Domanda 32 di Figà

*Mostrare che la funzione $f(x) = \sin x^2$ è continua in $\mathbb{R}$ ma non uniformemente continua. ****

Soluzione:
La funzione $f(x) = \sin x^2$ è continua perché è la composta di due funzioni continue.

L'uniforme continuità impone che:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ con } |x_2 - x_1| < \delta$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Supponiamo quindi che la funzione sia uniformemente continua. Scegliamo due successioni di punti x_n e y_n in questo modo:

$$x_n = 2\pi n \;\; y_n = 2\pi n + k$$

Scegliamo un $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Per l'uniforme continuità deve esistere un δ tale che se $k < \delta$

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{1}{2}$$

Indipendentemente dal valore di n. Questo implica che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sin(2\pi n + k)^2 - \sin(2\pi n)^2\right| < \frac{1}{2}$$

Perchè questa uguaglianza sia vera gli argomenti dei seni devono distare tra loro meno di un periodo (altrimenti ha in quell'intervallo un oscillazione massima di 2, per cui possiamo trovare un $k < \delta$ per cui l'oscillazione tra x_n e y_n sia 2.

$$\left|(2\pi n + k)^2 - (2\pi n)^2\right| < 2\pi$$

$$\left|4\pi^2 n^2 + k^2 + 4nk - 4\pi^2 n^2\right| = \left|k^2 + 4nk\right| < 2\pi$$

$$n < \frac{2\pi - k^2}{4n}$$

Ma questo è un assurdo, perché i numeri naturali non sono limitati. Quindi abbiamo dimostrato che la funzione $f(x) = \sin x^2$ non è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.