Domanda 36 *** di Figà Talamanca

Mostrare che esiste una funzione crescente nell'intervallo $[0,1]$ *discontinua su tutti gli x razionali, continua sugli irrazionali e crescente. Questa funzione è integrabile!*

Sia s_n Un enumerazione dei razionali che associa a ogni $n \in \mathcal{N}$ un numero razionale $q \in (0,1)$

Definiamo la funzione $f(x)$ con $x \in [0,1]$ in questo modo:

$$f(x) = \sum_{\substack{n \in s_n \\ s_n < x}} \frac{1}{2^n}$$

Questa funzione è discontinua $\forall x \in \mathcal{Q}$
Infatti in quel valore la funzione ha un salto che vale esattamente $\frac{1}{2^n}$ dove n è il valore tale che $s_n = x$

Questa funzione è crescente poichè al crescere di x ci sono piú termini della somma tutti positivi. È limitata perchè é una serie geometrica con base minore di 1 quindi è integrabile.

Dobbiamo dimostrare che è continua sugli irrazionali. Scegliamo un enumerazione vantagiosa:

n	s_n
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{4}$
6	$\frac{3}{4}$

In questo modo $\forall x \in [0,1]$ $\exists n : s_n < x < s_{n+1}$ Infatti basta sceglere il primo denominatore primo q tale che:

$$\frac{1}{q} < \delta$$

e scegliamo n tale che

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{q}$$

Ora siano $x_1, x_2 \in [s_n, s_{n+1}]$. Vale l'ipotesi che $|x_2 - x_1| < \delta$

Stimiamo ora il valore di $|f(x_2) - f(x_1)|$

$$\left| \sum_{\substack{n \in s_n \\ s_n < x_2}} \frac{1}{2^n} - \sum_{\substack{n \in s_n \\ s_n < x_1}} \frac{1}{2^n} \right|$$

Queste somme hanno tutti i termini uguali per $s_n \leq x_1$. Per cui la differenza tra queste due somme si limita a tutti gli n che corrispondono numeri razionali compresi tra s_n e s_{n+1}.

Ma questi razionali hanno una distanza tra s_n e s_{n+1} minore di $\frac{1}{q}$, per cui il valore n che rappresenta questi razionali è molto grande, questa somma quindi é maggiorata da:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Usando i criteri di convergenza delle serie geometriche segue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$2 - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Poiché all'aumentare di q aumenta n e i numeri primi sono illimitati, segue che

$$\lim_{n\to\infty} 2 - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \to 0$$

Abbiamo dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x_2 - x_1| < \delta$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Dunque la funzione è contnua sugli irrazionali!