Domanda 40 del Figà

Mostrare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^{\alpha}}$$

Converge se e solo se $\alpha > 1$

Soluzione:
Per dimostrare la convergenza di questa serie useremo il criterio del confronto integrale. Si puó dimostrare facilmente che la convergenza dell'integrale implica necessariamente la convergenza della serie. Il problema si riduce quindi a stimare al variare di α il valore del nostro integrale.

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$$

Distinguiamo due casi: per $\alpha = 1$ e per $\alpha \neq 1$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^{\alpha}} = \begin{cases} [\log(\log(n))]_{2}^{\infty} & \text{se } \alpha = 1 \\ \left[\frac{\log(n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{2}^{\infty} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Si intuisce chiaramente che per $\alpha = 1$ l'integrale non converge, Analizziamo meglio il caso per $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{1-\alpha} - (\log 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \\ \infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Per cui la serie converge se e solo se $\alpha > 1$