Domanda 38 del Figà

Mostrare che la funzione

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Definita su ogni numero reale positivo verifica $L(x) + L(y) = L(x \cdot y)$

Soluzione:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_1^y \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\int_1^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt$$

Quindi il nostro obbiettivo rimane dimostrare che:

$$\int_1^y \frac{1}{t}\, dt = \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt$$

Per farlo approssimiamo gli integrali alle somme di Darboux. Scegliamo una partizione dell'intervallo $[x, xy]$ in cui ogni sotto intervallo sia lungo $\frac{x(y-1)}{n}$

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt \approx \frac{x(y-1)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x + kx \cdot \frac{y-1}{n}} =$$

$$= \frac{y-1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + k\frac{y-1}{n}}$$

Ma questa è la stessa somma di Darboux dell'integrale

$$\int_1^y \frac{1}{t}\, dt$$

Abbiamo quindi completato la dimostrazione!