Domanda 39 del Figà

Dimostrare che la funzione $L(x)$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} L\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 1$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} L\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty} n \cdot L\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\, dt$$

Per il teorema del valor medio esiste un punto $c \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$ tale che:

$$\frac{1}{c} = n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\, dt$$

Sia c_n una successione di punti che appartengono all'intervallo preso in considerazione. Vale allora che $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, da cui segue che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = \lim_{n\to\infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\, dt = 1$$

E abbiamo dimostrato quanto richiesto.