Domanda 35 di Figà

Mostrare che una funzione continua in un intervallo chiuso è integrabile nello stesso intervallo. (usare l'uniforme continuità)

Soluzione:
Abbiamo già dimostrato in nella precedente domanda 31 che una funzione continua in un intervallo chiuso è uniformemente continua nello stesso intervallo. Ciò implica che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, P$(Partizione di $[a, b]$) tale che se la lunghezza di ogni sotto intervallo della partizione P è minore di δ, allora l'oscillazione della funzione in tutti gli intervalli della partizione è sempre minore di ε.

Dobbiamo dimostrare che la funzione è integrabile. Scegliamo $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{b-a}$.

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \underset{a+k\cdot\frac{b-a}{n}<x_M<a+(k+1)\cdot\frac{b-a}{n}}{\frac{(b-a)}{n} \cdot f(x_M)} \quad - \sum_{k=0}^{n} \underset{a+k\cdot\frac{b-a}{n}<x_m<a+(k+1)\cdot\frac{b-a}{n}}{\frac{(b-a)}{n} \cdot f(x_m)} \right|$$

Portiamo fuori dalla sommatoria tutte le costanti e raccogliamo a fattor comune:

$$\frac{b-a}{n} \left| \sum_{k=0}^{n} \underset{\substack{a+k\cdot\frac{b-a}{n}<x_M<a+(k+1)\cdot\frac{b-a}{n} \\ a+k\cdot\frac{b-a}{n}<x_m<a+(k+1)\cdot\frac{b-a}{n}}}{f(x_M) - f(x_m)} \right|$$

Ma abbiamo detto che in ogni intervallo di P, $f(x_M) - f(x_m) < \frac{\varepsilon_0}{b-a}$:

$$\frac{b-a}{n} \left| \sum_{k=0}^{n} \underset{\substack{a+k\cdot\frac{b-a}{n}<x_M<a+(k+1)\cdot\frac{b-a}{n} \\ a+k\cdot\frac{b-a}{n}<x_m<a+(k+1)\cdot\frac{b-a}{n}}}{f(x_M) - f(x_m)} \right| < \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n \cdot \varepsilon_0}{b-a} = \varepsilon_0$$

Quindi tutte le funzioni continue sono integrabili.