Domanda 22 di Figà

Dimostra che una funzione derivabile in un punto è anche continua in quel punto

Soluzione:
Se una funzione è derivabile in un punto vuol dire che il limite destro e sinistro del rapporto incrementale in quel punto esiste ed è limitato.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$$

Se L è limitato, questo implica che esiste per $|h| < \delta$ un M, tale che:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| < M$$

Scegliamo $h = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{M} \right\}$,

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < |h| \, M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

E la distanza tra x_0 e $x_0 + h$ è minore di δ.

$$|x_0 + h - x_0| = |h| < \delta$$

Quindi soddisfa l'ipotesi di continuità!