

Riassunti di Astrofisica

Lorenzo Monacelli

11 febbraio 2014

Indice

1	Prima sezione - Fisica e Astrofisica	2
1.1	Spazio, tempo e dimensioni	2
1.2	Particelle e forze	3
2	Seconda sezione - Stelle	4
2.1	Trasporto radiativo	5
3	Terza Sezione - Materia interstellare	8
3.1	Radiazione di Bremsstrahlung	8
3.2	Radiazione di Free-free	9
3.3	Radiazione a 21 cm	9
3.4	Formazione di stelle	9
3.5	Radiazione Molecolare	10
4	Quarta sezione - Cosmologia	11
4.1	Velocità delle galassie	11
4.2	Misure di distanza delle galassie	12
4.3	Principio cosmologico	13
4.4	Equazione di Friedmann - Dinamica dell'universo	13
4.4.1	Età dell'universo	16
4.5	Teoria del Big Bang	17
4.5.1	Inflazione	17
4.5.2	Nucleosintesi primordiale	18
4.5.3	Formazione delle strutture	18

Capitolo 1

Prima sezione - Fisica e Astrofisica

1.1 Spazio, tempo e dimensioni

Nello spazio possiamo individuare la distanza tra due punti con il teorema di pitagora:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Questa funzione della distanza è detta metrica piatta, o teorema di Pitagora. Questa metrica, usata per misurare le distanze, funziona quando si è sufficientemente lontani da grandi masse, la presenza di masse modifica questa metrica.

Per misurare la distanza abbiamo differenti unità di misura. Il *metro*, poco pratico in astrofisica, *l'anno luce*, che è la distanza percorsa dalla luce in un anno:

$$1 \text{ yl} = \underbrace{3600 \text{ s} \cdot 24 \cdot 365}_{\text{Secondi in un anno}} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Un'altra unità usata in astrofisica è il *parsec* (parallasse secondo), definito come la distanza di una stella quando la parallasse annua è pari ad un secondo d'arco ($\frac{1}{3600}$ gradi):

$$1 \text{ pc} = 3.65 \text{ yl}$$

Il tempo in fisica è definito come ciò che è misurato dagli orologi. Gli orologi sono dei mezzi che hanno una certa periodicità nel loro funzionamento.

Non esiste un tempo assoluto, ma il tempo dipende dall'osservatore. Con le trasformazioni di Lorentz possiamo misurare lo sfasamento dei tempi:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - wt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{w}{c} \quad (1.1)$$

Nelle trasformazioni di Lorentz le equazioni di Maxwell sono *covarianti*¹, la velocità della luce c è un invariante, le lunghezze in moto si contraggono, non esiste un tempo assoluto (gli orologi in moto rallentano).

La contrazione delle lunghezze può essere fatta vedere come segue: supponiamo di avere la sbarra in quiete nel

¹Non cambiano se sottoposti ad un cambiamento di sistema di riferimento inerziale.

²Lo scintillatore è un dispositivo che emette fotoni quando un muone si crea al suo interno per interazione con un raggio cosmico e un altro quando il muone decade nuovamente, collegato con un rivelatore.

sistema di riferimento S' , le due estremità sono alle posizioni $x'_1 = 0$ e $x'_2 = L$. Il sistema di riferimento S in moto rispetto a S' vede le sbarre in posizione (al tempo $t = 0$):

$$x'_1 = \gamma x_1 \quad x'_2 = \gamma x_2$$

$$L' = x_1 - x_2 = \frac{x'_1 - x'_2}{\gamma} = \frac{L}{\gamma}$$

Questo effetto può essere visto anche per il tempo. Verifiche sperimentali di ciò riguardano la vita media di un muone, che nasce nella parte alta dell'atmosfera fino ad arrivare fino a terra ($h = 9000 \text{ m}$). La vita media del muone da fermo è misurata attraverso uno scintillatore². Facendo una statistica degli eventi, e isolandoli da un background uniforme, è possibile stimare la vita media dei muoni intorno ai $\tau = 2.2 \mu\text{s}$, con statistica esponenziale.

Il numero di Muoni che dovremmo osservare a terra è pari a:

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = N_0 e^{-\frac{h}{c\tau}}$$
$$\frac{N}{N_0} \approx 1.2 \cdot 10^{-6}$$

Poiché però i muoni viaggiano a velocità relativistica dobbiamo tener conto della dilatazione della loro vita media (viaggiano con velocità $v = 0.8c$):

$$\tau' = \gamma\tau = 11 \mu\text{s}$$

Con questo nuovo valore per τ' la stima

$$\frac{N}{N_0} \approx 0.065$$

Consistente con i risultati sperimentali.

Lo stesso fenomeno può essere visto dal sistema di riferimento solidale al muone tenendo conto della contrazione delle distanze che si percorrono.

Le leggi di Lorentz valgono nella metrica Minkoskyana, che serve per misurare le distanze nello spazio tempo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - d(ct)^2$$

Che può essere assunta nel tensore di Minkosky:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j$$

$$\vec{U} = (\gamma\vec{v}, \gamma ic)$$

La presenza di forti masse modifica la forma del tensore metrico (η).

Dalle trasformazioni di Lorentz è possibile ricavare anche come si trasformano le velocità, e che la massa totale di una particella non è un invariante relativistico. Infatti possiamo provare a far scontrare due particelle di massa m in un sistema di riferimento in cui vanno alla stessa velocità l'una contro l'altra. Se ci mettiamo in un sistema di riferimento in cui hanno velocità diverse invece e supponiamo che hanno massa m_1 e m_2 , imponiamo la conservazione dell'impulso:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) w$$

Usando le formule di combinazione delle velocità si ottiene che:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{\beta}{c} v'}{1 - \frac{\beta}{c} v'}$$

E che la massa al variare della velocità si trasforma come

$$m = \gamma m_0$$

Con questa nuova definizione può essere riscritta la legge di Newton in forma covariante per TdL³

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F}$$

Analogamente definendo il lavoro come

$$dL = F dx = F v dt = \frac{d}{dt} (mv) \cdot v dt$$

Si arriva alla conclusione che:

$$dL = d(mc^2)$$

Da cui la formula dell'energia di Einstein:

$$E = mc^2$$

Analogamente scrivendo le equazioni per energia e impulso:

$$E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \quad p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2$$

$$E^2 - c^2 p^2 = (m_0 c^2)^2$$

Si può ricavare l'impulso dei fotoni (che hanno massa nulla), come già ricavato nell'elettromagnetismo:

$$E^2 - c^2 p^2 = 0$$

$$p = \frac{E}{c}$$

Questa formulazione è obsoleta, ora non si parla più di massa che cambia, ma il fattore γ viene inserito all'interno della velocità, per cui m_0 è un invariante relativistico. Si definiscono le leggi della dinamica usando il formalismo dei quadrivettori. La quadrivelocità ad esempio:

$$\vec{U} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau} \right)$$

Questo vettore è un oggetto che si trasforma seguendo le relazioni di Lorentz, (che data la loro linearità possono essere scritte in forma matriciale). Analogamente è definita la quadriaccelerazione:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{U}}{d\tau}$$

Il quadrimpulso:

$$\vec{P} = m_0 \vec{U}$$

E la quadriforza:

$$\vec{F} = m_0 \vec{A}$$

La quarta componente del quadrimpulso rappresenta l'energia, quindi imponendo la conservazione del quadrimpulso abbiamo ottenuto la conservazione dell'energia.

$$E = \gamma m_0 c^2$$

In questo formalismo la massa m_0 è un invariante relativistico

1.2 Particelle e forze

La materia è formata da particelle fondamentali. Il modello standard le divide in due tipologie: *quark* e *leptoni*, ce ne sono 6 di ogni tipo. I *quark* si combinano tra loro per formare particelle più complesse, i *leptoni* no. I *quark* sono di tipo **up**, **down**, **strange**, **charm**, **top**, **bottom** (in ordine di massa crescente), i *leptoni* sono elettroni, neutrini e muoni.

Ogniuna di queste particelle ha un'antiparticella. C'è un esperimento, AMS, che studia l'antimateria nell'universo. Le particelle composte si chiamano **Adroni**, e si dividono in *barioni* (3 quark, protone = uud, neutrone = udd, altre) e *mesoni* (1 quark e 1 antiquark, pioni, kaoni).

La massa di queste particelle si misura in elettronvolt.

Le particelle hanno anche uno *spin*, che si misura in unità di \hbar . I quark e i leptoni hanno spin $\frac{1}{2}$, i bosoni vettori hanno spin 1 o 2. Particelle e antiparticelle hanno spin uguale, ad eccezione del neutrino (spin opposto).

Il numero barionico vale $\frac{1}{3}$ per ogni quark e $-\frac{1}{3}$ per antiquark, quello leptonico vale 1 per leptone e -1 per antileptone.

I bosoni vettori sono le particelle che gestiscono le interazioni fondamentali, che sono quattro: **gravitazionale**, **Debole**, **elettromagnetica**, **Forte** (in ordine di intensità crescente). I corrispettivi bosoni sono **Gravitone**, **Fotone**, **W[±]** e **Z⁰**, **Gluone** (tutti di spin 1 tranne il Gravitone 2, ancora mai osservato) Il bosone di Higgs spiega un'interazione aggiuntiva che serve per poter giustificare la massa delle particelle fondamentali.

³Trasformazioni di Lorentz.

Capitolo 2

Seconda sezione - Stelle

Le stelle sono enormi sfere di gas incandescente, al cui interno le temperature di milioni di gradi permettono l'accensione di reazioni termonucleari, la cui energia sprigionata consente di bilanciare l'autogravità. La vita di una stella dipende dalla sua massa: si forma da una nebulosa, segue la *sequenza principale*, diventa una gigante rossa, poi esplose in una nebulosa planetaria (o in una supernova)¹, diventa una nana bianca e in seguito una nana bruna (oppure un oggetto collassato).

L'energia che consente la vita della stella è data dalle reazioni nucleari all'interno del suo nucleo. La differenza di massa data dai prodotti della reazione si trasforma in energia $Q = \Delta mc^2$. Questo processo è possibile solo per nuclei fino al ferro, dove l'energia di legame è crescente². Per fondere i nuclei più leggeri è necessario vincere la forza repulsiva dei protoni, la probabilità che avvenga la reazione è molto bassa e dominata dall'effetto di **tunnel** quantistico.

Il tasso di reazione³ può essere definito come⁴:

$$r = \frac{N_x N_y \langle v \sigma(v) \rangle}{1 + \delta_{xy}}$$

Possiamo cercare il valore della sezione d'urto $\sigma(E)$ supponendo che la distribuzione delle velocità segua la distribuzione di Maxwell. Perché due particelle si fondano devono superare la barriera di potenziale data dalla somma di potenziale Coulombiano (repulsivo) e interazione Forte. Quantisticamente, anche se la particella non ha energia sufficiente per superare la barriera di potenziale, una coda della sua funzione d'onda supera la barriera, rendendo la probabilità di penetrazione molto maggiore di quella classica. C'è un picco di probabilità all'energia E_0 detto picco di Gamow⁵ dove⁶ $E_0 \geq kT$ e $E_0 \leq E_c$. Il coefficiente $\langle \sigma v \rangle$ decresce all'aumentare del numero atomico della specie (è per questo che si fondono solo i nuclei più piccoli⁷). Il tempo di durata della sequenza principale è inversamente proporzionale alla luminosità della stella.

¹Dipende dalla massa.

²Oltre il ferro non si libera più energia per fenomeni di fusione, ma è necessaria fornirla, l'energia può essere liberata per fissione invece.

³Numero di reazioni per unità di tempo.

⁴ N_x e N_y sono il numero di particelle di tipo x e y , σ è la sezione d'urto, e se le particelle sono identiche bisogna dividere tutto per due onde non contare due volte lo stesso fenomeno.

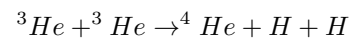
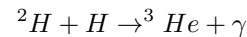
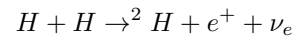
⁵È il massimo della funzione $\langle v \sigma(E) \rangle$ al variare di E .

⁶ E_c è l'energia corrispondente alla barriera di fusione.

⁷Servono energie (e quindi temperature) minori.

⁸I fotoni che ci arrivano sono quelli che hanno interagito per ultimi sulla superficie, quindi i fotoni non possono darci info sul nucleo.

Il ciclo protone protone prevede le reazioni:



Nelle stelle massive avvengono processi più complessi per bruciare elementi più pesanti.

In queste reazioni nucleari vengono prodotti neutrini elettronici, questi neutrini escono dal nucleo, non interagiscono con il resto della stella e ci raggiungono a terra. Siamo quindi in grado di rivelarne una parte qui a terra (si fruttava una reazione che fa il neutrino elettronico con il cloro generando l'Argon. Dagli esperimenti risultano arrivare meno neutrini del previsto, questo è giustificato dalle *oscillazioni* dei neutrini, possibili solo se i neutrini hanno una massa non nulla (non prevista dal modello standard).

Le nostre migliori conoscenze sulle stelle vengono dagli spettri stellari, che ci portano informazioni sulla superficie della stella⁸

Lo spettro ha due componenti, una continua, e delle righe. Il modello di Bhor riuscì per primo a spiegare quantitativamente le righe osservate per l'atomo di Idrogeno, spiegando la serie di Balmer. Dalla meccanica quantistica si può ricavare che le energie consentite per un atomo di Idrogeno sono:

$$E_I = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{2\pi\hbar R_H}{n^2}$$

E dalla formula di De Broglie si può ricavare la lunghezza d'onda delle righe:

$$\nu = \frac{\Delta E}{2\pi\hbar} = R_H \left(\frac{1}{n_b^2} - \frac{1}{n_a^2} \right)$$

Le stelle furono quindi classificate grazie al Cecilia Payne, che mostrò che tutte le stelle avevano all'incirca la stessa composizione, tramite l'equazione di Saha.

Le righe di Balmer sono nel visibile e molto marcate nelle stelle con temperatura superficiale⁹ di 9500 K.

Gli atomi della superficie si eccitano per via delle collisioni e possono occupare diversi stati. Le probabilità di occupazione degli stati A e B sono¹⁰:

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{P(s_b)}{P(s_a)} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT} \quad (2.1)$$

A questo va aggiunto il fatto che quasi tutti gli atomi a quella temperatura sono ionizzati. La frazione di atomi ionizzati è pari a¹¹ (Equazione di Saha):

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT} \quad (2.2)$$

Dall'equazione di Saha si ricava che per temperature superiori ai 10000 K praticamente tutti gli atomi sono ionizzati. Poiché la maggior parte di atomi a temperature di 9500 K sono già ionizzati il numero di elettroni che si trovano nel primo stato eccitato ha un picco proprio a 9500 K (sopra il numero di atomi ionizzati diventa troppo alto, e sotto sono più gli atomi nello stato fondamentale).

Dallo spettro si può risalire anche alla densità della fotosfera, infatti in fotosfere dense ci sono molti più atomi che producono righe a differenti velocità rispetto a noi, per effetto Doppler le righe sono quindi più larghe (mentre per fotosfere poco dense le righe sono più strette).

Nel sole in cui la fotosfera è a temperatura molto più bassa (5700 K) dominano le righe del Calcio (rispetto alle righe di Balmer). La spettroscopia richiede tempi molto lunghi di esposizione, poiché è necessario raccogliere moltissimi fotoni per ogni lunghezza d'onda, isolando poi le eventuali fluttuazioni statistiche.

È interessante studiare l'effetto delle larghezze di riga. Anche il principio di indeterminazione di Heisenberg influenza questo processo¹². Infatti l'incertezza sul salto energetico è correlata ad un'incertezza sul tempo in cui l'atomo rimane nello stato eccitato che fa sì che la riga abbia una larghezza naturale. Più significativo è l'effetto Doppler. Gli atomi hanno una velocità che può essere descritta in termini dell'equazione di Maxwell

$$P(v_z) = \exp\left(-\frac{m_a v_z^2}{2kT}\right) dv_z$$

Se ora consideriamo l'effetto doppler:

$$v_z = c \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}$$

Otteniamo un profilo di riga gaussiano. Nel sole questo è ancora troppo piccolo per spiegare la reale ampiezza di riga osservata. Per spiegarlo bisogna ricorrere all'allargamento *collisionale*, in cui gli orbitali atomici vengono

perturbati dal passaggio nelle vicinanze di uno ione carico¹³. Questa statistica predice un profilo di tipo lorentziano. Questo profilo domina sempre lontano dal centro della riga perché non decade esponenzialmente come quello doppler, e nella fotosfera solare è l'effetto dominante. Se mediamo su velocità differenti¹⁴ questo profilo otteniamo il profilo di **Voigt**. Attraverso questo studio è stato possibile determinare le densità di elementi che compongono le fotosfere delle stelle.

2.1 Trasporto radiativo

La luce che ci arriva dall'universo è prodotta da molti differenti processi fisici. Da stelle che emettono, nebulose che emettono, nebulose che riflettono e nebulose che assorbono. Gli effetti che subisce la luce prima di arrivare ai nostri rilevatori sono: *emissione, diffusione, assorbimento*.

Definiamo il coefficiente di emissione j_ν come l'intensità emessa da una sorgente in un tratto ds :

$$dI_\nu = j_\nu ds$$

Il coefficiente di assorbimento α_ν è la percentuale di radiazione assorbita nel tratto ds :

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds$$

Questa dipende dalla sezione d'urto tra fotoni e particelle che compongono il mezzo, e dalla densità¹⁵. Da cui unendo le espressioni si ricava l'equazione del trasporto radiativo:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu$$

Si introduce per semplicità lo spessore ottico τ_ν come:

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds \quad \tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu ds$$

Da cui l'equazione dell'assorbimento senza emissione diventa:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu}$$

Quella completa diventa¹⁶:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

Che ha per soluzione:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau')} S_\nu(\tau') d\tau'$$

Che per funzioni con sorgente costante:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + S_\nu [1 - e^{-\tau_\nu}] \quad (2.3)$$

⁹Sappiamo la temperatura delle stelle perché nel continuo hanno un'emissione che segue la legge di corpo nero, quindi il continuo permette di stimare la temperatura superficiale.

¹⁰Con il termine g_i si indica la degenerazione energetica corrispondente a quello stato.

¹¹ Z è la funzione di partizione, χ è la energia di ionizzazione, n_e è il numero di elettroni.

¹²In maniera però totalmente influente.

¹³Il tempo medio tra due collisioni dipende da densità, sezione d'urto e velocità media delle particelle.

¹⁴Distribuite secondo Maxwell.

¹⁵Si immagini che l'intensità che passa per unità di superficie è pari a $I(dA - N\sigma) = I(dA - n\sigma ds dA)$ da cui $I dA(1 - n\sigma ds)$. Si ricava che il coefficiente α è proprio la percentuale persa di radiazione ($\alpha = n\sigma$).

¹⁶ S_ν è pari a $\frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ ed è la funzione sorgente.

Si può dimostrare che S_ν è proprio la radiazione di corpo nero¹⁷.

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (2.4)$$

Si può risolvere l'equazione del trasporto radiativo nel caso dell'atmosfera isoterma (2.3):

$$I_\nu(\tau_\nu) = \underbrace{I_\nu(0)e^{-\tau_\nu}}_{\text{Brillanza attenuata}} + \underbrace{B(\nu, T)(1 - e^{-\tau_\nu})}_{\text{Brillanza emessa}}$$

Per angoli non zenitali:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\frac{\tau_{\nu,z}}{\cos\theta}} + B(\nu, T) \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\nu,z}}{\cos\theta}}\right)$$

Da questa equazione si possono sia capire le finestre a cui l'atmosfera è trasparente (in confrontando con la radiazione di corpo nero), che estrapolare la brillantezza degli oggetti osservati fuori dall'atmosfera estrapolando per $\frac{1}{\cos\theta}$ che va a 0. Questa estrapolazione ottenuta al variare di θ viene fatta grazie ai dati sperimentali ottenuti con un **tripper**.

L'equazione del trasporto radiativo può essere usata anche per spiegare le righe di emissione e di assorbimento. Immaginiamo di schematizzare una stella come un *core* più caldo e un guscio freddo. Il guscio ha uno spessore ottico molto alto solo per certe frequenze ν , per le alte e trascurabile. Per frequenze in cui lo spessore ottico è trascurabile vedo solo l'emissione del *core*, che è un continuo di corpo nero. Per le altre invece vedo l'emissione del guscio (quella del core è assorbita completamente). L'emissione del Guscio però è molto meno intensa del core a causa della temperatura minore e si crea una riga di assorbimento. Se le temperature fossero invertite si genererebbe una riga di emissione. Esistono stelle che producono righe di emissione, questo meccanismo è dovuto alla presenza di Laser o Maser naturali.

Per studiare questo effetto dobbiamo trattare il trasporto radiativo da un punto di vista microscopico. Supponiamo che il nostro atomo abbia accessibile solo uno stato eccitato. Vi sono tre possibili processi: **emissione spontanea** (il sistema passa dallo stato eccitato a quello fondamentale emettendo un fotone¹⁸) **assorbimento** (il sistema passa da stato fondamentale a quello eccitato assorbendo un fotone¹⁹) e **emissione stimolata** (La presenza di fotoni dell'energia giusta stimola gli atomi a diseccitarsi²⁰). L'emissione stimolata è un processo che deve essere introdotto per ricavare l'equazione di Plank del corpo nero. In condizione di equilibrio le emissioni di fotoni devono eguagliare gli assorbimenti:

$$n_1 B_{12} J_\nu = n_2 B_{21} J_\nu + n_2 A_{21}$$

$$J_\nu = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{n_1}{n_2} \frac{B_{12}}{B_{21}} - 1}$$

Il rapporto tra atomi nello stato eccitato e quelli in quello fondamentale è dato dalla statistica di Boltzmann (2.1).

¹⁷Inseriamo un materiale di funzione sorgente S_ν dentro un corpo nero, la radiazione entrante nel materiale è la radiazione di corpo nero, quella che esce è ancora quella di corpo nero (poiché la nuova configurazione è un altro corpo nero).

¹⁸Indichiamo la probabilità dell'emissione spontanea con il coefficiente A_{21}

¹⁹La probabilità dell'assorbimento dipende dal numero di fotoni, e quindi dall'intensità del raggio, la indichiamo come $j_\nu B_{12}$.

²⁰Anche questo processo è proporzionale all'intensità del raggio: $j_\nu B_{21}$

²¹Se fossero emissioni termiche seguirebbero la legge di emissione del corpo nero, e vedremmo queste sorgenti emettere anche in altre frequenze, mentre le emissioni di laser e maser sono piccate a determinate frequenze molto strette.

Per confronto con l'equazione di corpo nero (2.4) si ottengono i valori dei coefficienti di Einstein. Piazzando questi termini nell'equazione del trasporto radiativo si ottiene:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\frac{h\nu}{4\pi} (B_{12}n_1 - B_{21}n_2) I_\nu + \frac{h\nu}{4\pi} A_{21}n_2$$

In caso di equilibrio vale la relazione di Boltzmann (2.1), da cui segue:

$$\frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2}$$

Ma in alcuni casi particolari, lontani dall'equilibrio si può invertire questa disuguaglianza (**inversione delle popolazioni**). Dalle espressioni dei coefficienti di Einstein si vede che in questo caso α_ν diventa negativo:

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds > 0$$

Ossia che l'intensità della radiazione aumenta esponenzialmente! Questi casi generano i **laser**, o **maser**. Sono note diverse sorgenti astrofisiche di laser e maser, non spiegabili con emissioni termiche²¹.

Lo scattering è quel fenomeno che spiega la diffusione della luce. Il raggio luminoso che arriva da una direzione viene diffuso in tutto lo spazio circostante:

$$j_\nu = \sigma_\nu \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega$$

Con questo coefficiente l'equazione del trasporto radiativo diventa un'equazione integrodifferenziale difficile da risolvere. Si può affrontare il problema dello scattering schematizzando il fenomeno come un random walk. Il fotone viene diffuso in direzioni casuali, dopo N rimbalsi, si è allontanato di una lunghezza pari a:

$$L = \sqrt{N}l$$

Con l cammino libero medio. Per una combinazione di Scattering e Assorbimento lo spessore ottico può essere definito da:

$$d\tau = (\alpha + \sigma) ds$$

E il cammino libero medio (inverso dello spessore ottico):

$$l = \frac{1}{\alpha + \sigma}$$

Da cui la probabilità che il fotone sia assorbito durante un cammino è pari a ε :

$$\varepsilon = \alpha l = \frac{\alpha}{\alpha + \sigma}$$

Da cui la probabilità che ci siano N scattering prima dell'assorbimento è pari a:

$$P(N) = (1 - \varepsilon)^N$$

Il numero medio di Scattering è dato da:

$$\langle N \rangle = \sum NP(N) = \frac{1}{\varepsilon}$$

Si ottiene la lunghezza media di diffusione pari a:

$$L = \sqrt{N}l = \sqrt{\frac{\alpha + \sigma}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha + \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \sigma)}}$$

Così mentre i neutrini sfuggono subito dal centro delle stelle, i fotoni impiegano migliaia di anni prima di arrivare alla fotosfera (hanno un l pari a cm).

È importante studiare anche cosa avviene nelle regioni di HII (idrogeno ionizzato), poiché sono sorgenti rosse molto frequenti in astrofisica. La regione HII è una nuvola di Idrogeno ionizzato dai fotoni ultravioletti prodotti da stelle di tipo O o B . Elettroni e protoni liberi hanno una certa probabilità di ricombinarsi, e in genere si ricombinano negli stati eccitati ($n = 3$), la diseccitazione a $n = 2$ provoca l'emissione di un fotone alla lunghezza d'onda del rosso. Il flusso di fotoni della stella ionizza la prima parte di gas della stella equivalente ad un cammino libero medio, i fotoni successivi passano senza interferire e ionizzano uno strato successivo, fin quando la probabilità di ricombinarsi è uguale a quella ionizzata²²:

$$\dot{N} = \underbrace{n_H 4\pi R^2 \frac{dR}{dt}}_{\text{Nuovi atomi da ionizzare}} + \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \alpha n_e n_p}_{\text{Atomi che si ricombinano}}$$

L'equilibrio c'è quando $\frac{dR}{dt} = 0$:

$$\dot{N} = \frac{4}{3}\pi R^3 \alpha n_e n_p$$

Da cui si ricava il raggio di Stromgren della regione HII:

$$R_s = \left(\frac{3\dot{N}}{4\pi\alpha n_e n_p} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 6 \text{ pc}$$

In realtà in genere la dimensione di queste regioni è più ampia poiché la ricombinazione tra elettroni e protoni genera nuovi fotoni ionizzanti e perché la pressione della regione HII è maggiore di quella HI, da cui ne segue una conseguente espansione.

In queste regioni i fotoni interagiscono direttamente con gli elettroni liberi dando luogo ai fenomeni di scattering Thomson (non relativistico) e Compton (quantistico). La transizione avviene quando abbiamo a che fare con raggi γ . Lo scattering Thomson consiste in un'onda elettromagnetica che investe un elettrone, che viene dunque

accelerato, e oscilla in sincrono con l'onda²³. L'elettrone emette come un dipolo oscillante con un picco sul piano ortogonale all'oscillazione e un minimo sull'asse dell'oscillazione. Si può definire una sezione d'urto Thomson che ci dice quanto vicino deve passare l'onda elettromagnetica all'elettrone per causare questa eccitazione (σ_T). Questa è indipendente dal tipo di fotone che arriva.

Per fotoni di più alta energia invece è necessario ricorrere allo scattering Compton, dove l'urto non è elastico e il fotone perde energia, cedendola all'elettrone, così può cambiare la lunghezza d'onda del fotone:

$$\lambda_{dif} - \lambda_{inc} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

Anche per lo scattering Compton può essere definita una sezione d'urto, che diminuisce all'aumentare dell'energia. Un interessante caso è dato dallo scattering Compton inverso, se l'elettrone ha forte energia è possibile che sia lui a cedere energia al fotone. In particolare negli ammassi di galassie ci sta un mucchio di gas ionizzato ad alte temperature, c'è la probabilità dell'1% che avvenga uno scattering Compton inverso, tuttavia l'universo è permeato dai fotoni della radiazione cosmica di fondo. A questi fotoni viene fornita energia da parte dello scattering Compton inverso, e quindi diffusi verso di noi. Questo tipo di diffusione fa sì che la luce ci arrivi in modo uniforme, indipendentemente dalla distanza a cui si trova l'ammasso di galassie, permettendoci di individuarli anche a distanze lontanissime. La brillantezza del fondo cosmico è aumentata per una parte su diecimila, poiché però questa è uniforme entro una parte su centomila, possiamo tranquillamente rilevarli.

Un altro esempio di Scattering è lo Scattering Rayleigh. Questo avviene quando l'elettrone è legato all'atomo, in condizioni lontano dalla risonanza. La sezione d'urto è simile a quella Thomson, con un fattore in più:

$$\sigma_R = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

Quindi frequenze alte vengono diffuse molto di più di frequenze più basse. Un esempio è l'aria della nostra atmosfera che diffonde molto il blu (ecco perché lontano dal sole si vede il cielo blu) e poco il rosso (al tramonto infatti vicino al sole il cielo è rosso).

Di giorno un alone bianco circonda il sole (dovuto allo scattering *Mie*), perché alcune particelle atmosferiche (prototte da Silicati o Graffite) diffondono la luce del sole indipendentemente dalla frequenza, dominando sullo scattering Rayleigh, dove l'aria è meno pulita.

²² \dot{N} è il numero di fotoni ionizzanti per unità di tempo.

²³Il ritardo prodotto dalla massa dell'elettrone è trascurabile.

Capitolo 3

Terza Sezione - Materia interstellare

3.1 Radiazione di Bremsstrahlung

Le radiazioni di Bremsstrahlung si verificano in presenza di campi magnetici che accelerano (o decelerano) cariche nello spazio interstellare. Abbiamo due diversi tipi di irraggiamenti: l'accelerazione di **ciclotrone** (non relativistica) e quella di **sincrotrone** (relativistica).

La radiazione di ciclotrone è dovuta a elettroni che spiraleggiano attorno alle linee di forza di un campo magnetico, con una frequenza pari a:

$$m\omega_c^2 r = \frac{q}{c} \omega_c r B$$

$$\omega_c = \frac{qB}{cm}$$

Da cui la frequenza a cui ruota è indipendente dall'energia della carica. La polarizzazione del campo emesso è lineare in quanto l'accelerazione è perpendicolare al campo magnetico. Se la particella è relativistica bisogna aggiungere il fattore γ alla frequenza di ciclotrone, per ottenere la frequenza di sincrotrone:

$$\omega_s = \frac{qB}{\gamma(v)cm}$$

Questa frequenza dipende invece dall'energia (velocità) della carica. I lobi di emissione si deformano molto nella direzione della velocità, per cui la semiapertura θ è molto più stretta. Questo angolo può essere trovato usando la relatività ristretta infatti passando al sistema di riferimento solidale con l'elettrone risulta un angolo di $\pi/2$, facendo il cambio di sistema di riferimento si ottiene:

$$\sin \theta = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 + \beta \sin \frac{\pi}{2}}$$

$$\theta \approx \frac{1}{\gamma}$$

L'osservatore quindi sarà investito dalla radiazione per un tempo Δt pari alla frazione di angolo rispetto al giro completo.

$$\Delta t = \frac{2\theta}{2\pi} T$$

$$\Delta t = \frac{2mc}{qB}$$

In realtà poiché la carica si muove verso di noi mentre emette questo tempo lo percepiamo accorciato:

$$\Delta t' = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{\Delta t}{2\gamma^2}$$

La frequenza massima di emissione sarà l'inverso del tempo:

$$\omega_{max} \approx \frac{1}{\Delta t'} = \gamma^2 \omega_c \gg \omega_c$$

$$\nu \propto K^2 \quad \frac{dK}{d\nu} \propto \nu^{-\frac{1}{2}}$$

Questo ci spiega come la radiazione di sincrotrone può avere emissioni massime a frequenze molto elevati (K è l'energia dell'elettrone). Se gli elettroni che emettono hanno una distribuzione di energie che ha una legge di potenza allora anche la radiazione di sincrotrone seguirà una legge di potenza:

$$\frac{dN}{dK} \propto K^\beta$$

$$P(\nu) \propto h\nu \frac{dN}{d\nu} \propto \nu \frac{dN}{dK} \frac{dK}{d\nu} \propto \nu K^\beta \nu^{-\frac{1}{2}}$$

Da cui invertendo in ν :

$$P(\nu) \propto \nu \nu^{\frac{\beta}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} \propto \nu^\alpha$$

$$\alpha = \frac{\beta + 1}{2}$$

Questa legge è ottenuta sia nei raggi cosmici che nella radiazione galattica diffusa.

Anche la radiazione di sincrotrone genera luce polarizzata linearmente. Questo ci permette di capire che alcune sorgenti sono dovute a radiazioni di sincrotrone (nebulosa del granchio). Si usa una lente polaroid che lascia passare solo la componente lungo l'asse principale, e si ruota la lente, studiando come variano le immagini si può capire come è polarizzata la luce. Si misurano i parametri di Stokes come le intensità misurate lungo le direzioni ortogonali:

$$Q = I(0) - I\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad U = I\left(\frac{\pi}{4}\right) - I\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Il grado di polarizzazione è definito come Π :

$$\Pi = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I} \leq 1$$

E la direzione di polarizzazione:

$$\chi = \arctan \frac{Q}{U}$$

3.2 Radiazione di Free-free

La radiazione di free-free è data dall'avvicinarsi di un elettrone ad una particella carica che quindi viene deviata dal campo elettrico. Questa deviazione è l'effetto di un'accelerazione sull'elettrone, che irraggia. Sia $2b$ lo spazio in cui l'elettrone attraversa la zona in cui risente del campo elettrico dell'altra carica, il tempo nel quale viene deviato è pari a:

$$\tau = \frac{2b}{v} = \frac{2b}{\beta c}$$

Da cui la frequenza di emissione è pari a:

$$\nu_{max} = \frac{\beta c}{2b}$$

Se si suppone che l'irraggiamento sia costante fino alla frequenza ν trovata, la quantità totale di energia irraggiata sarà:

$$Q(b) = \int_0^{\nu_{max}} I(\nu) d\nu = I(\nu) \nu_{max}$$

Da cui si ricava l'irraggiamento:

$$I(\nu) = \frac{Q(b)}{\nu_{max}}$$

3.3 Radiazione a 21 cm

Il mezzo interstellare della galassia è dominato dalla presenza di Idrogeno nelle tre forme: neutro, ionizzato, molecolare. L'idrogeno ionizzato può essere osservato per le righe di ricombinazione¹. L'idrogeno neutro è il più abbondante ma anche il più difficile da osservare, questo perché si trova tutto nello stato fondamentale, e i fotoni in grado di eccitarlo (ultravioletti) sono molto scarsi nell'universo vuoto lontano dalle stelle. L'unico modo per vederli è grazie alla radiazione di **spin-flip**. Questa radiazione avviene perché quando nucleo e elettrone hanno spin diretto nello stesso verso, l'elettrone tende spontaneamente a decadere verso lo spin opposto emettendo un fotone con lunghezza d'onda di 21 cm. Questi eventi sono rarissimi², ma anche l'idrogeno neutro nella nostra galassia è tantissimo³, questa riga viene osservata. È molto sottile, allargata per effetto Doppler. Dallo spessore ottico della riga si riesce a stimare la densità colonnare dell'idrogeno.

Quando si osserva la riga si vedono tutte le nubi allineate nella direzione di osservazione, le quali hanno velocità relative rispetto a noi molto diverse tra loro, per cui si osservano più righe sullo spettro intorno ai 21 cm spostate per effetto Doppler⁴. Conoscendo quindi come viene spostata la riga si può risalire alla velocità relativa della nube con la formula:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v}{c}$$

Grazie a questo potente mezzo siamo in grado di stimare la velocità di tutte le zone della galassia relativa a noi⁵

¹La riga H_α nel rosso.

²Le collisioni tra atomi che potrebbero diseccitarlo però sono anche loro estremamente rare nello spazio vuoto.

³Circa $3 \cdot 10^6$ masse solari.

⁴In questo caso è un effetto che coinvolge contemporaneamente tutti gli atomi della nube provocando uno shift della riga.

⁵Bisogna fare attenzione, perché la radiazione a 21 cm ci permette di stimare solo la velocità relativa a noi proiettata sulla linea d'osservazione.

3.4 Formazione di stelle

Le nubi di gas interstellare sono il luogo in cui si formano le stelle, studiamo sotto quali condizioni la nube inizia a collassare gravitazionalmente in una stella. In situazione di equilibrio vale il teorema del Viriale:

$$2 \langle K \rangle + \langle U \rangle = 0 \quad E = \frac{1}{2} \langle U \rangle$$

Se consideriamo una nube sferica di massa totale M_C e raggio R_c possiamo scrivere l'energia di una buccia a distanza r dal centro:

$$dU_G = -G \frac{M_r dm}{r}$$

Integrando sul raggio si ottiene:

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM_c^2}{R_c}$$

La condizione di collasso avviene quando l'energia cinetica non è in grado di bilanciare quella potenziale:

$$2 \langle K \rangle < - \langle U \rangle$$

Sostituendo si ottengono le condizioni sulla massa o sul raggio (Massa di Jeans o raggio di Jeans):

$$M > M_J \quad R > R_J$$

Con:

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_J = \left(\frac{15kT}{4\pi G\mu m_H \rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Studiando l'equazione della dinamica di Newton si possono ottenere informazioni utili sul collasso:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_r}{r^2}$$

Poiché tutta la massa collassa, M_r rimane costante durante il collasso. La risoluzione di questa equazione differenziale è complessa, ma si può stimare il tempo che impiega la nube a collassare in un punto:

$$t_{ff} = \frac{\pi}{2\alpha} \quad \alpha = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho_0}$$

Tutto questo è stato fatto nell'ipotesi *isoterma*, ossia ipotizzando che la densità fosse sufficientemente bassa da permettere a tutta l'energia gravitazionale persa di essere irraggiata fuori dalla nube. t_{ff} permette di fare stime approssimative sulla durata di formazione delle stelle. In realtà in una nube non si forma mai una sola stella, ma

sono molto comuni sistemi con più stelle. Poiché però via via che collassa la densità aumenta ci saranno punti in cui delle leggere disomogeneità iniziali fanno sì che iniziano a soddisfare la condizione di Jeans sulla massa, per cui iniziano nuovi collassi indipendenti. Però ad un certo punto il collasso si arresta⁶.

Per comprendere l'arresto del collasso dobbiamo studiare cosa avviene ad alte densità. Ci troviamo in regime *adiabatico* (lo spessore ottico è diventato alto e tutta la radiazione emessa viene riassorbita dalla nube che collassa, facendo aumentare la temperatura). In questo regime si può far vedere che la massa di Jeans va come⁷:

$$M_J \propto \sqrt{\rho}$$

Durante la transizione al regime adiabatico la massa di Jeans inizia ad aumentare bloccando il collasso. Si può studiare la luminosità irraggiata dalla nube (la stella perde energia):

$$E_f = \frac{U_f}{2}$$

$$L = \frac{\Delta E}{t_{ff}}$$

Se alla fine del processo il sistema è a regime adiabatico (assorbe tutta la radiazione che emette) la sua luminosità è pari a quella emessa da un corpo nero descritta dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$I = \sigma e T^4 \quad L = 4\pi R^2 \sigma e T^4$$

Uguagliando queste espressioni si può trovare quando diventano importanti gli effetti adiabatici. Da queste relazioni per valori standard si ottiene che il collasso termina quando M_J è dell'ordine di una massa solare. Questo spiega perché non si osservano stelle con massa molto minore a quella del nostro sole. Questi calcoli sono molto approssimativi, poiché abbiamo trascurato molti effetti importanti. La formazione di una protostella può essere osservata nella regione infrarossa.

3.5 Radiazione Molecolare

Abbiamo detto che nelle nubi interstellari è presente anche l'idrogeno molecolare. È possibile che si formi all'interno

di nubi otticamente spesse, che lo schermano dagli UV delle stelle, il cui urto distruggerebbe il legame. La sua formazione è inoltre catalizzata dalla presenza di polveri, infatti grazie alle interazioni di Van der Waals gli atomi di idrogeno sono attratti sulla superficie della polvere dove si incontrano e si uniscono in idrogeno molecolare. Purtroppo questo è difficilissimo da rivelare, perché ha momento di dipolo nullo, e la radiazione rotazionale è dovuta solo al debolissimo quadrupolo, che emette nell'infrarosso termico, che si confonde con l'emissione della nostra atmosfera. Sono più semplici da rilevare altre molecole con momento di dipolo non nullo. La loro energia rotazionale è pari a:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Il momento angolare è quantizzato $L^2 = \hbar^2 j(j+1)$, da cui otteniamo che l'energia dipende dal numero quantico j :

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1)$$

Poiché l'emissione di un fotone può avvenire solo emettendo fotoni che hanno la stessa frequenza di quella rotazionale, bisogna imporre la regola di selezione $\Delta j = 1$. Da cui si ottiene che l'emissione dovuta al passaggio da uno stato rotazionale ad uno meno eccitato è data da:

$$E_j - E_{j-1} = \frac{\hbar^2}{I} j$$

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\hbar j}{I}$$

Da cui otteniamo la frequenza dei fotoni emessi:

$$\Delta \nu = \frac{\hbar j}{2\pi I}$$

Le righe emesse sono quindi a frequenze multiple di questa quantità. La presenza dell'idrogeno molecolare viene soprattutto osservata grazie all'assenza dell'emissione della riga a 21 cm.

⁶Se non fosse così si continuerebbero a formare un'infinitudine di oggetti sempre più piccoli.

⁷Usando le espressioni del gas adiabatico: $\rho \propto V^{-1}$, $T \propto V^{1-\gamma}$, per gas monoatomici: $T \propto \rho^{\frac{2}{3}}$, $M_J \propto T^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}$.

Capitolo 4

Quarta sezione - Cosmologia

4.1 Velocità delle galassie

Come abbiamo visto la riga a 21 cm può essere sfruttata per studiare la velocità dei punti della nostra galassia relativa all'osservatore. Supponendo che le galassie ruotino in cerchio attorno al centro si può facilmente osservare che su una linea di vista della nostra galassia, la massima velocità relativa è data dalla galassia più vicina al centro. Sia γ l'angolo tra la linea di osservazione e la linea che ci congiunge al centro della galassia, la distanza minima sulla linea di osservazione dal centro è¹:

$$R_{min} = R_0 \sin \gamma$$

Possiamo quindi variare γ e vedere la massima velocità relativa in funzione della distanza R a cui si trova. Il diagramma ($v(r)$) è un grafico che parte da zero, cresce, fino a diventare costante e rimanere costante. Questo non ce lo aspettavamo. Infatti se scriviamo il moto di una stellina di prova attorno al centro della galassia otteniamo:

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

Dove $M(r)$ rappresenta la massa contenuta dal centro alla stella. Poiché la densità delle stelle decresce al crescere di r oltre una certa distanza la velocità v dovrebbe decrescere come $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$. Invece questo non avviene.

Questo fenomeno strano coinvolge tutte le galassie osservate. Possiamo osservare ad esempio lo stesso effetto su galassie che si vedono di taglio. In queste galassie possiamo misurare l'effetto Doppler su una precisa riga spettrale e stimare come variano le velocità al variare della distanza dal nucleo galattico.

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

Si può supporre che la massa sia proporzionale alla luminosità della galassia. Poiché la luminosità va come r^{-4} la massa andrebbe come $M(r) \propto r^{-1}$ ($M \propto \rho^3$) e si osserverebbero ancora velocità decrescenti. C'è della massa che non si vede.

¹ R_0 è la distanza tra noi e il centro, si disegni il triangolo che congiunge noi, il punto di minima distanza dal centro sulla linea di osservazione e il centro, è un triangolo rettangolo, e R_{min} può essere stimato con le regole della trigonometria.

²L'osservazione più significativa è stata fatta nell'ammasso di galassie COMA.

³Sappiamo che la sorgente è unica perché oltre ad avere lo stesso spettro, se la sua luminosità è variabile nel tempo, varia in modo perfettamente sincrono.

⁴Weakly interacting massive particles.

Evidenze di questa massa si trovano negli ammassi di galassie. Perché un ammasso di galassie sia stabile deve valere il teorema del viriale:

$$2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$$

Da cui si ottiene una stima della massa totale in funzione della velocità quadratica media delle galassie:

$$M_{tot} = 2 \frac{R_{tot} \langle v^2 \rangle}{G}$$

Con l'effetto doppler possiamo stimare la velocità relativa delle galassie rispetto a noi, e trovare quindi la componente della velocità quadratica media verso di noi. Per isotropia questa è uguale anche nelle altre direzioni. Si può vedere che se per R prendiamo il raggio che contiene la metà della massa delle galassie la relazione diventa:

$$M = \frac{2.5 \cdot R_m \langle v^2 \rangle}{G}$$

In questo modo si può fare una stima della massa totale necessaria a mantenere in equilibrio l'ammasso di galassie, e si scopre che questa è circa 100 volte superiore alla massa osservata² (anche considerando la varietà di luminosità delle stelle nelle diverse tipologie di galassie il risultato rimane lo stesso)!

Altre evidenze di materia oscura è dovuto al fenomeno di lente gravitazionale. Si riescono a vedere oggetti che si trovano dietro un ammasso di galassie la cui luce ci arriva da più punti (perché viene deviata dall'ammasso)³. Un altro effetto è quello della coda di gas ionizzato che si vede vicino a due ammassi di galassie, questo è dovuto probabilmente ad uno scontro nel passato tra i due ammassi, la materia oscura non interagisce (è debolmente interagente), le galassie sono molto rarefatte, mentre il gas ionizzato ad alte temperature che caratterizza questi ammassi interagisce elettromagneticamente.

Si suppone quindi che la materia oscura sia fatta di **WIMPS**⁴, particelle debolmente interagenti, simili ai neutrini, ma molto più massive (i soli neutrini non bastano a spiegare gli effetti gravitazionali). La loro esistenza è

richiesta solo dalla cosmologia, non sono presenti nel modello standard. Esiste anche un'altra teoria, meno accreditata, che propone una modifica alla gravitazione universale (MOND).

4.2 Misure di distanza delle galassie

Le prime misure della posizione delle galassie è stata fatta studiando la proiezione 2D delle galassie (proiettando le galassie sulla sfera celeste). In questo modo sembrano distribuite quasi uniformemente e rispettano in prima approssimazione la statistica di Poisson. Tuttavia ci sono zone, gli ammassi di galassie, in cui la sovraddensità raggiunge il 100 %. Questi ammassi si riconoscono per la presenza al loro interno di gas caldo ionizzato (10^4 K) che emette nei raggi X.

Per misurare le distanze delle galassie si usano differenti metodi: parallasse annua (sorgenti vicine), distanza di luminosità (sorgenti lontane). Per stelle vicine può essere sfruttato il fenomeno della parallasse annua. Infatti stelle non troppo lontane cambiano posizione nel cielo durante l'anno dovuta alla rotazione della terra attorno al sole. Per effettuare queste misure veniva usato il *cerchio mediano*, un cannocchiale con un solo grado di libertà, che può essere puntato nel cielo, e l'astronomo segna l'istante di tempo in cui la stella passa sul meridiano, sfruttando la rotazione terrestre come sensibilissimo strumento di misura. Con questo mezzo si riesce ad avere una precisione sulla misura dell'ordine del secondo d'arco. Un metodo più pratico si può fare usando un fotomoltiplicatore dietro una griglia, quando la stella passa nel piano focale del telescopio la sua luce entra nel fotomoltiplicatore generando un treno di impulsi, se confrontiamo questo treno con un clock a frequenza maggiore possiamo stimare con alte precisioni l'istante in cui l'immagine della stella si trovava al centro del nostro telescopio. La precisione può essere ulteriormente aumentata facendo ruotare velocemente il telescopio e mandandolo in orbita. Questo è stato il lavoro del satellite **Hipparcos** che ha stimato la distanza delle stelle con una precisione di 2 millisecondi di arco, mappando oltre 100 mila stelle nella nostra galassia. Hipparcos ha reso possibile anche una nuova verifica ad altissima precisione della relatività generale di Einstein, permettendo di misurare la curvatura dei raggi luminosi anche per stelle a novanta gradi dal sole. La precisione di queste misure sarà aumentata nuovamente grazie alla futura missione **Gaia**.

Grazie ad Hipparcos è stato possibile catalogare un diagramma H-R assoluto, in cui misurare magnitudine assoluta (conoscendo la distanza) delle stelle, e legarla alla loro temperatura superficiale (stimata dalla radiazione emessa per confronto con la radiazione di corpo nero). Questo diagramma piazza le stelle in una sequenza principale ben precisa, e dipende solo dalla fisica delle stelle. Grazie alle misure di magnitudine relative ottenute su altre

galassie (come la Grande nube di Magellano⁵) abbiamo potuto stimare la distanza di queste galassie confrontando i diagrammi HR.

Un altro modo per misurare le distanze è l'impiego di cefeidi. Queste stelle pulsano, contraendo e espandendo l'involucro esterno, che si scalda e raffredda. Osservando cefeidi vicine si è scoperta una legge che lega il periodo di pulsazione e la loro luminosità assoluta. Si può quindi, misurando periodo e luminosità relativa per cefeidi molto distanti, ricostruire a che distanza si trovano.

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

Dove F è il flusso misurato, L è la luminosità assoluta, D_L è la distanza di luminosità. La maggior parte di questi tipologie di misure viene fatta sulla calibrazione di *candele standard*, oggetti di cui conosciamo a priori la luminosità assoluta.

Esempi di queste *candele standard* sono le Supernovae. Sono esplosioni che avvengono alle stelle più massive $M > 1.4M_\odot$ (limite di Chandrasekhar). Queste stelle durante la loro vita iniziano a bruciare tutto il carburante, fino al ferro. Si contraggono fin quando il nucleo ha la densità pari al nucleo atomico e il resto della stella urta elasticamente contro questo nocciolo e viene espulsa via, generando un'esplosione di altissima luminosità (miliardi di volte L_\odot)⁶.

Lo strano oggetto che rimane (il nucleo) è una pulsar, una stella di neutroni che, per la conservazione del momento angolare, ruota a velocità impressionanti, questa rotazione fa sì che la stella emetta impulsi luminosi che sono stati osservati sperimentalmente a terra.

Un altro tipo di supernova⁷ avviene quando una nana bianca assorbe materiale da altre sorgenti⁸ fino a superare il limite di Chandrasekhar, si scalda e esplose. Risulta che queste stelle hanno sempre la stessa luminosità quando esplodono⁹, sono quindi ottime *candele standard*.

Un'altra *candela standard* può essere la galassia stessa. Si può misurare la dispersione di velocità delle stelle in una galassia Δv con l'effetto doppler, questa sarà correlata alla massa presente, la quale a sua volta è correlata alla luminosità della galassia. Questa correlazione è stata messa in evidenza nelle galassie con Cefeidi.

Con questi mezzi è stata prodotta la distribuzione 3D delle galassie. Ci si accorse subito che le galassie più lontane avevano tutte un redshift, correlato alla distanza. Questo redshift non può essere spiegato con l'effetto doppler (le velocità che raggiungerebbero le galassie sarebbero troppo grandi. Così definito z il parametro di redshift come

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

Si scoprì la relazione tra distanza e redshift (**legge di Hubble**):

$$cz = H_0 D$$

⁵Una galassia che orbita attorno alla nostra.

⁶Queste supernovae sono dette di tipo II, si riconoscono dalla presenza delle righe di Idrogeno nello spettro.

⁷Tipo Ia

⁸Un'altra stella o da polvere interstellare.

⁹Dovuta al decadimento del Nichel che viene prodotto nel Ferro.

Dove H_0 è una costante che si misura in km/(s·Mpc) e misura

$$H_0 = \frac{1}{1.4} \cdot 10^{-10} \text{ anni}^{-1}$$

(Il che vuol dire che se invertito la relazione tutte le galassie coincidevano in un punto 14 miliardi di anni fa).

È possibile usare anche la legge di Hubble per stimare le distanze, nella mappa 3D che si è fatta delle galassie ci si è accorti che questa non è omogenea.

4.3 Principio cosmologico

Il principio cosmologico sancisce che l'universo è omogeneo e isotropo a grandi scale. Abbiamo visto con la distribuzione 3D delle galassie che questo non è vero per piccole scale, ma se prendiamo scatole cubiche con lato di 40 Mpc, già notiamo fluttuazioni del 50 %, con raggi più grandi questa fluttuazione può essere fatta sparire quasi del tutto. Se ne conclude che l'universo ci appare isotropo. Questo non implica direttamente l'omogeneità poiché l'isotropia ci assicura che la densità è funzione solo del raggio. Ma se non fosse omogeneo l'universo l'uomo sarebbe l'unico osservatore a cui l'universo appare isotropo¹⁰. Oltre al ragionamento copernicano ci sono evidenze fisiche all'omogeneità dell'universo, e sono dovute alla stabilità di $\langle(\delta N/N)^2\rangle$ per conteggi sempre più profondi.

In realtà esistono anche altri modelli di universo anisotropo, secondo cui l'universo sarebbe un modello geometrico frattale di dimensione 1.23. Allo stato attuale è molto difficile discernere su quale sia il modello corretto, tuttavia gli esperimento SDSS e 2dF survey hanno raccolto dati incompatibili con il modello frattale, per cui prediligiamo il modello omogeneo isotropo. L'omogeneità va d'accordo anche con la legge di Hubble. La velocità delle galassie può essere scomposta al primo ordine in r in un termine costante più un tensore per il raggio¹¹:

$$v = C + Dr$$

Se ci troviamo in quiete $C = 0$, Possiamo sempre scomporre D come somma di tensore simmetrico Σ e uno antisimmetrico Ω (rotazione):

$$v = \Sigma \cdot r + \Omega \wedge r$$

Per l'ipotesi di isotropia Ω deve essere nullo e le componenti di Σ devono essere uguali:

$$v = Hr$$

Dove H è una costante, ma questa è proprio la legge di Hubble! Notiamo che la legge di Hubble è l'unica legge di velocità che conserva l'isotropia dell'universo, il che è un forte indizio nella natura isotropa dell'universo. La legge di Hubble è anche compatibile con l'omogeneità infatti un qualunque altro osservatore che guarda verso di noi vedrà la nostra galassia (e le altre) allontanarsi da lui seguendo la legge di Hubble.

¹⁰Se l'universo è isotropo all'uomo ma non omogeneo, appare fortemente anisotropo a qualunque altro osservatore, poiché l'isotropia implica che la densità sia funzione del raggio, non è compatibile con l'isotropia da un altro osservatore ammeno che la densità sia costante.

¹¹Il tensore D è un tensore formato dalle derivate parziali della velocità $D_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$

¹²Bisogna ricordarsi che M e m sono costanti, e possono essere scritti in funzione della densità e del volume, e si possono inglobare molte cose nella costante finale.

¹³Poiché sia H che ρ sono funzioni del tempo occorre specificare il momento a cui si valutano queste grandezze.

4.4 Equazione di Friedmann - Dinamica dell'universo

Studiamo ora la dinamica dell'universo omogeneo e isotropo, partiamo da semplici ragionamenti Newtoniani. Se consideriamo un universo non relativistico riempito di materia, consideriamo uno strato sferico di massa m e raggio r in espansione.

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = E$$

Con le opportune sostituzioni¹²:

$$v^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho r^2 = -kc^2r_0^2$$

A seconda del valore di k possiamo determinare come evolverà l'universo, se $k > 0$ l'energia totale è negativa e l'universo terminerà collassare su se stesso, se $k > 0$ continuerà ad espandersi all'infinito.

Per caratterizzare le distanze nell'universo (poiché sono dinamiche) si usa quindi la **distanza comobile** χ definita come la distanza tra gli oggetti oggi. La distanza ad un generico tempo t si ottiene moltiplicando la distanza comobile per un fattore di scala $a(t)$ comune a tutti gli osservatori (che oggi vale 1).

$$r(t) = \chi a(t)$$

Con questa convenzione l'equazione di Hubble diventa:

$$v = Hr \quad \dot{a} = Ha$$

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a} \Big|_0$$

L'equazione della dinamica dell'universo può essere espressa in funzione del fattore di scala a :

$$\left[H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho \right] a^2 = -kc^2 \quad (4.1)$$

Da cui si può ricavare la relazione della densità per cui la quantità tra parentesi si annulla (densità critica, valutata oggi¹³), che è detta **densità critica** dell'universo. Si definisce il parametro di densità Ω_0 come il rapporto tra la densità reale dell'universo e la densità critica. Il valore del parametro k è legato alla *curvatura* dello spazio-tempo. Per uno spazio omogeneo e isotropo (con la stessa curvatura in ogni punto) la metrica dello spaziotempo può essere scritta:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \right)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Se ora al posto del raggio sostituiamo la convenzione adottata ($r = \chi a(t)$) otteniamo la metrica di **Robertson-Walker**:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\left(\frac{dr}{\sqrt{1 - k\chi^2}} \right)^2 - \chi^2 d\theta^2 - \chi^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (4.2)$$

Sfruttando le equazioni di Einstein della relatività generale¹⁴:

$$G = -\frac{8\pi G}{c^4} T$$

È possibile ricavare nuovamente la relazione 4.1. Possiamo esplicitare la relazione di $\rho(t)$ rispetto al parametro a . Dobbiamo considerare tutte le forme di energia e massa¹⁵.

La materia non relativistica tende a conservarsi, la sua densità diminuisce linearmente all'aumentare del volume, e quindi cubicamente nel raggio:

$$\rho_M(t) = \rho_M(t_0) \left(\frac{1}{a(t)} \right)^3$$

La densità di radiazione può essere ricavata dall'equazione di Stefan-Boltzmann, $\rho_R \propto T^4$, $T \propto \frac{1}{a}$, da cui otteniamo:

$$\rho_R(t) = \rho_R(t_0) \left(\frac{1}{a(t)} \right)^4$$

Prima di procedere oltre discutiamo il fenomeno del *redshift*, usando la relatività generale. Se un fotone percorre una distanza, il suo vettore nello spazio-tempo sarà di tipo luce. Se la metrica è descritta dalla metrica di Robertson-Walker (4.2), e supponiamo che il fotone viaggi lungo il raggio otteniamo:

$$cdt = \frac{a(t)d\chi}{\sqrt{1 - k\chi^2}}$$

Ora se la prima cresta d'onda sarà emessa al tempo t_1 e ricevuta al tempo t_0 , la cresta d'onda successiva sarà emessa al tempo $t_1 + \frac{\lambda_1}{c}$ e ricevuta al tempo $t_0 + \frac{\lambda_0}{c}$.

$$\int_0^{\chi_1} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k\chi^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1 + \frac{\lambda_1}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{cdt}{a}$$

Dalle ultime due uguaglianze si ricava che:

$$\int_{t_1}^{t_1 + \lambda_1/c} \frac{cdt}{a} = \int_{t_0}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{cdt}{a}$$

Ora i tempi di integrazioni sono molto piccoli e posso considerare l'integrando costante per ottenere:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 + z$$

¹⁴Il tensore G è funzione delle derivate seconde della metrica e rappresenta la curvatura dello spazio-tempo, il tensore T rappresenta la distribuzione dell'energia, detto tensore energia-impulso.

¹⁵ ρ rappresenta densità di massa, ma poiché abbiamo ricavato queste equazioni nella relatività generale, la massa non è un invariante relativistico, occorre quindi intendere ρ come densità di energia, e considerare anche la presenza di radiazioni (fotoni) e altre forme di energia.

¹⁶Fu chiamato così quando ancora non si sapeva dell'esistenza di Ω_Λ e che quindi si pensava che l'universo potesse solo decelerare.

¹⁷Si sviluppa in serie di Taylor.

¹⁸ $h\nu_0$ è l'energia del singolo fotone, A è l'area, dN/dt_0 è il numero di fotoni che ci giungono nell'unità di tempo.

Dove z è il parametro di redshift definito come $z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$.

Torniamo allo studio della dinamica dell'universo. Esiste un'altra possibile densità di energia di cui tener conto nell'equazione di Friedmann, un'eventuale forma di energia che permea tutto l'universo e che non si diluisce nell'espansione. Questa è detta costante cosmologica.

$$\rho_\Lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_\Lambda$$

Da cui può essere scritta l'equazione di Friedmann generale.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_R \left(\frac{1}{a} \right)^4 + \Omega_M \left(\frac{1}{a} \right)^3 + (1 - \Omega_0) \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \Omega_\Lambda \right] \quad (4.3)$$

$$\Omega_0 = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda$$

Differenziando l'equazione si ottiene un'espressione per la derivata seconda di a :

$$\ddot{a} = H_0^2 \left[-\Omega_R \left(\frac{1}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \Omega_\Lambda a \right]$$

Come si osserva Ω_Λ è l'unico termine positivo nella derivata seconda, se dominasse sugli altri questo consentirebbe all'universo di espandersi esponenzialmente. Può essere definito un parametro di decelerazione¹⁶

$$q_0 = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \Big|_0$$

$$q_0 = \frac{\Omega_M}{2} + \Omega_R - \Omega_\Lambda$$

Si può misurare q_0 sperimentalmente studiando le deviazioni quadratiche della legge di Hubble¹⁷. Posso fare questa verifica grazie allo studio della distanza di luminosità. Se riceviamo un flusso F da una stella, questo flusso sarà pari a¹⁸:

$$F = \frac{h\nu_0}{A} \frac{dN}{dt_0}$$

$$F = \frac{L}{(1-z)^2 \chi^2 4\pi} = \frac{L}{4\pi D_L} \quad (4.4)$$

Dove D_L è la distanza di luminosità (che può essere molto diversa dalla distanza fisica). Dalle misure del diagramma di Hubble si è scoperto che $q_0 \approx -0.6$, quindi Ω_Λ è dominante, l'universo sta accelerando.

Si vede dall'equazione di Friedmann (4.3) che per piccoli valori di a a dominare è il parametro Ω_R di radiazione.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \Omega_R$$

Risolvendo questa banale equazione differenziale si ottiene la soluzione della dinamica dell'universo per tempi piccoli:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$$

Questa curva ha pendenza infinita per valori di t molto piccoli. Il che vuol dire che la velocità di espansione nel passato era maggiore della velocità della luce. Questo può essere spiegato ricorrendo alla teoria dell'inflazione. Nei primissimi istanti di vita dell'universo lo spazio si è espanso esponenzialmente, fino a portare ad una normale evoluzione (ad un tempo di circa 10^{-36} secondi dopo il big bang).

Dopo la fase di radiazione le grandezze che entrano in gioco sono Ω_M , Ω_0 e Ω_Λ . Se $\Omega_M \gg (1 - \Omega_0)$ c'è una fase in cui domina il termine di materia che porta ad una soluzione del tipo:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$$

Quello che succede dopo la fase di materia dipende dagli altri parametri cosmologici. Se $\Omega_\Lambda = 0$ abbiamo la classica soluzione con materia che può ricollassare in un Big Crunch, o espandersi all'infinito rallentando. Viceversa se $\Omega_0 < 1$ e $\Omega_\Lambda \sim 0$ Allora esiste un termine di *curvatura* in cui domina il termine:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 (1 - \Omega_0)$$

Che predice un espansione libera per il nostro universo ($a(t) \propto t$). Facendo uno studio quantitativo delle soluzioni dell'equazione di Friedmann ci si accorge che se la densità Ω_0 si discostasse di poco da 1 il nostro universo si sarebbe espanso rapidissimamente senza permettere la formazione di materia, o sarebbe ricollassato in se stesso dopo pochi femptosecondi. La teoria dell'inflazione spiega come mai si è riusciti ad arrivare ad una densità Ω_0 esattamente pari a 1.

Se invece $\Omega_\Lambda > 0$ e $\Omega_0 < 1$ l'equazione di Friedmann predice un espansione eterna, poiché oltre all'epoca di curvatura è possibile che si verifichi un'epoca di *vuoto*, in cui domina il parametro Ω_Λ che prevede un'espansione esponenziale. Se $\Omega_0 = 1$ e $\Omega_\Lambda > 0$ l'espansione è esponenziale:

$$a(t) \propto \exp\left[H_0 \Omega_\Lambda^{\frac{1}{2}} t\right]$$

Se invece $\Omega_0 > 1$ e $\Omega_\Lambda > 0$ l'espansione potrebbe fermarsi, ma questo caso è sfavorito dalle osservazioni. Le stime dei parametri sembrano indicare che ci troviamo già in una fase di *vuoto*.

Passiamo ora a stimare le grandezze dei parametri. Per stimare Ω_R notiamo che i fotoni più abbondanti nell'universo sono quelli che provengono dal fondo cosmico a microonde¹⁹.

Per fare una stima occorre sapere che l'idrogeno si ionizza a qualche migliaia di gradi²⁰.

Può essere dimostrato che uno spettro di corpo nero sottoposto a redshift rimane ancora uno spettro di corpo nero, la cui temperatura però varia con l'inverso del

fattore di scala:

$$T = T_0 \frac{a_0}{a}$$

Possiamo sapere che la radiazione cosmica di fondo copre tutto l'universo, oltre che per ragionamento copernicano (è perfettamente isotropa e non ci sono sorgenti intorno a noi che vantano questa isotropia), anche grazie alla misura dell'effetto Sunyaev-Zeldovich, il giovane studente Sunyaev studiò l'effetto compton inverso provocato sui fotoni del fondo cosmico di galassie molto lontane, dimostrando che anche in quelle galassie era presente la stessa radiazione di fondo cosmico²¹. Un'altra prova è stata fatta verificando l'andamento con il redshift della temperatura dei fotoni di fondo cosmico osservando le emissioni di alcune molecole eccitate dai fotoni di CMB.

Se si misura l'energia dei fotoni si scopre che la CMB è di gran lunga dominante rispetto a tutti gli altri.

Alla stima del parametro Ω_R contribuiscono però anche i neutrini relativistici. I neutrini sono di tre specie (detti *sapori*) differenti.

$$\nu_e \quad \nu_\mu \quad \nu_\tau$$

Vengono creati in interazioni con i corrispondenti leptoni²². Nell'universo primordiale c'erano temperature sufficienti per farli interagire con la materia (neutrini termici), la loro temperatura attuale tuttavia è molto bassa. Per neutrini relativistici, senza massa, risulterebbe un contributo $\Omega_\nu = 1.15 \cdot 10^{-5}$. In realtà può essere dimostrato che i neutrini una piccola massa ce l'hanno, limiti inferiori possono essere dati dal fenomeno di oscillazione²³. Gli esperimenti fatti sull'oscillazione ci permettono di dare dei limiti inferiori alle masse (stimando le differenze relative tra la massa di un neutrino e la massa degli altri.). Contando questo dettaglio il contributo dei neutrini al termine di radiazione sarebbe di $\Omega_\nu = 0.0004$.

Stimiamo ora il possibile valore di Ω_M . Per la materia luminosa si può stimare $\Omega_{vis} = 0.002$. Per stimare la materia non visibile (gas intergalattico, polveri) si può usare il metodo della nucleosintesi primordiale. Con questa teoria possono essere stimate le abbondanze dei prodotti della nucleosintesi primordiale in funzione della densità di materia ordinaria Ω_B , osservando nelle nuvole non contaminate dalla nucleosintesi stellare si può quindi ottenere una stima per Ω_B che risulta:

$$\Omega_B = 0.04 \pm 0.01$$

Tuttavia occorre tener presente anche la densità dovuta alla materia oscura²⁴

Ω_0 è la densità totale di massa ed energia dell'universo, normalizzata alla densità critica, sappiamo dunque per certo che:

$$\Omega_0 \geq 0.35$$

¹⁹A una temperatura $T = 2.7$ K con una densità di $411 \frac{\gamma}{cm^3}$.

²⁰L'idrogeno ionizzato è impermeabile ai fotoni, che fanno random walk tra gli elettroni del gas e rimangono intrappolati. A noi interessa sapere quindi quanto tempo la materia ha smesso di essere ionizzata.

²¹Il fotone interagisce con gli elettroni di alta energia e guadagna un po' di energia, questo genera una leggera deviazione della radiazione di fondo cosmico che è stata misurata in corrispondenza degli ammassi di galassie osservati.

²²Decadimento β , decadimento π e decadimento τ .

²³Secondo questa teoria i tre sapori dei neutrini sarebbero miscele quantistiche di tre neutrini di massa definita ν_1 , ν_2 , e ν_3 .

²⁴L'alta isotropia della CMB suggerisce un'altissima isotropia della materia barionica, per spiegare la formazione delle galassie occorre quindi introdurre nuova massa, sempre la solita materia oscura.

La densità di materia oscura può essere stimata dagli effetti di formazione delle galassie²⁵. Quanto vale Ω_0 ? Possiamo vedere cosa accade in un universo in cui Ω_0 è prossimo alla densità critica. Se è così piccole zone di sovraddensità saranno presenti, mentre il resto dell'universo con $\Omega = 1$ continuano ad espandersi e a diluirsi, le parti sovracritiche con $\Omega > 1$ tendono a ricollassare su loro stessi formando strutture molto dense nell'universo (galassie e stelle). Se invece $\Omega_0 < 1$ le piccolissime fluttuazioni che si osservano nella CMB²⁶ non sarebbero sufficienti a far ricollassare il sistema in galassie. Allo stesso modo un universo sovraddenso sarebbe ricollassato su se stesso senza produrre grandi differenze di densità. Tutto sembra indicare che Ω_0 sia davvero prossima a 1.

Però le stime fatte fino ad adesso per le altre costanti cosmologiche non sembrano indicare questo:

$$\Omega_R + \Omega_M = 0.3$$

Questo ci fornisce una stima per $\Omega_\Lambda = 0.7$ per arrivare ad un totale di $\Omega_0 = 1$.

4.4.1 Età dell'universo

Possiamo stimare l'età del nostro universo integrando l'equazione di Friedmann:

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{da}{\dot{a}}$$

La componente di radiazione è trascurabile in questo integrale, se non ci fosse energia oscura l'età dell'universo sarebbe funzione solo di Ω_M e H_0 , ovviamente l'età dell'universo deve essere tale da non esistere nessuna stella o galassia di età superiore. Si osservano alcuni ammassi che hanno stelle di età pari a 11 miliardi di anni. Se Ω_Λ fosse molto alto e positivo $\frac{da}{dt}$ sarebbe passata da zero, e quindi l'universo avrebbe età infinita²⁷. Questo implica un redshift massimo osservabile pari a:

$$z_{max} = \frac{a_0}{a_{min}} - 1$$

Dall'equazione di Friedmann si può mettere in relazione z_{max} con una funzione di Ω_M e Ω_Λ . Poiché si sono osservati redshift $z = 5$ sicuramente $z_{max} > 5$, questo implica una esclusione sulla funzione $f(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$. Un'altra regione la si può escludere supponendo²⁸ che $t_0 H_0 > 0.5$.

Sostituendo i valori oggi preferiti si ottiene un universo di:

$$\Omega_M = 0.3 \quad \Omega_\Lambda = 0.7 \quad t_0 = 14 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

L'evoluzione dell'universo può essere divisa per fasi differenti, l'*equivalenza*, la *ricombinazione*, la *trasparenza*.

L'epoca di equivalenza è quella in cui la densità di radiazione diventa uguale a quella di materia, la densità di radiazione è data dai fotoni e dai neutrini $\Omega_R = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$. La densità dei fotoni è pari alla densità di radiazione presente oggi (dominata dai fotoni) riscalata sul parametro a :

$$\Omega_\gamma = \Omega_R(\text{oggi}) \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$$

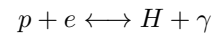
Quella dei neutrini la si può stimare dalla reazione che avviene ad alte energie, dove coppie di neutrini possono essere create e distrutte con coppie di elettroni e positroni. Tuttavia a temperature troppo basse questa reazione non avviene più²⁹. Da questo ragionamento si può stimare Ω_ν . Una volta che si conosce il valore di Ω_R si può sapere quando è avvenuta l'equivalenza:

$$\Omega_M \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^3 = \Omega_R \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^4$$

Da questo si ricava il rapporto tra a_{eq} e a_0 , lo si sostituisce nell'equazione di Friedmann dominata dalla radiazione per ricavare il tempo

$$t = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \frac{1}{2H_0\sqrt{\Omega_R}} = 5 \cdot 10^4 \text{ anni}$$

Si può stimare anche l'epoca di ricombinazione (quando l'idrogeno si è ricombinato dallo stato ionizzato). In linea teorica la ricombinazione può avvenire per temperature al di sotto dell'energia di legame (13.6 eV), che corrisponde ad una temperatura altissima (156000 K). Tuttavia per formare un numero considerevole di atomi di idrogeno dobbiamo trovarci in condizione di equilibrio, in cui il numero di ricombinazioni è pari al numero di ionizzazioni.



Per imporre l'equilibrio bisogna uguagliare i potenziali chimici, da questa uguaglianza³⁰ segue l'equazione di Saha³¹:

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \lambda^3 e^{B/kT}$$

Da questa equazione e imponendo anche l'uguaglianza del rate di reazione³² si ottiene una temperatura di 2700 K.

Quando l'universo non è più ionizzato si entra nella fase di trasparenza, in questa fase infatti i fotoni non subiscono più scattering e sono liberi di diffondersi in tutto lo spazio. Anche in questo caso si può ragionare con uguagliando il rate di scattering con il rate di ricombinazione dell'idrogeno. Si può vedere che lo scattering Thomson prevale sullo scattering Rayleigh, per cui si trova che la temperatura a cui l'universo diventa trasparente è pari a

²⁵La materia oscura influisce circa 20 volte più della materia ordinaria, da cui si stima $\Omega_M \approx 0.3$.

²⁶Cosmic Microwave Background.

²⁷Sarebbe partito da dimensione infinita contraendosi, rimbalsando per a_{min} e poi tornando ad espandersi fino ad oggi.

²⁸Questo viene dal combinare il fatto che l'età dell'universo deve essere maggiore di 11 miliardi di anni e H_0 deve essere maggiore di 50 km/(s Mpc).

²⁹Infatti i neutrini (quasi privi di massa) devono avere energia cinetica sufficiente per poter formare la coppia elettrone positrone, dotata di massa, questa energia è pari ad $2m_e c^2$ (1MeV), è la soglia di energia termica, al di sotto di questa soglia i neutrini si disaccoppiano (non formando più questa interazione).

³⁰Esprimendo i potenziali chimici in funzione della numerosità.

³¹ λ rappresenta la distanza disponibile alla particella quantistica (vedi meccanica statistica), B l'energia di ionizzazione.

³² $\Gamma_{rec} = n_p \langle v\sigma \rangle$ deve essere uguale a $\Gamma_H = \frac{\dot{a}}{a}$ ottenibile dall'equazione di Friedmann.

$\Gamma_H = \Gamma_{th}$ ossia 3000K, che corrisponde a $z = 1100$. La radiazione cosmica di fondo (CMB) è quindi prodotta con $z = 1100$.

A partire da questo punto l'universo diventa visibile, questo rappresenta un orizzonte del nostro universo osservabile, al di là del quale non possiamo osservare. Quanto è grande questo orizzonte? I fotoni che ci arrivano dal CMB percorrono la distanza comobile χ_1 , noi li riceviamo a $\chi = 0$, al tempo $t = t_0$:

$$cdt = a(t) \frac{d\chi}{\sqrt{1+k\chi^2}} \quad \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{\chi_1} \frac{d\chi}{\sqrt{1+k\chi^2}}$$

Stimando la distanza:

$$d(t_0) = \int_0^{\chi_1} dl = a(t) \int_0^{\chi_1} \frac{d\chi}{\sqrt{1+k\chi^2}}$$

Uguagliando le espressioni precedenti e ricordando la dipendenza di a dal tempo nella fase di radiazione e quella di materia si può ottenere il valore corretto³³ per un universo piatto ($k = 0$).

4.5 Teoria del Big Bang

4.5.1 Inflazione

In passato questo orizzonte era più piccolo e c'erano zone dell'universo che erano sconnesse causalmente che poi sono entrate in contatto causale. Tuttavia come è possibile che tutte queste zone sconnesse causalmente formino un sistema omogeneo e isotropo?

Vediamo cosa è successo ai fotoni che ci arrivano oggi dall'orizzonte delle particelle. Nel momento in cui sono stati emessi eravamo in contatto con lui, nel momento in cui lo riceviamo siamo di nuovo in contatto con lui. Integrando nuovamente le equazioni di prima per questo problema troviamo che il fotone si è prima allontanato per poi riavvicinarsi a noi. Questo è possibile solo se lo spazio si è espanso più rapidamente della velocità con cui il fotone cercava di raggiungerci.

La teoria dell'universo presenta un altro paradosso, sembra che l'universo attuale sia piatto, poiché la curvatura è legata al parametro $(1 - \Omega_0)$ dall'equazione di Friedmann. Trall'altro all'origine dell'universo si può vedere che Ω era molto più vicina all'unità di adesso. Sembrerebbe che l'universo sia nato piatto, chi ha regolato i parametri così bene? (Paradosso della piattezza)

C'è un altro fenomeno spaventoso, la radiazione di fondo cosmico è estremamente omogenea, anche zone tra loro molto distanti, che quindi dovrebbero essere state sconnesse causalmente, sembrano avere le stesse temperature con una precisione di una parte su centomila. Come è possibile?

³³Risulta $d(t_0) = 6000 \frac{Mpc}{h}$.

³⁴380000 anni, a una distanza di 14 miliardi di anni è circa 1 grado.

³⁵Questo può avvenire solo in presenza di $\Omega_\Lambda > 0$.

³⁶Si è provato usando galassie ellittiche, di cui si supponeva che avessero tutte le stesse dimensioni all'incirca, purtroppo questa analisi è fallita per via degli effetti evolutivi.

³⁷Questo è un effetto di relatività generale, infatti in un universo ci sarebbe un effetto di deviazione, che funzionerebbe da lente facendoci apparire l'angolo maggiore di quanto ci aspettiamo, se fosse poco denso l'effetto sarebbe l'esatto contrario (una lente che restringerebbe la dimensione di $\Delta\theta$).

La risposta a tutti questi quesiti è nella teoria dell'inflazione. È possibile che tutto l'universo fosse causalmente in contatto nei primi istanti di vita, e che a questo sia seguita una rapidissima espansione dello spazio che abbia sconnesso le zone dell'universo. Questo permette di spiegare tutti i paradossi di cui sopra. È una teoria predittiva, predice fluttuazioni gaussiane della densità della CMB, invariante su scala, e $\Omega = 1$. È possibile verificare questa teoria. Infatti ci aspettiamo che l'orizzonte degli eventi sia stampato sulla radiazione cosmica di fondo, quando è stata emessa questo orizzonte era ampio circa 1 grado³⁴, abbiamo bisogno di immagini di altissima risoluzione per vedere ciò. Altre verifiche che cerchiamo in queste immagini è se l'universo è realmente piatto e informazioni sull'universo primordiale.

A partire dalla distanza di luminosità (4.4) si può stimare la distanza di diametro angolare. Se si osserva un oggetto che ha dimensioni proprie ΔS , e occupa nel cielo un angolo $\Delta\theta$ è possibile definire la distanza di diametro angolare come:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{D_a}$$

Sfruttando l'equazione di Friedmann, si può mettere in relazione questa distanza con la distanza di luminosità:

$$D_a = \chi_1 a_1 = \frac{D_L}{(1+z_1)^2}$$

Risolviendo esplicitamente l'espressione integrale di D_L si può ottenere l'andamento di D_a in funzione del redshift z . Si scopre che questo diminuisce fino ad un valore minimo, per poi tornare ad aumentare³⁵. Questo avviene perché la materia tra noi e la sorgente agisce come lente gravitazionale, aumentando il diametro apparente per galassie molto lontane ($z > 1.5$).

Studiando questi effetti è possibile ottenere una stima di Ω_Λ e Ω_0 . Questo può essere fatto guardando *righe* standard molto lontani³⁶. Per questo motivo si stanno studiando sorgenti radio ultracompatte. Un altro righello standard che possiamo andare a stimare è la radiazione di fondo cosmico. Regioni che erano causalmente disconnesse all'epoca devono essere a temperature differenti, e quindi risultare differenti tra loro, quindi nella sua risoluzione deve essere possibile rintracciare una scala caratteristica che corrisponde all'orizzonte di ricombinazione. Possiamo stimare la distanza angolare dell'orizzonte di ricombinazione sulla CMB, supponendo che lo spaziotempo sia piatto ($\Omega_0 = 1$) questo orizzonte deve essere di circa 0.85 gradi. Questo angolo è uno spartiacque, angoli maggiori corrispondono $\Omega > 1$, angoli minori corrisponde $\Omega < 1$. Misurando quindi $\Delta\theta$ è possibile stimare la densità di energia media dell'universo³⁷. L'esperimento Boomerang nel 2000 ha prodotto le immagini della CMB ad altissima risoluzione, dando $\Delta\theta = 0.9$ gradi con un piccolo errore. E

stimando per Ω_0 un valore di:

$$\Omega_0 = 1.2 \pm 0.2$$

Compatibile con l'unità. Altri esperimenti (Plank) hanno raffinato questo risultato in seguito a $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$. Un altro test che si può fare del modello cosmologico consiste nel contare il flusso di galassie più brillanti di una magnitudine limite m . Il flusso ricevuto dalla singola galassia a distanza r sarà pari a:

$$4\pi r^2 F = L$$

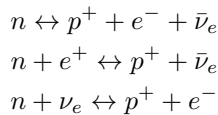
$$r(F) = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

Integrando su tutte le galassie presenti sulla sfera di raggio r (supponendo l'universo statico e euclideo) N va come $F^{-\frac{3}{2}}$. Se si aggiunge a questo una correzione dovuta all'espansione dell'universo si ottiene una dipendenza leggermente inferiore nel grafico doppiologaritmico. Sono stati effettuati dei test anche di questo fenomeno, i risultati sono discrepanti e mostrano andamenti euclidei per sorgenti forti³⁸

4.5.2 Nucleosintesi primordiale

Abbiamo visto come uno dei modi per falsificare meglio la teoria del Big Bang sia quello di studiare la nucleosintesi primordiale. Per farlo iniziamo a capire cosa avvenne nei primi istanti di vita dell'universo (subito seguenti all'inflazione). Alla temperatura di 10^{12} K siamo conosciamo bene le reazioni nucleari che avvengono poiché possono essere riprodotte negli acceleratori di particelle.

Le particelle più presenti all'epoca erano i fotoni, neutrini³⁹, e pochi barioni (protoni e neutroni, 5 ogni 10^{10} fotoni). A queste temperature le seguenti reazioni nucleari sono in equilibrio⁴⁰:



Si può stimare la percentuale di neutroni e protoni grazie alla statistica di Boltzmann:

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

Quando le temperature si iniziano ad abbassare le sezioni d'urto dei neutrini diventano troppo piccole, e non partecipano più alle reazioni nucleari, inoltre i fotoni diventano troppo poco energetici per creare coppie di elettroni positroni, che si annichilano tutti lasciando solo un eccesso di elettroni. La conversione di p^+ in n diventa

³⁸È presente un eccesso di sorgenti deboli e ultradeboli.

³⁹Muonici ed Elettronici.

⁴⁰Questo è possibile perché la differenza di massa di protone e neutrone è molto sotto l'energia termica.

⁴¹Questo perché l'energia di legame del nucleo di Deuterio è inferiore all'energia dei fotoni liberi, questo blocca il fenomeno di fotodisassociazione.

⁴²Quasi tutti i neutroni presenti formano il deuterio.

⁴³Infatti al centro delle stelle sono presenti condizioni di temperature e densità superiori a quelli di questa fase del Big-bang.

⁴⁴Un aumento di g comporta un aumento di H a quella temperatura e quindi questo porta ad una maggiore abbondanza di Elio.

⁴⁵Le abbondanze di deuterio, trizio e 3He sono molto influenzate da questo parametro.

⁴⁶I fotoni sono molto più abbondanti.

un processo raro, inferiore a Γ_H , rate di espansione dell'universo. Dalla temperatura di 10^9 K non si creano più neutroni nuovi, ma questi continuano a decadere con il decadimento beta in protoni. A queste temperature diventa anche possibile la reazione nucleare che consente la produzione dei primi nuclei di deuterio⁴¹. Dalla conoscenza del tempo di transizione tra queste temperature si può stimare l'abbondanza dei nuclei di Deuterio⁴². Da deuterio si forma l'elio primordiale, le reazioni che portano alla sua formazione sono diverse da quelle che avvengono nelle stelle⁴³.

Si formano anche tracce di 3He e 7Li . Nuclei più pesanti è difficilissimo che si formino, in primis per le alte barriere di tunnelling, e anche perché sono pochi gli isotopi stabili. La sintesi del Litio è molto bassa (10^{-10}) ma le tracce che si misurano sono importanti.

I parametri da cui dipende la nucleosintesi primordiale sono g (numero di gradi di libertà relativistici)⁴⁴ e l'entropia specifica⁴⁵ η . Per misurare sperimentalmente queste abbondanze si osservano nubi in cui non sono presenti ancora fenomeni di formazione stellare, poiché queste nubi non emettono luce si osservano grazie all'assorbimento di sorgenti a spettro continuo che si trovano dietro, dette QSO. Da queste misure si possono stimare i parametri g e η , da cui si ricava Ω_B . La stima migliore attualmente risulta essere:

$$\Omega_B = 0.020 \pm 0.002$$

Inoltre grazie alla stima di g è possibile stimare il numero di specie di neutrini. Il valore ottenuto è consistente con 3 specie di neutrini, marginalmente consistente con 4, inconsistente per valori maggiori di 4.

4.5.3 Formazione delle strutture

Mentre l'universo primordiale è incredibilmente omogeneo ($\Delta\rho/\rho = 10^{-5}$ nella CMB), l'universo attuale è dominato da fortissime disomogeneità dovute alla presenza di galassie separate da uno spazio semivuoto ($\Delta\rho/\rho = 10^5$). Queste disomogeneità sono cresciute nel tempo a causa della gravità che ha spinto la materia a collassare in pochi punti. La situazione è differente rispetto al collasso della materia nelle nubi per formare le stelle, poiché l'universo si sta espandendo, e c'è una fortissima pressione di radiazione nei momenti iniziali di vita.

Schematizziamo l'universo primordiale come un fluido di fotoni e materia⁴⁶, in questo caso si possono avere due fluttuazioni di densità: *adiabatica* (varia sia la fluttuazione di materia che di fotoni mantenendo costante il rapporto numerico tra le due specie), in questo caso la fluttuazione

va come⁴⁷:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\rho_b}{\rho_b} &= \frac{\delta n_b}{n_b} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3\frac{\delta T}{T} = \\ &= \frac{3}{4}\frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma}\end{aligned}$$

E le fluttuazioni *isoterme* (queste fluttuazioni alterano il rapporto n_γ/n_b , ma l'aumento del potenziale gravitazionale viene soppresso. Consideriamo ora una fluttuazione di densità *adiabatica* di dimensioni maggiori dell'orizzonte prima della ricombinazione. Schematizziamolo come un nucleo sovraddenso di densità ρ' in una sfera di densità critica ρ . La sfera più densa evolverà come un miniuniverso sovraddenso. L'equazione di Friedman quindi ci dà la dinamica delle due regioni. Scriviamola per entrambi i casi:

$$\begin{cases} \left[H^2 - \frac{8\pi G\rho'}{3} \right] \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = -kc^2 \\ \left[H^2 - \frac{8\pi G\rho'}{3} \right] \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = 0 \end{cases}$$

Sottraiamo e dividiamo il risultato per ρ per ottenere:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho' - \rho}{\rho} = \frac{3kc^2}{8\pi G\rho} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2$$

Ci troviamo nell'epoca dominata dalla radiazione, in cui $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ e $\rho \propto a^{-4}$ da cui si ricava:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{1}{a^{-4}} \frac{1}{a^2} \propto t$$

Mentre all'epoca dominata dalla materia⁴⁸:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto t^{\frac{2}{3}}$$

Questo ci dice che la perturbazione cresce con l'andare avanti del tempo, fin quando l'orizzonte supera le sue dimensioni, in questo momento la perturbazione diventa tutta connessa causalmente, ed entra nell'orizzonte. Da questo punto in poi la sua evoluzione dipende da quanto è grande in relazione alla massa di Jeans. In questo contesto spesso ci si riferisce alla massa di Jeans in termini di velocità del suono⁴⁹. Prima della ricombinazione la pressione è fornita dai fotoni, per cui la velocità del suono è quasi costante. Dai calcoli risulta⁵⁰ che $M_J \propto T^{-3}$. Dopo la ricombinazione la pressione dei fotoni cessa poiché non interagiscono più con la materia, e l'unica dipendenza da T rimane nella velocità del suono ($M_J \propto T^{\frac{3}{2}}$).

Durante l'epoca di radiazione la Massa di Jeans è 10 volte maggiore la massa dei barioni contenuta entro l'orizzonte, questo fa sì che le perturbazioni vengano soppresse e non collassino. Nell'epoca successiva queste perturbazioni oscillano fino alla ricombinazione, dove ricominciano a crescere. Le piccole oscillazioni adiabatiche non sopravvivono, questo perché i fotoni vengono diffusi via dalle piccole zone sovraddense, viceversa se le dimensioni della

densità sono sufficientemente grandi lo scattering dei fotoni ne impedisce la fuga, stimando il cammino libero medio e il numero di diffusioni si può fare una stima della grandezza che deve avere la nuvola per evitare la dispersione dei fotoni:

$$d = l\sqrt{N} = \sqrt{\frac{ct_{dec}}{n\sigma}}$$

Da questa relazione si ottiene la massa contenuta in una sfera di raggio d , pari a circa $10^{13} M_\odot$

Anche le fluttuazioni isoterme congelate durante la fase delle oscillazioni acustiche possono crescere nell'epoca della ricombinazione se la loro massa è superiore a quella di Jeans ($10^6 M_\odot$).

Dalla CMB possiamo stimare come le piccole variazioni di densità abbiano comportato variazioni di temperatura e si stima circa:

$$\frac{\delta T}{T} \geq 0.0015$$

Però la radiazione di fondo cosmico è omogenea circa 10 volte di più. Questo fenomeno è spiegato grazie alla presenza della materia oscura. È lei la principale responsabile del collasso gravitazionale che ha poi portato alla formazione delle galassie. Infatti la sola materia barionica era troppo omogenea per portare alla situazione attuale. Le perturbazioni di WIMPS sopravvivono meglio prima della ricombinazione (durante però la fase dominata dalla materia) di quella barionica, poiché la massa di Jeans è molto inferiore⁵¹. Le perturbazioni di WIMPS vanno come la legge

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto t^{\frac{2}{3}}$$

Che arrivano ad essere 0.001 e 0.01 alla ricombinazione. Questi valori sono sufficienti per prevedere la formazione delle galassie. Se presenti queste perturbazioni possono essere osservati nella CMB, poiché zone sovraddense di WIMPS hanno effetti di lente gravitazionale sui fotoni che ci arrivano dalla radiazione di fondo cosmico.

Questi effetti possono essere discussi in relatività generale. Il principio di equivalenza di Einstein dice che tutti i sistemi di riferimento in caduta libera non rotanti sono sistemi localmente inerziali (è impossibile distinguere un ascensore in caduta libera da essere sullo spazio senza gravità). Quindi mettiamoci in un ascensore in caduta libera e spariamo un raggio laser orizzontalmente. Il raggio laser si muoverà di linea retta nel nostro sistema di riferimento, colpendo il bersaglio esattamente alla stessa altezza da cui l'ho sparato. Se ora osservo lo stesso esperimento da fuori, vedo l'ascensore che cade. Nel momento in cui il raggio viene sparato, a quello in cui colpisce il bersaglio l'ascensore si è spostato verso il basso. Tuttavia l'esperimento fatto nel sistema inerziale afferma che il raggio laser colpisce il bersaglio alla stessa altezza dalla terra dell'ascensore da cui è stato sparato. Questo implica che nel sistema di riferimento dello spettatore a terra la traiettoria del raggio di luce è curvata! L'angolo di curvatura si può stimare

⁴⁷Le ultime due uguaglianze tirano fuori i fattori 3 e 4 poiché $n_\gamma \propto T^3$ e $\rho_\gamma \propto T^4$, nell'operazione di derivazione l'esponente viene portato come coefficiente. Nella formula con n_b si intende il numero di barioni.

⁴⁸Gli stessi conti, ricordando che però $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ e $\rho \propto a^{-3}$.

⁴⁹Infatti il fluido fotoni-materia può essere trattato come un gas ideale monoatomico.

⁵⁰La dipendenza da T viene dalla densità specialmente dalla densità di barioni e fotoni. $\rho_B \propto a^{-3} \propto T^3$.

⁵¹È più bassa la velocità del suono.

banalmente:

$$\varphi \approx \frac{\frac{1}{2}gt^2}{l} \approx \frac{1}{2} \frac{gl}{c^2}$$

Un altro effetto di relatività generale che possiamo descrivere è il redshift gravitazionale. Supponiamo ora di riprendere l'ascensore, ributtarci in caduta libera di nuovo e stavolta sparare il raggio laser in verticale, su un rilevatore su un soffitto. Nel sistema di riferimento dell'ascensore il rilevatore riceve il raggio laser alla stessa frequenza ν alla quale è stato inviato. Se invece osservo da terra quello che è avvenuto mi accorgo che il rilevatore si avvicina al raggio, per cui dovrebbe essere presente un blueshift. Poiché questo non è possibile (l'osservatore nell'ascensore non rivela nessuna modifica in ν , e lui è l'osservatore nel sistema inerziale), la presenza del campo gravitazionale deve compensare questo blueshift con un redshift identico. Quantificando quanto detto, l'effetto doppler di blueshift sarebbe⁵²:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v}{c} = \frac{gh}{c^2}$$

Da cui l'effetto di redshift gravitazionale che compensa questo è

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{gh}{c^2}$$

Questo risultato è stato realmente fatto sulla torre dell'università di Harvard (22.6m), sfruttando i raggi gamma (larghezza estremamente piccola). Integrando questa relazione su tutto lo spazio per cui la luce deve sfuggire al campo gravitazionale si ottiene (nel limite newtoniano)⁵³:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}$$

Aperta questa piccola parentesi possiamo stimare le variazioni percentuali della temperatura della radiazione cosmica di fondo dovuta alla variazione di frequenza per effetto di redshift gravitazionale causata dalle zone sovraddense di materia oscura. Poiché però la sovraddensità causa anche una dilatazione del tempo osserviamo in corrispondenza di quelle zone una fase più primordiale e quindi più calda. Poiché ci troviamo nella fase di materia $a \propto t^{\frac{2}{3}}$:

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta a}{a} = -\frac{2}{3} \frac{\delta t}{t} = \frac{2}{3} \frac{\delta\Phi}{c^2}$$

Sommando questi due effetti si ottiene:

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{3} \frac{\delta\Phi}{c^2}$$

⁵² $v = gt = \frac{gh}{c}$.

⁵³Con ϕ potenziale gravitazionale.