Domanda 33 di Figà

Mostrare che la funzione $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *é continua nell'intervallo* $(0,1)$*, ma non è uniformemente continua ***.*

Soluzione:
L'uniforme continuità implica che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in (0,1)\, con\, |x_2 - x_1| < \delta$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x_2}\right) - \sin\left(\frac{1}{x_2}\right)\right| < \varepsilon$$

Scelgo le due successioni di punto x_n e y_n in questo modo:

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \qquad y_n = \frac{1}{2\pi n + k}$$

Quindi per $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ imponiamo che $\left|\frac{1}{2\pi n+k} - \frac{1}{2\pi n}\right| < \delta$.

$$\left|\frac{2\pi n + k - 2\pi n}{(2\pi n) \cdot (2\pi n + k)}\right| = \left|\frac{k}{(2\pi n) \cdot (2\pi n + k)}\right| < \delta$$

È chiaro che basta scegliere un n abbastanza grande perché questo sia vero per ogni δ.

$$|\sin(2\pi n + k) - \sin(2\pi n)| < \varepsilon$$

Perché ció sia vero gli argomenti dei seni non devono distare piú di un periodo, altrimenti posso scegliere k in modo che l'oscillazione tra x_n e y_n sia uguale a 2, e quindi maggiore di $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

$$|2\pi n + k - 2\pi n| < 2\pi$$

Ora scegliamo $k = \frac{\pi}{2}$, $\exists\, N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ Risulta che

$$|x_n - y_n| < \delta \qquad |\sin(2\pi n + k) - \sin(2\pi n)| = \left|sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 < \frac{1}{2}$$

Quindi siamo arrivati all'assurdo, contraddicendo il fatto che gli argomenti del seno non potevano distanziarsi più del periodo. Abbiamo dimostrato che $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Non è uniformemente continua.