La domanda 18 del Figà Talamanca:
come si dimostra che se x è un numero reale positivo allora esiste sempre un numero reale positivo y tale che $y^2 = x$?

In altre parole come possiamo essere sicuri dell'esistenza di una radice quadrata per ogni numero reale positivo?

Risposta:

$$E = \{y : y^2 < x\}$$

Sia $b = supE$
Abbiamo tre ipotesi:

$$b^2 < x \qquad b^2 > x \qquad b^2 = x$$

Dimostriamo per assurdo che non possono valere ne la prima, ne la seconda.

Scelgo un punto $c \in E$ con $c = b - \frac{(b^2-x)}{2b}$
È chiaro che $0 < c < b$.

$$c^2 = b^2 - (b^2 - x) + \frac{(b^2 - x)^2}{4b^2} = x + \frac{b^2 - x)^2}{4b^2} > x$$

Per cui $c^2 > x$, quindi $c \notin E$. Ma questo è un assurdo perchè $c < b$.

Scegliamo ora $b^2 < x$. Prendo un punto c tale che $c < \frac{x-b^2}{3b}$

In questo modo costruisco il numero $b + c$:

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = b^2 + c \cdot (c + 2b) < b^2 + c \cdot 3b < b^2 + (x - b^2) = x$$

Da cui segue che $b + c \in E$, ma $b + c > b$ per cui $b + c \notin E$

Assurdo. Quindi $\forall x \in \mathcal{R}\ \exists b : b^2 = x$