right) |n\rangle = E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger (-1 + \hat{a}\hat{a}^\dagger) = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger$$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger \right) |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{a}^\dagger |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle$$

$$\begin{aligned}
|n+1\rangle &= \hat{a}^+ |n\rangle \\
E_{n+1} &= E_n + \hbar\omega \\
\hat{H} |n+1\rangle &= E_{n+1} |n+1\rangle
\end{aligned}$$

Allo stesso modo con l'operatore \hat{a} si abbassa di uno questo indice. Poiché l'hamiltoniana è una grandezza definita positiva:

$$\begin{aligned}
\hat{H}\hat{a}|0\rangle &= (E_0 - \hbar\omega)\hat{a}|0\rangle \\
\hat{H}|0\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle = E_0|0\rangle \\
E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega \\
E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega
\end{aligned}$$

Questi sono i livelli dell'oscillatore armonico. Considerando l'autostato $|n\rangle$ generico:

$$\begin{aligned}
\hat{H}|n\rangle &= \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle \\
\hat{n} &= \hat{a}^+\hat{a}
\end{aligned}$$

Dove questo operatore conta il numero di eccitazioni dell'oscillatore armonico:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$

Deve valere la regola di normalizzazione:

$$\langle n-1|n-1\rangle = \langle n|n\rangle = \langle n+1|n+1\rangle = 1$$

Questo porta a concludere che

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle + 1$$

A questo punto abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\langle n-1|\hat{a}|n\rangle &= \langle n-1|\sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{n} \\
\langle n+1|\hat{a}^+|n\rangle &= \langle n+1|\sqrt{n+1}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

Useremo gli operatori di quadratura.

$$\begin{aligned}
\hat{X} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q} = \frac{1}{2}(\hat{a}^+ + \hat{a}) \\
\hat{Y} &= \sqrt{12m\hbar\omega}\hat{p} = \frac{1}{2}(\hat{a}^+ - \hat{a})
\end{aligned}$$

Questi operatori sono hermitiani, tali che:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hbar\omega\left(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2\right) \quad [\hat{X}, \hat{Y}] = \frac{1}{2}i \\
|n\rangle &= \frac{\hat{a}^+|n-1\rangle}{\sqrt{n}} = \frac{\hat{a}^+\hat{a}^+|n-2\rangle}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} = \dots = \frac{(\hat{a}^+)^n|n-m\rangle}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}\dots\sqrt{n-m}}
\end{aligned}$$

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n |0\rangle}{\sqrt{n!}}$$

$$\langle n|\hat{q}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \langle n|(\hat{a} + \hat{a}^+)|n\rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \langle n|(\hat{a}^+\hat{a}^+ + \hat{a}^2 + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+)|n\rangle = \frac{\hbar}{\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle n|\hat{p}^2|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$[\hat{a}, (\hat{a})^n] = n(\hat{a}^+)^{n-1} \quad [(\hat{a})^2, \hat{a}^+] = n(\hat{a})^{n-1}$$

4.4.1 Operatori elettromagnetici

Il potenziale vettore può essere espresso all'interno di una cavità come

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1,2} \hat{a}_{\vec{k},\lambda} A_{\vec{k},\lambda}(\vec{r}, t)$$

$$k_x = \frac{2\pi\nu_x}{L} \quad k_y = \frac{2\pi\nu_y}{L} \quad k_z = \frac{2\pi\nu_z}{L}$$

Per ciascun modo della cavità abbiamo trovato queste relazioni:

$$a_{\vec{k},\lambda} |n_{k\lambda}\rangle = \sqrt{n_{k\lambda}} |n_{k\lambda} - 1\rangle$$

$$a_{\vec{k},\lambda}^+ |n_{k,\lambda}\rangle = \sqrt{n_{k,\lambda} + 1} |n_{k\lambda} + 1\rangle$$

$$\hat{n}_{k\lambda} = \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ a_{\vec{k},\lambda}$$

E le regole di commutazione sono:

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Possiamo scrivere uno stato generale:

$$|n_{k1} n_{k2} \dots\rangle = |n_{k1}\rangle |n_{k2}\rangle \dots = |\{n_{k\lambda}\}\rangle$$

L'hamiltoniana sarà data da:

$$\hat{H}_R = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hat{H}_{k\lambda}$$

Dove

$$\hat{H}_{k\lambda} = \frac{1}{2} \hbar\omega_{\lambda} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+)$$

Dove

$$E_R = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} E_{k\lambda}$$

E il potenziale vettore:

$$A_{k\lambda} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{k\lambda}$$

Stesse condeguenze si ottengono per il campo magnetico in cui:

$$\vec{E}_T = -\partial_t \vec{A}$$

$$\vec{E}_L = -\nabla\phi$$

$$E_{k\lambda} = i\omega_k \left[A_{k\lambda} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + cc \right]$$

Possiamo definire un nuovo termine di fase:

$$\chi_k(\vec{r}, t) = \omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{\pi}{2}$$

Il $\frac{\pi}{2}$ viene dalla presenza della i .

$$\hat{E}_T(\vec{r}, t) = E_t^+(\vec{r}, t) + E_t^-(r, t)$$

$$E_t^+(\vec{r}, t) = \sum_k \sum_\lambda \hat{e}_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \hat{a}_{k\lambda} e^{-i\chi_{k\lambda}(\vec{r}, t)}$$

Possiamo introdurre gli operatori di quadratura

$$[\hat{X}_{k\lambda}, \hat{Y}_{k'\lambda'}] = \frac{i}{2} \delta_{RR'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\hat{E}_T(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_\lambda \hat{e}_{k\lambda} \sqrt{\frac{2\hbar\omega_k}{\varepsilon_0 V}} \left\{ \hat{X}_{\vec{k},\lambda} \cos[\chi_{k\lambda}(\vec{r}, t)] + \hat{Y}_{k\lambda} \sin[\chi_{k\lambda}(\vec{r}, t)] \right\}$$

L'hamiltoniana di radiazione diventa quindi in questo caso:

$$\hat{H}_R = \sum_k \sum_\lambda \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{k\lambda}^+ \hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{X}_{k\lambda}^2 + \hat{Y}_{k\lambda}^2 \right)$$

$$H_R |\{n_{k\lambda}\}\rangle = \sum_k \sum_\lambda \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) |\{n_{k\lambda}\}\rangle$$

Dobbiamo distinguere tra stati puri e miscele statistiche di stati. Uno stato puro è uno stato coerente. In tutti i casi non coerenti (come per descrivere la luce caotiche) abbiamo miscele di stati.

Se consideriamo un set di basi tale che:

$$\sum_s |s\rangle \langle s| = I$$

Allora possiamo scrivere il valore medio di uno stato come:

$$\langle O \rangle = \sum_r s P_r \langle r|O|s\rangle \langle s|r\rangle = \sum_{rs} P_r \langle s|r\rangle \langle r|O|s\rangle$$

Possiamo definire l'operatore matrice densità definito come:

$$\hat{\rho} = \sum_r P_r |r\rangle \langle r|$$

$$\langle O \rangle = \sum_s \langle s|\hat{\rho}\hat{O}|s\rangle$$

Da cui

$$\langle O \rangle = \text{tr } \rho O$$

4.5 Rappresentazione di interazione

Nello schema di interazione abbiamo una situazione intermedia in cui la dipendenza dal tempo è comune sia a operatori che a funzione d'onda.

$$\hat{E}_T(\vec{r}) = i \sum_{k\lambda} \hat{e}_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left\{ \hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\}$$

Per una miscela statistica in shroedinger, l'operatore ρ_s che dipende dal tempo può essere scritto come:

$$\sum_s P_s |\psi_s(t)\rangle \langle \psi_s(t)|$$

$$\sum_s P_s e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi_s(0)\rangle \langle \psi_s(0)| e^{\frac{iHt}{\hbar}}$$

Differenziando rispetto al tempo otteniamo l'evoluzione della matrice densità:

$$\frac{d\rho_s}{dt} = [\hat{H}, \rho_s(t)]$$

Nello schema di Heisemberg la funzione d'onda non dipende dal tempo:

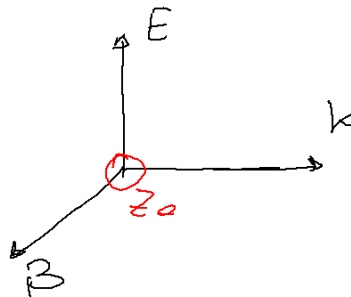
$$\psi_H = e^{\frac{iHt}{\hbar}} \psi_S$$

Mentre invece l'operatore evolve nel tempo:

$$\hat{O}_H = e^{i\frac{Ht}{\hbar}} \hat{O}_S e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \rightarrow i\hbar \frac{d\hat{O}_H}{dt}(t) = [\hat{O}, \hat{H}]$$

4.6 Emissione spontanea

Analizziamo l'interazione radiazione materia. Descriviamo un sistema atomico, un nucleo con carica Ze ed una serie di elettroni.



La densità di carica è

$$\sigma = -e \sum_{\alpha} \delta(r_{\alpha} - r_i) + Ze\delta(\vec{r})$$

La densità di corrente è data da:

$$\vec{J}(\vec{r}) = -e \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

La legge di Poisson ci da:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \phi &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\sum_{\alpha} \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|} + \frac{Ze}{r} \right] \\ \sigma(\vec{r}) &= -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \\ \vec{J}(\vec{r}) &= \dot{P}(\vec{r}) + \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Da queste due relazioni si può dimostrare che:

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}) &= -e \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \int_0^1 \delta(\vec{r} - \zeta \vec{r}_{\alpha}) d\zeta \\ \vec{M}(\vec{r}) &= -e \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{r}_{\alpha} \int_0^1 \zeta \delta(\vec{r} - \zeta \vec{r}_{\alpha}) d\zeta \\ V_E &= - \int d\vec{r} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_T(\vec{r}) = e \sum_{\alpha} \int_0^1 \vec{r}_{\alpha} E_T(\zeta \vec{r}_{\alpha}) d\zeta \end{aligned}$$

Questo oggetto può essere sviluppato in serie di Taylor, in cui ogni termine corrisponde allo sviluppo in multipoli del potenziale. Avremo il momento di dipolo dato da

$$e\vec{D} = \sum_{\alpha} e\vec{r}_{\alpha} \quad \vec{D} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

Il quadrupolo elettrico è dato da:

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} e\vec{r}_{\alpha} r_{\alpha} \\ -eD_m &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\frac{e}{m} \right) m\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} \end{aligned}$$

Si può verificare che i termini di ordine superiore sono 2 ordini di grandezza più piccoli del termine di dipolo. Fermiamoci all'approssimazione di dipolo elettrici.

Usiamo la pittura di Schrödinger. Scriviamo l'hamiltoniana completa nella gauge di Coulomb.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{\alpha} [p_{\alpha} + e\hat{A}(r_{\alpha})]^2 + \frac{1}{2} \int d\vec{r} \sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d\vec{r} \left[\epsilon_0 \hat{E}_t(\vec{r})^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{r}) \right]$$

Il primo termine contiene l'energia cinetica e un termine addizionale che rappresenta l'accoppiamento atomo radiazione. Il primo integrale è l'energia elettrostatica, l'ultimo integrale è puramente l'energia di campo.

Possiamo scrivere l'hamiltoniana come l'effetto di una trasformazione:

$$\hat{H} = \hat{U}^{-1} \hat{H}' \hat{U}$$

Dove

$$\hat{U} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} \int_0^1 d\zeta \vec{r}_{\alpha} \hat{A}(\zeta \vec{r}_{\alpha}) \right]$$

Se applichiamo questa trasformazione possiamo riscrivere più comodamente questi tre ermini in maniera più chiara. Il primo pezzo è l'hamiltoniana atomica

$$H_A = \frac{1}{2m} \sum_{\alpha} \hat{p}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \int d\vec{r} \sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r})$$

L'hamiltoniana di campo libero è:

$$H_R = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \left[\varepsilon_0 E_t(\vec{r})^2 + \frac{B^2(\vec{r})}{\mu_0} \right]$$

E poi l'hamiltoniana di dipolo elettrico (interazione) rimane:

$$H_{ED} = e \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \vec{E}_t(0) = e \vec{D} \vec{E}_t(0)$$

Possiamo introdurre degli opportuni operatori che si riferiscono al sistema a due livelli.

$$\hat{H}_A |i\rangle = \hbar \omega_i |i\rangle$$

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = I$$

Dove questa sommatoria va estesa anche agli stati liberi.

$$H_A = \sum_i |i\rangle \langle i| H_A \sum_j |j\rangle \langle j|$$

$$\langle i| H_A |j\rangle = \hbar \omega_i \delta_{ij}$$

$$H_A = \sum_i \hbar \omega_i |i\rangle \langle i|$$

Questa è la seconda quantizzazione nell'interazione tra atomo e campo.

$$|i\rangle \langle j|l\rangle = |i\rangle \delta_{jl}$$

L'operatore

$$|i\rangle \langle j|$$

è un operatore che descrive una transizione tra lo stato j e lo stato i .

Consideriamo l'hamiltoniana di interazione ricordando che

$$\vec{D} = \sum_i |i\rangle \langle i| \hat{D} \sum_j |j\rangle \langle j|$$

$$\vec{D} = \sum_{ij} D_{ij} |i\rangle \langle j| \quad D_{ij} = \langle i| D |j\rangle$$

In questo termine poiché D è dispari i termini $D_{ii} = 0$. Questa matrice non ha elementi lungo la diagonale.

Immaginiamo il sistema atomico con due livelli, che chiamiamo $|1\rangle$ e $|2\rangle$ ed energie $\hbar\omega_1$ e $\hbar\omega_2$

$$\hat{\Pi}^+ = |2\rangle\langle 1|$$

$$\hat{\Pi} = |1\rangle\langle 2|$$

Questi operatori mi esprimono la transizione dell'atomo:

$$\hat{\Pi}^+ |1\rangle = |2\rangle \quad |\Pi\rangle^+ |2\rangle = 0$$

$$\hat{\Pi} |1\rangle = 0 \quad |\Pi\rangle |2\rangle = |1\rangle$$

$$\hat{\Pi}^+ \hat{\Pi} = |2\rangle\langle 2| \quad \hat{\Pi} \hat{\Pi}^+ = |1\rangle\langle 1|$$

Questi operatori mi danno la probabilità di trovare un atomo nei due stati. Per completezza abbiamo anche che:

$$\Pi^+ \Pi + \Pi \Pi^+ = I$$

Inoltre

$$\Pi^+ \Pi^+ = \Pi \Pi = 0$$

Stiamo considerando un sistema a due livelli. Avremo che l'hamiltoniana atomica è data da:

$$H_A = \hbar\omega_0 |2\rangle\langle 2| = \hbar\omega_0 \Pi^+ \Pi$$

L'hamiltoniana di dipolo elettrico può essere riscritta sfruttando questi operatori:

$$\hat{D} = D_{12} (\Pi^+ + \Pi)$$

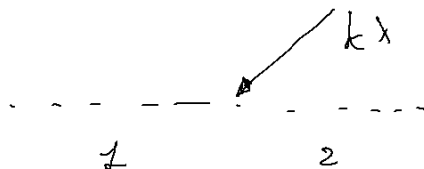
$$H_R = \sum_i \sum_k \sum_\lambda \hbar g_{k\lambda} \left[\hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_{k\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} \right] (\Pi^+ + \Pi)$$

$$g_{k\lambda} = e\sqrt{\omega_k} 2\varepsilon_0 \hbar V \hat{e}_{k\lambda} \hat{D}_{12}$$

Abbiamo il prodotto tra quattro operatori I termini che ci sono:

$$\hat{a}_k \Pi$$

Questo corrisponde come la distruzione di un fotone e il decadimento dell'atomo. Questo oggetto è vietato (ovviamente).



L'altro è

$$\hat{a}_k \Pi^+$$

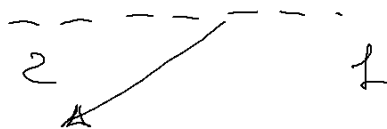
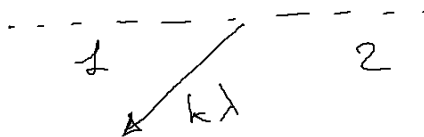
Assorbimento del fotone e promozione dell'atomo. Questo è buono come fenomeno. Allo stesso modo è buona anche:

$$\hat{a}_k^+ \Pi$$

In cui un fotone viene creato e l'atomo transisce al livello più basso di energia. L'ultimo è vietato:

$$a_k^+ \Pi^+$$

In cui viene emesso un fotone e l'atomo si eccita.



Possiamo riscrivere l'hamiltoniana solo con quei due termini

$$H_{ED} = i \sum_k \sum_\lambda \hbar g_{k\lambda} \left[\Pi^+ \hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_{k\lambda}^+ \Pi e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} \right]$$

Nella pittura di Heisemberg avremo dovuto scrivere:

$$H = \hbar\omega_0\Pi^+(t)\Pi(t) + \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda}(t) + \frac{1}{2} \right) + i \sum_{k\lambda} \hbar g_{k\lambda} [\Pi^+(t)a_{k\lambda}(t)e^{ikR} + a_{k\lambda}^+(t)\Pi(t)e^{-ikR}]$$

$$\Pi(t) = \Pi e^{-i\omega_0 t}$$

$$\hat{a}_k(t) = \hat{a}_k e^{-i\omega_k t}$$

Possiamo studiare il problema dell'assorbimento e dell'emissione del fotone. Dobbiamo giustificare completamente l'emissione spontanea.

Ci mettiamo nella rappresentazione di interazione e introduciamo lo stato atomocampo:

$$|n_{k\lambda}, 1\rangle$$

Rappresenta l'atomo nel livello 1, e n fotoni di vettore d'onda k e polarizzazione λ . Descriviamo l'assorbimento:

$$A_{ss} = \langle n_{k\lambda} - 1, 2 | \hat{H}_{ED} | n_{k\lambda}, 1 \rangle = i\hbar g_{k\lambda} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t + ikR} \sqrt{n_{k\lambda}}$$

Il processo di emissione invece è dato da:

$$\langle n_{k\lambda} + 1, 1 | \hat{H}_{ED} | n_{k\lambda}, 2 \rangle = -i\hbar g_{k\lambda} e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t - ikR}$$

Per ricavare il rate di transizione si usa la regola d'oro di Fermi.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_f |\langle f | H_{ED} | i \rangle|^2 \delta(\omega_f - \omega_i)$$

In prima quantizzazione avevamo trovato le seguenti relazioni:

$$B_{12} = \frac{\pi e^2 D_{12}^2}{3\varepsilon_0 \hbar^2}$$

Se $t\Delta\omega \gg 1$ dava luogo ad un integrale

$$\int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} d\omega \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{c}(\omega_0 - \omega)t \right]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

$$|c_2(t)|^2 = \nu^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t}{(\omega - \omega_0)^2}$$

Possiamo andare a scrivere l'energia di eccitazione in seconda quantizzazione del campo come:

$$\hbar\omega_k n_{k\lambda} = V \int d\omega_k \langle W(\omega_k) \rangle$$

Sostituendo questa espressione nella regola d'oro di fermi si ottiene

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi V \int d\omega_k \frac{\overline{g_{k\lambda}^2}}{\hbar\omega_k} \langle W(\omega_k) \rangle \delta(\omega_k - \omega_0)$$

Da cui si riottiene esattamente

$$B_{12} = \frac{\pi e^2 D_{12}^2}{3\varepsilon_0 \hbar^2}$$

Quindi questo modello ridescrive esattamente quanto trovato.

verifichiamo che anche il processo di emissione ritorni quanto visto

4.6.1 Emissione

$$\langle n_{k\lambda} + 1, 1 | H_{ED} | n_{k\lambda}, 2 \rangle$$

Vediamo che vengono due contributi immediatamente, un termine è esattamente l'opposto dell'assorbimento (emissione stimolata) I fotoni che vengono emessi hanno le stesse caratteristiche in polarizzazione e in k . Con l'emissione stimolata i fotoni che vengono emessi in più corrisponde all'emissione sullo stesso modo del fotone di ingresso.

L'altro termine è quello in cui $n_{k\lambda} = 0$. Si passa come numero di fotoni da 0 a 1. Questo oggetto è l'emissione spontanea. La differenza è che quel fotone che viene emesso non ha un k e un λ fissato, e può essere emesso in tutte le direzioni.

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}^2 \delta(\omega_k - \omega_0)$$

Da cui possiamo banalmente scrivere l'emissione spontanea:

$$A_{21} = \frac{e^2 \omega_0 D_{12}^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

Poiché non c'è stimolazione l'emissione avviene su tutti i possibili k e λ . Un atomo emette in modo isotropo su tutto l'angolo solido, se non vi sono particolari condizioni al contorno (per emissione spontanea).

Si può riesprimere questo attraverso la frequenza di Raby.

$$\nu = \frac{eE_0 X_{12}}{\hbar} = \frac{eE_0 (\hat{e} \cdot \vec{D}_{12})}{\hbar}$$

Basta ricordarsi l'espressioni dell'energia:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \int d\omega \langle W(\omega) \rangle$$

$$n_{k\lambda} \hbar \omega_k = V \int \omega - k \langle W(\omega_k) \rangle$$

Da cui possiamo usare il numero di fotoni:

$$\nu^2 = \frac{2e^2 \omega_k n_{k\lambda}}{\epsilon_0 \hbar V} (\hat{e}_{k\lambda} D_{12})^2 = 4g_{k\lambda}^2 n_{k\lambda}$$

La cosa è interessante, è che quando siamo in condizione $n = 0$ si parla ancora di frequenza di Raby determinata dal vuoto:

$$\nu_{vac} = \frac{2e^2 \omega_k}{\epsilon_0 \hbar V} (\hat{e}_{k\lambda} \vec{D}_{12})^2 = 4g_{k\lambda}^2$$

È come se il campo di vuoto stimolasse l'emissione dei fotoni. Questo campo di vuoto genera le oscillazioni delle frequenze di Raby. Questo può essere osservato in situazioni peculiari in cui possiamo selezionare singoli modi.

Si vedono oscillazioni anche in assenza di fotoni. Questo si può fare solo in una cavità. Questo dà luogo all'approssimazione di James Cammes. Le condizioni al contorno possono dar luogo di fenomeni di coerenza del campo di vuoto.

Se noi riduciamo il numero di modi, il tempo di emissione spontanea cambia. Questo da luogo ad una serie di effetti molto interessanti. Quello che studieremo è un esempio in cui considereremo un dipolo in una cavità Fabri-Perot. Con la distanza tra specchi con distanza dell'ordine della lunghezza d'onda. Esperimenti su queste cose sono stati fatti tantissimi. Il processo di assorbimento ed emissione ci permette di studiare dal punto di vista quantistico in modo molto semplice l'effetto fotoelettrico. Questa è la situazione in cui un atomo viene ionizzato in un fascio di fotoni. Andiamo a considerare in approssimazione di dipolo elettrico lo studio della transizione:

$$\langle f|H|i\rangle$$

Corrispondono a quello che abbiamo sia nel sistema atomico che in quello fotonico. Questo lo possiamo scrivere fattorizzando la parte fotonica e la parte radiativa

$$e \langle q|\vec{D}|1\rangle \langle n_{k\lambda} - 1|\hat{E}_t^+(\vec{r}, t)|n_{\vec{k}, \lambda}\rangle$$

Dove l'operatore:

$$\hat{E}^+ \sum_{\vec{k}} \lambda \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \hat{a}_{k\lambda} e^{-i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)}$$

Per trovare il rate di transizione si deve usare la regola d'oro di fermi:

$$\frac{\hbar q^2}{2m} = \omega_k + \omega_1$$

Se quindi vogliamo conoscere la probabilità e ricavare l'efficienza del processo dobbiamo andare a considerare il modulo quadro di questo elemento di matrice.

$$\begin{aligned} \left| \langle n_{k\lambda} - 1|\hat{E}^+(R, t)|n_{k\lambda}\rangle \right|^2 &= \langle n_{k\lambda}|E^+(R, t)|n_{k\lambda} - 1\rangle \langle n_{k\lambda} - 1|E^+(R, t)|n_{k\lambda}\rangle \\ &= \langle n_{k\lambda}|E^-(R, t)|E^+(R, t)|n_{k\lambda}\rangle \end{aligned}$$

Se andiamo a considerare una miscela di stati questo oggetto diventerà:

$$\sum_{nk\lambda} P(n_{k\lambda}) \langle n_{k\lambda}|E^-(R, t)E_t^+(R, t)|n_{k\lambda}\rangle = \text{tr } \rho E_t^- E_t^+$$

L'operatore $E^- E^+$ rappresenta l'osservabile intensità del campo elettromagnetico.

Questo viene misurato con il fotomoltiplicatore. Questo strumento è molto interessante

4.6.2 fotomoltiplicatore

Il fotomoltiplicatore è costituito da un Fotocatodo, costituito per lo più da ossidi, che hanno una efficienza quantica che dipende dalla frequenza (o lunghezza d'onda) con andamenti tipo Figura 4.3.

Questi oggetti lavorano bene nella regione de blu e del visibile (nel vicino infrarosso crolla l'efficienza). La loro efficienza hanno probabilità di estrarre un elettrone all'arrivo del fotone. Queste efficienze sono al più del 25 Abbiamo

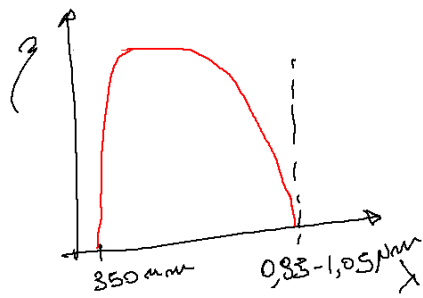
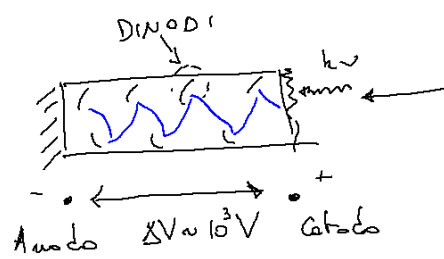


Figura 4.3: Efficienza dei fotomoltiplicatori



un altro crollo nel vicino ultravioletto (circa 350 nm) Questo perché tutti i materiali iniziano ad assorbire. È interessante come viene amplificata la corente: Gli elettroni prodotti all'interfaccia sono focalizzati su dei dinodi, attraverso un campo elettrico. Questo urto con il dinodo libera altri elettroni, ciascuno dei quali può liberare nuovi elettroni nel dinodo successivo. Abbiamo un processo di amplificazione con una legge di potenza. Avremo un tempo di risposta. Quindi se arriva un impulso che non può mai essere più corto del nanosecondo. Quindi il fotomoltiplicatori da una risposta molto più lenta dell'impulso stesso. In questo spread temporale gioca anche il git (l'indeterminazione che contribuisce al tempo di salita (il tempo di salito lo porta a 2-1.5 nanosecondi).

Questo da anche un'idea del perché non abbiamo modo con i rilevatori di seguire un fenomeno ottico risolto temporalmente. Questo è lo schema di principio.

Esistono altri tipi interessanti di rilevatori, come i fotodiodi a giunzione, sfruttando la dimensione della giunzione possono arrivare ad avere dei tempi di risposta che sono dell'ordine del centinaio di picosecondi. In questo modo non c'è amplificazione, che va fatta a valle. La rivelazione di fotoni quantistica ha senso farla solo se sono in coincidenza dobbiamo rivelarli entrambi. Se abbiamo un'efficienza globale limitata per la rivelazione di un singolo fotone, l'efficienza di coppia è η^2 . Se abbiamo un'efficienza di $\eta = 10\%$ allora l'efficienza di coppia è $\eta^2 = 1\%$ molto piccola.

Servono efficienze più elevate. Esistono per fortuna oggetti che arrivano a efficienze quantiche sul massimo di risposta dell'ordine del 70%. In quella regione spettrale da un'efficienza globale del 50%. Anche questo per certe necessità è necessario spingere l'efficienza ancora maggiore. Esistono detector a nanofilo superconduttore che arrivano al 97.98%. Con questo tipo di detector (che devono essere alla temperatura all'elio liquido). Questo è così importante perché alcuni particolari test, di non località quantistica possono potenzialmente diventare conclusivi se possiamo garantire se le misure che sono state fatte siamo al di sopra di una certa soglia. I test di non località quantistica possono fare a meno di variabili nascoste o realismo globale.

4.6.3 Emissione spontanea in microcavità

. Vogliamo studiare cosa succede dal punto di vista del rate di emissione spontanea quando siamo in situazioni peculiari, l'atomo, la molecola o lo ione, è in una situazione in cui è possibile alterare la distribuzione uniforme dei modi del campo elettromagnetico dello spazio libero.

La microcavità è una cavità Fabry-Perot nel modo più idealizzata possibile, due specchi infinitamente estesi, perfettamente lisce, caratterizzate da coefficienti di riflettività. Prendiamo l'asse x e l'asse z , consideriamo un dipolo μ che sta in un punto con coordinata z nella cavità (cavità piana, confinamento monodimensionale).

Consideriamo un set di onde piane caratterizzate da questo set di modi k_+ e k_- , $U_{kj}(r)$ e $U'_{kj}(r)$ sono il modo per rappresentare le onde del campo di vuoto che vengono da $-\infty$ a $d/2$ e da $d/2$ a ∞ . Un andamento teorico della probabilità di emissione dell'intensità che viene misurata in funzione e dell'angolo Θ degli specchi:

Se gli specchi fossero metallici andando a studiare il comportamento del metallo in funzione dell'angolo troveremmo una risposta piatta, indipendente

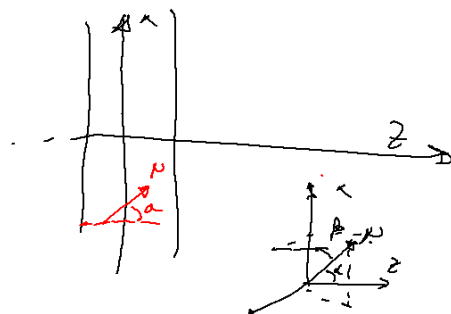
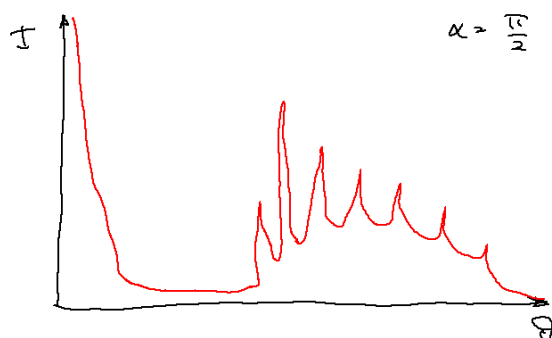
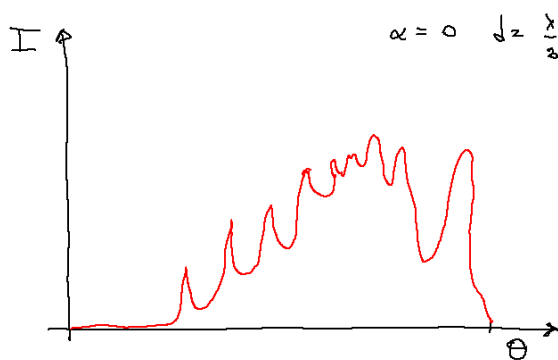


Figura 4.4: Schema della microcavità



dall'angolo di incidenza dalla polarizzazione. Gli specchi metallici purtroppo assorbono. La Finesse della cavità è molto misera. Nella situazione reale non si può fare una situazione metallica. Gli specchi a multilayer dielettrici sono quei famosi specchi fatti da molti strati, quindi non riflettono allo stesso modo, ma producono frange di interferenze che sono visibili in questo. Queste frange rappresentano un baco sperimentale, la microcavità confinerà la radiazione per angoli molto piccoli, oltre è quasi come se l'atomo vedesse lo spazio libero.

L'angolo β ci dà la polarizzazione con cui viene emessa la radiazione, l'angolo α invece l'intensità in zero. Cambiando β cambia la forma delle frange poiché queste frange di interferenze risentono all'interazione. In tutte le configurazioni di β c'è emissione in zero, se α lo permette.

Una struttura degli specchi multilayer da un andamento della fase che è un delirio assoluto.

$$k_+ = t_{ij} e^{ik_+r} / D_j$$

Questo contiene la funzione di Airy, scritta per i campi infatti:

$$D = 1 - r_1 r_2 e^{2ikd \cos \theta}$$

$$R = r e^{-ikd \cos \theta} + r_2 (t^2 - r^2) e^{ikd \cos \theta}$$

Questo è un formalismo che è sviluppato dall'armonica. I nuovi coefficienti di riflettività che vengono fuori sono tali da garantire la conservazione dell'energia, e la seconda è la stessa ricavata dal beamsplitter. Dal punto di vista formale la trattazione è analoga. Nel momento in cui andiamo a mettervi un atomo all'interno abbiamo un bs attivo. Quantizziamo il campo. Assumiamo che l'emissione spontanea nasce da come le condizioni al contorno alterano lo spazio delle fasi disponibile al sistema. Questo ci permette di ricavare il rate di emissione spontanea che chiamiamo Γ , nasce da un'integrazione su tutti gli stati finali, compare nell'espressione la funzione D di Airy. Appaiono Γ_{par} e Γ_{perp} che corrisponde al dipolo parallelo al piano degli specchi e quella ortogonale. A questo punto possiamo andare a vedere se ritroviamo questi risultati. Che succede al free-space? che succede se la cavità non c'è? si pone $r_i = r_j = 0$, e dovremo ritrovare esattamente il caso banale, e viene Γ pari all'inverso di tempo di emissione. Andiamo a vedere delle configurazioni di confinamento. Anziché mettere una cavità mettiamo solo uno specchio. Questo altera in maniera sensibile le condizioni al contorno. Questo specchio divide il mondo in due parti, il rate di emissione cambia a seconda di dove si trova l'atomo:

Il rate di emissione è interessante

L'alterazione è presente solo quando l'atomo è molto vicino allo specchio, se l'atomo si trova lontano dallo specchio ritroviamo il caso classico di atomo libero. In una cavità simmetrica (due specchi uguali, $r_1 = r_2$)

Andiamo a considerare una cavità ad alto Q (specchi che non esistono) un coefficiente di riflettività che va a 1 senza alcuna dipendenza dall'angolo.

Quello che misuriamo è l'intensità di emissione, andiamo a ricavare il valore dell'osservabile:

$$\langle E^- E^+ \rangle$$

Quello che viene fuori è che l'andamento dell'intensità finisce per poter avere un andamento di decadimento che è un esponenziale corretto. Cosa avviene se variamo la distanza tra gli specchi. Quando si osservano le frange di interferenza



Figura 4.5: Posizione dell'atomo nello specchio.

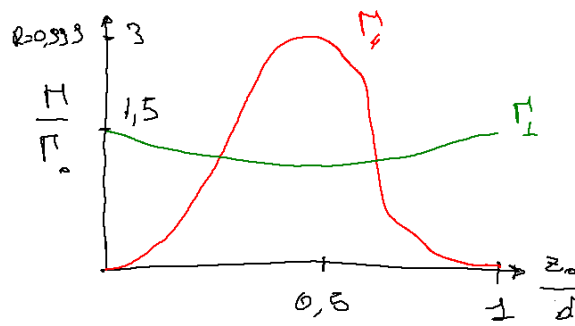
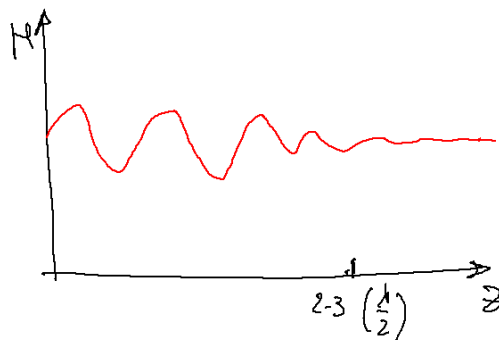


Figura 4.6: High Q cavity. Il rate di decadimento in questo caso è circa 3 volte quello dello spazio libero nel picco centrale, il Γ_{\perp} non sente minimamente la cavità.

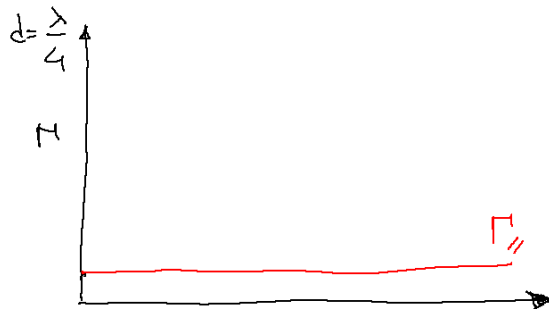
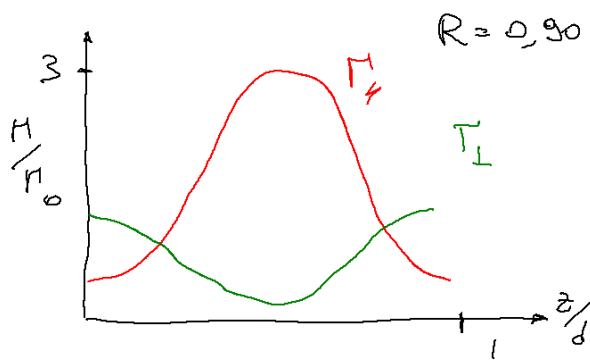


Figura 4.7: Cavità con $d < \lambda/2$



si possono osservare anche il passaggio di anelli. Questo è un modo che è possibile controllare. Immaginiamo che ogni volta abbiamo il nostro sistema atomico che si trova al centro della cavità. Modificando gli specchi:

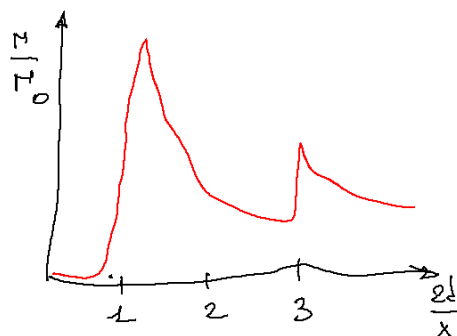


Figura 4.8: Schema dell'rate al variare della distanza tra gli specchi.

Questo effetto di confinamento si vede per valori piccoli di d multiplo di $\lambda/2$. Più aumentiamo la distanza degli specchi aumentano le possibilità di uscita. Questi canali di emissione sono dei canali di perdita. Si può controllare cosa succede per una cavità dal punto di vista dell'intensità si vede un decadimento nel tempo che non è più l'esponenziale, ma si discosta. Immaginiamo di andare a studiare una situazione più complessa. Immaginiamo che gli atomi nella microcavità siano due. Immaginiamo di poter eccitare due punti ad una distanza trasversale dell'ordine R . La cavità è quella di prima. Usiamo un interferometro di Hubery-Brown-Bis (?). Giochiamo sulla distanza trasversale R . Questo può essere studiato come se la stessa microcavità mettendo un detector alla sinistra e uno alla destra. Studiamo una G_2 in funzione del tempo. Perché è interessante capire questa cosa? Se abbiamo due atomi che emettono nell'unico modo permesso nella cavità, cosa rappresenta il modo di questa cavità? Qualunque sia la distanza r l'onda piana corrispondente dovrebbe essere la stessa, abbiamo anche il fatto che abbiamo a che fare con specchi reali. R non può essere grande quanto pare, quanti passaggi impiega la radiazione ad istaurarsi all'interno del Fabri-Perot. Questa emissione la possiamo vedere come un modo che si allarga che impiega del tempo. Questo allargamento avviene in multipli passaggi. Quando si può parlare di modo del Fabri-perot? C'è il campo di vuoto da prima, o c'è bisogno di un certo numero di passaggi? Dal punto di vista fisico ha senso parlare da un istante iniziale, in quanto tempo si istaura questo modo? Andiamo a vedere la cosa in funzione del tempo. Si è visto che è interessante, c'è una distanza critica. Dati due atomi che venono eccitati in due punti, qual è la distanza tra di loro al disotto della quali le emissioni dell'uno risentono le emissioni dell'altro? Questo è λ nello spazio vuoto. In una cavità questo diventa molto più grande anche maggiore del millimetro, e cresce al crescere del fattore Q (o la riflettività). Questo si può vedere per principio di indeterminazione. L'emissione dell'atomo A influenza l'emissione dell'atomo B Nasce un processo di emissione di super-radianza. Un'emissione che non è più spontanea, questa è un effetto collettivo. Con questo tipo di esperimento è possibile vedere chi apre r . Se gli atomi sono due possiamo avere nello stesso modo della cavità. Non c'è più un confine nell'emissione spontanea e stimolata.

Nei microlaser alterando le condizioni al contorno non distinguiamo più l'emissione spontanea e stimolata, poiché entrambe avvengono nell'unico modo consentito. Questo permette di creare dispositivi microscopici, in cui l'azione coerente di fotoni vengono fatte di confinamento a 2 o tre dimensioni.