Domanda 20 di Figà

Perché siamo sicuri che per ogni numero reale y esista un numero $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tale che $\tan x = y$?

Soluzione:
La funzione $f(x) = \tan x$ è continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ perché è il quoziente di due funzioni continue di cui il denominatore $(\cos x)$ non si annulla mai in quell'intervallo.

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$$

Per cui la funzione $\tan x$ non è limitata nel nostro intervallo. Sia $y \in \mathbb{R}$, y non è maggiorante, ne minorante di $f(x)$. Per cui esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < y < b$ tali che

$$x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad f(x_1) = a \;\; f(x_2) = b$$

Poichè la funzione $f(x) = \tan x$ è continua in $[a, b]$, per il teorema dei valori intermedi $\exists\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tale che:

$$\tan x = y$$

Abbiamo dimostrato che esiste l'arcotangente di ogni numero reale, ed è sempre compreso nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.