

Appunti di Elettromagnetismo

Lorenzo Monacelli, Mattia Miotto

26 ottobre 2014



Indice

1	Richiami di analisi vettoriale	5
1.1	Campo scalare	6
1.1.1	Graficare un campo scalare	6
1.1.2	Gradiente di un campo scalare	6
1.2	Campi vettoriali	7
1.2.1	Campi gradienti	7
1.2.2	Rappresentazione dei campi vettoriali	8
1.2.3	Divergenza	9
1.2.4	Proprietà della divergenza	11
1.3	Rotore	12
1.3.1	Campo gravitazionale	13
1.4	Coordinate sferiche e angolo solido	14
1.4.1	Operatori differenziali in coordinate sferiche	15
2	Elettrostatica	17
2.1	La carica elettrica	17
2.2	La legge di Coulomb	19
2.2.1	Istantaneità della forza elettrostatica	20
2.2.2	Il coulomb e la costante dielettrica nel vuoto	21
2.3	Il campo elettrico	21
2.3.1	Campo elettrico di un dipolo	22
2.3.2	Distribuzioni di cariche nel continuo	24
2.3.3	Campo elettrico di un filo infinito	25
2.3.4	Campo elettrico di un piano uniforme	27
2.4	Il teorema di Gauss	28
2.5	Prima equazione di Maxwell	32
2.5.1	Calcolo del campo elettrico - Sfera uniforme	33
2.6	Il potenziale elettrostatico	35
2.6.1	Potenziale del dipolo elettrico	37
2.7	Sistema di N cariche	40
2.8	Dipolo sottoposto a campo elettrico	43

3	Elettrostatica dei conduttori	47
3.1	Campo elettrico dentro i conduttori	47
3.1.1	Distribuzione di carica del conduttore	49
3.2	Campo elettrico tra conduttore e esterno	50
3.3	Gabbia di Faraday	54
3.4	Effetto punte	55
3.5	Capacità elettrostatica	57
3.5.1	Capacità di un conduttore isolato	57
3.5.2	Sistemi non isolati	58
3.5.3	Capacità di un condensatore sferico	60
3.6	Energia elettrostatica	64
3.6.1	Energia del condensatore	67
3.7	Pressione elettrostatica	69
3.7.1	Pressione di un condensatore isolato	69
3.7.2	Pressione di un conduttore isolato	70
3.7.3	Sistemi non isolati	72
3.7.4	Microfono e altoparlante	73
3.8	Il problema generale dell'elettrostatica del vuoto	73
3.8.1	Risoluzione con le cariche immagine	75
4	Elettrostatica nei mezzi materiali	77
4.1	Dipolo di deformazione	78
4.2	Momento di dipolo medio parallelo	80
4.3	Polarizzazione ed intensità di polarizzazione	82
4.4	Problema generale dell'elettrostatica nei dielettrici	85
4.4.1	Materiali omogenei isotropi	87
4.4.2	Esempi notevoli	89
4.5	Superficie di separazione tra mezzi isolanti	91
4.6	Energia elettrostatica nei mezzi	94
4.7	Materiali non isotropi	95
4.7.1	Materiali piezoelettrici	96
4.8	Modello di Clausius-Mosotti e campo microscopico	97
5	Elettrodinamica	100
5.1	Velocità degli elettroni	100
5.2	Equazione di continuità delle cariche elettriche	103
5.3	Fisica delle correnti continue	105
5.3.1	Prima legge di Kirchhoff	105
5.3.2	Campo elettromotore	106
5.3.3	Conduttori Ohmici, leggi di ohm	107
5.4	Legge di Joule	113
5.5	Conduzione nei liquidi e gas	113
5.5.1	Conduzione nei liquidi	113
5.6	Coduzione nei gas (neon)	115

5.7	Regime quasi-stazionario	116
5.7.1	Circuito RC	117
6	Magnetismo	120
6.1	Effetti del campo magnetico su un circuito	121
6.2	Forza di Lorentz	123
6.2.1	Spettrometro di massa	124
6.2.2	Ciclotrone	126
6.2.3	Altri effetti della forza di Lorentz	126
6.3	Forza di interazione tra circuito e campo magnetico	128
6.4	Campo magnetico generato da un circuito	131
6.4.1	Legge di Biot-Savart	131
6.4.2	Proprietà del campo magnetico (seconda equazione di Maxwell)	133
6.4.3	Campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente	135
6.4.4	Campo magnetico generato da un solenoide percorso da corrente	136
6.4.5	Campo magnetico generato da una singola carica in moto	138
6.5	Teorema della circuitazione di Ampere	139
6.6	Potenziale Magnetico Scalare	142
6.7	Problema generale della magnetostatica	144
6.8	Effetto Hall	145
7	Magnetismo nella materia	148
7.1	Intensità di magnetizzazione	150
7.2	Potenziale vettore e correnti amperiane	151
7.3	Il campo magnetico H	154
7.4	Materiali omogenei isotropi	157
7.4.1	Diamagneti	158
7.4.2	Paramagneti	158
7.4.3	Ferromagneti	158
7.5	Modelli microscopici	160
7.5.1	Correnti di Larmor - Diamagneti	161
7.5.2	Distribuzione di Langevin - Paramagneti	166
7.5.3	Interpretazione di Langevin - Ferromagneti	169
8	Induzione elettromagnetica	174
8.1	Legge di Faraday-Neumann-Lenz	174
8.2	Induzione attraverso la forza di Lorentz	177
8.2.1	Deformazione del circuito	177
8.2.2	Traslazione	178
8.3	Terza equazione di Maxwell	179

8.3.1	Sintesi sulle equazioni di Maxwell	181
8.4	Autoinduzione	182
8.4.1	Esempio - Circuito RL in continua	183
8.4.2	Energia Magnetica autoindotta	184
8.5	Mutua induzione	186
8.5.1	Energia magnetica di mutua induzione	188
8.5.2	Effetto di risucchio o repulsione di un solenoide	190
8.6	Generatori e motori elettrici	192
9	Equazioni di Maxwell	196
9.1	Correnti di spostamento - Quarta equazione di Maxwell	197
9.2	Problema generale dell'elettromagnetismo	200
9.2.1	Passaggio tra materiali, nuove considerazioni	201
9.3	Soluzione del problema generale in mezzi omogenei isotropi	202
9.4	Soluzione in onde piane	204
9.4.1	Studio di Fourier	205
9.4.2	Onde monocromatiche	208
9.4.3	Proprietà delle onde elettromagnetiche	209
9.4.4	Energia del campo elettromagnetico	212
9.4.5	Direzione generica di propagazione	213
9.4.6	Considerazioni finali sulle onde piane	214
9.5	Forno a microonde - onde stazionarie	214
9.6	Soluzione in onde sferiche	216
9.7	Intensità delle onde	218
9.7.1	Densità di energia elettromagnetica - Vettore di Poynting	219
9.8	Impulso del campo elettromagnetico	223
9.8.1	Tensore degli sforzi	224
9.8.2	Pressione elettromagnetica	230
10	Relatività ristretta nell'elettromagnetismo	232
10.1	Potenziali ritardati nell'elettromagnetismo classico	232
10.1.1	Antenna emittente a dipolo oscillante	236
10.2	Trasformazioni di Lorentz	240
10.2.1	Invarianti nello spazio-tempo	242
10.2.2	Notazione covariante e controvariante	243
10.3	Effetto Doppler relativistico	244
10.4	Quadrivettori	246
10.4.1	Geometria tensoriale	248
10.5	Equazione generale dell'elettromagnetismo	251
10.6	Tensore elettromagnetico	253

Capitolo 1

Richiami di analisi vettoriale

Prima di addentrarci nello studio dell'elettromagnetismo, teoria completa e sintetica di tutti gli effetti elettromagnetici, ci concentreremo a riprendere alcuni strumenti matematici di fondamentale importanza per la comprensione del corso.

In elettromagnetismo viene fatto largo uso della teoria dei campi.

Un campo è un ente matematico legato ad una grandezza fisica¹, funzione dello spazio e del tempo.

Un esempio molto semplice di campo è quello della temperatura corporea, che sarà genericamente funzione dello spazio (la posizione in cui mettiamo il termometro), infatti il termometro misurerà temperature diverse se messo in bocca o sotto l'ascella, e del tempo, infatti se ci ammaliamo la temperatura corporea sale.

La temperatura corporea è quindi un campo, genericamente lo scriveremo con $T(x, y, z, t)$. Questo è un campo scalare, caratterizzato da un dominio di definizione, in questo caso la superficie del nostro corpo².

Possiamo anche definire il campo della temperatura della nostra camera. In generale un campo è *scalare* quando la misura non dipende dal particolare sistema di riferimento in cui ci mettiamo. Una generalizzazione diretta sono i campi *vettoriali*. Essi associano alla quaterna dello spazio-tempo una quantità vettoriale.

Di campi vettoriali ne esistono un'infinità, un esempio intuitivo è il campo delle velocità delle particelle di un fluido. Questo può essere indicato con la notazione:

$$\vec{v}(x, y, z, t) = (v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), v_z(x, y, z, t))$$

¹Una grandezza fisica è un ente introdotto sulla base di una procedura di misura, esperimento concettuale.

²Non ha alcun senso parlare della temperatura corporea se non ci mettiamo in un particolare quaterna di coordinate (x, y, z, t) che corrisponde ad un punto giacente sulla superficie del nostro corpo.

Un altro esempio notevole di campo vettoriale è il campo gravitazionale.

1.1 Campo scalare

1.1.1 Graficare un campo scalare

Un primo problema quando si parla di campo riguarda come darne una pratica rappresentazione su di un foglio. Esistono diversi metodi di rappresentazione, per i campi scalari il più comune riguarda le **curve di livello**.

Queste si ottengono fissando la variabile temporale, e imponendo che la funzione sia uguale ad una certa costante, ad esempio, considerando la temperatura della nostra camera, possiamo escludere la dipendenza da z , e vedere come varia in x, y per un fissato tempo t^* .

$$T(x, y, t^*) = cost$$

Per il teorema di Dini, se una delle derivate parziali di T è non nulla in un punto in cui rimane verificata questa uguaglianza, allora questa equazione è grafico di una curva nel piano (x, y) . Possiamo quindi pensare di disegnare tutte le curve con:

$$T(x, y, t^*) = n \cdot c$$

Dove $n \in \mathbb{N}$ e c è una qualunque costante arbitraria. Questo metodo è molto diffuso nelle cartine altimetriche dove vengono rappresentate tutte le curve di livello delle varie altitudini del suolo, o nelle previsioni del tempo, dove vengono presentate le curve di livello della pressione atmosferica.

1.1.2 Gradiente di un campo scalare

Iniziamo a studiare un metodo per caratterizzare la rapidità con cui varia la grandezza di un campo nei vari punti dello spazio.

Per fare ciò immagino di spostarmi tra due punti P_1 e P_2 , che distano tra loro di una quantità infinitesima $d\vec{l}$.

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz) = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Dove abbiamo usato la notazione $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ come versori dello spazio euclideo tridimensionale. Definiamo l'operatore gradiente in questo modo:

Definizione 1.1 (Gradiente) Si definisce **Gradiente** di un campo U la quantità:

$$\vec{grad}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

E si indica con il simbolo $\vec{\nabla}U$.

Se ora facciamo il prodotto scalare tra il gradiente di U e lo spostamento $d\vec{l}$ otteniamo la seguente relazione:

$$\vec{\nabla}U \cdot d\vec{l} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Che altri non è che il differenziale totale della funzione U . Abbiamo quindi ottenuto l'importante equivalenza che:

$$\vec{\nabla}U \cdot d\vec{l} = dU \quad (1.1)$$

Da questa relazione ottengo facilmente un'espressione che mi dice la pendenza della curva lungo una direzione particolare:

$$\frac{dU}{|d\vec{l}|} = |\vec{\nabla}U| \cos \theta$$

Da questa formula si ricavano alcune considerazioni importanti sulla natura geometrica del gradiente. Se scegliamo lo spostamento $d\vec{l}$ lungo una curva di livello sappiamo che la funzione non varia, quindi $dU = 0$. Ma quindi:

$$\frac{dU}{|d\vec{l}|} = 0 \quad \frac{dU}{|d\vec{l}|} = |\vec{\nabla}U| \cos \theta = 0$$

Poiché genericamente il modulo del gradiente sarà diverso da zero, è nullo il coseno di θ . Questo ci dice che il gradiente è sempre rivolto ortogonalmente allo spostamento $d\vec{l}$ (infatti θ è l'angolo tra $d\vec{l}$ e $\vec{\nabla}U$).

Da questa stessa formula risulta che il gradiente è un vettore che indica la massima pendenza del campo, infatti la derivata direzionale, ha un massimo quando θ è nullo, cioè ci spostiamo lungo la direzione del gradiente.

1.2 Campi vettoriali

1.2.1 Campi gradienti

Abbiamo appena definito l'operatore di gradiente, adesso proviamo ad applicare il gradiente ad ogni punto di un campo scalare. Otteniamo un altro campo, ma questa volta vettoriale, con la caratteristica di essere un campo gradiente. Questo particolare tipo di campo viene detto **conservativo**.

Definizione 1.2 (Campo conservativo) *Un campo vettoriale si dice **conservativo** se, e solo se, è generato attraverso l'operatore gradiente da un qualsiasi campo scalare.*

I campi conservativi hanno la notevole proprietà di avere circuitazione nulla, ovvero preso un qualunque percorso per cui mi muovo da un punto P_1 ad un punto P_2 , e poi torno da P_2 a P_1 , il lavoro fatto dal campo è nullo!

$$\oint \vec{\nabla}U \cdot d\vec{l} = 0$$

Questa proprietà si verifica immediatamente:

$$\oint \vec{\nabla}U \cdot d\vec{l} = \oint dU = \int_{P_1}^{P_2} dU + \int_{P_2}^{P_1} dU = U(P_2) - U(P_1) + U(P_1) - U(P_2) = 0$$

1.2.2 Rappresentazione dei campi vettoriali

Rappresentare i campi vettoriali è molto più complesso della rappresentazione dei campi scalari, un metodo molto efficiente per rappresentarli fu introdotto nell'ottocento dal grande fisico Faraday, a cui dobbiamo molti dei successi ottenuti dalla teoria dell'elettromagnetismo.

Per parlare di questa rappresentazione dobbiamo partire dal concetto di **Flusso**

Definizione 1.3 (Flusso) *Si definisce il **Flusso** di un campo \vec{v} lungo la superficie S il valore:*

$$\Phi_s(\vec{v}) = \int_s \vec{v} \cdot \hat{n} ds$$

Dove il versore \hat{n} è sempre il versore normale alla superficie, ed ha un diverso significato a seconda della superficie S che consideriamo.

S può essere infatti aperta o chiusa. Se S è aperta, è dotata di bordo. Allora si stabilisce per convenzione che il verso di \hat{n} sia quello che va verso l'osservatore del bordo che vede la percorrenza in senso antiorario; ossia stabilito un verso di percorrenza del bordo, \hat{n} è quel vettore che è diretto verso un osservatore posto dal lato del bordo in cui il verso di percorrenza scelto risulta essere quello antiorario³.

Se S è una superficie chiusa, non è dotata di bordo, in questo caso si sceglie per convenzione il verso di \hat{n} come quello uscente dalla superficie chiusa.

Torniamo alla rappresentazione di Faraday, Immaginiamo di prendere molte superfici e in ogniuna di queste disegniamo un numero di frecce che indicano la direzione modulo e verso del campo proporzionalmente al flusso del campo lungo quella superficie, otteniamo così un diagramma che ci permette di avere una idea chiara del flusso, e mette in evidenza alcuni punti critici del flusso, come sorgenti positive (da cui le linee di flusso divergono) e le sorgenti negative (a cui le linee di flusso convergono).

Un metodo alternativo per rappresentare graficamente i campi vettoriali avviene attraverso il tracciato delle cosiddette linee di forza, che sono linee rispetto alle quali i vettori del campo sono sempre tangenti. Anche in questo modo è molto facile riconoscere le sorgenti positive e sorgenti negative.

Esiste una procedura operativa molto semplice che consente di capire se è presente in un punto una sorgente positiva.

³Ricordiamo che se cambiamo il verso da cui si osservano le lancette dell'orologio, ci sembrerà che queste si muovano in senso antiorario anziché orario.

1.2.3 Divergenza

Guardiamo ora un esempio tipico di flusso con sorgenti positive e sorgenti negative, tipo quello mostrato in Figura 1.1

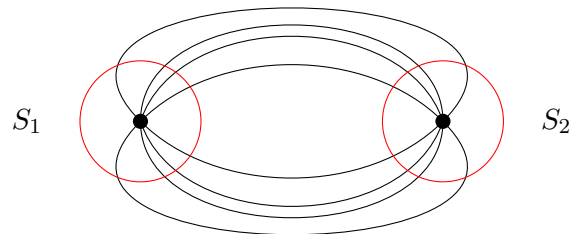


Figura 1.1: Grafico fatto usando le linee di forza di un campo vettoriale con due sorgenti, S_1 e S_2 , in rosso sono mostrate due superfici qualunque chiuse attorno a queste sorgenti, la loro caratteristica è quella che il flusso del campo passante attraverso queste superfici non è mai nullo.

Come si vede dalla figura, possiamo definire una sorgente come un punto in cui prendendo una qualsiasi superficie infinitesima chiusa attorno a quel punto, il flusso lungo questa superficie del campo è diverso da zero.

In particolare definendo una quantità ad hoc, la **divergenza** notiamo interessanti cose.

Definizione 1.4 (Divergenza) Definiamo la divergenza di un campo vettoriale $\vec{v}(x, y, z)$ come la quantità:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Può essere scritta sintatticamente come:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Esiste un teorema molto utile, che viene dimostrato nei corsi di analisi vettoriale⁴, detto Teorema della divergenza, che afferma che:

Dato comunque una superficie chiusa S_c il flusso del campo vettoriale lungo questa superficie chiusa può essere calcolato attraverso l'integrale di volume della divergenza del campo, all'interno del volume rinchiuso dalla superficie.

$$\Phi_{S_c}(\vec{v}) = \int_{S_c} \vec{v} \cdot \hat{n} ds = \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV \quad (1.2)$$

Introduciamo ora un importante altro concetto: il **tubo di flusso**.

Definizione 1.5 (Tubo di flusso) *Si definisce **tubo di flusso** tutte le linee di forza di un campo vettoriale che passano attraverso i punti di una qualsiasi curva chiusa.*

Questa definizione è identica a quella data nel corso di meccanica, riguardo al campo di velocità delle molecole di un fluido. Possiamo estendere questa definizione a tutti i campi vettoriali.

È facile accorgersi che il flusso del campo calcolato attraverso la superficie di un qualunque tubo di flusso è sempre nulla, poiché il campo è diretto parallelamente alle linee di forza, e quindi parallelamente alle pareti del tubo.

Se un campo vettoriale ha la caratteristica di avere divergenza nulla ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) il flusso lungo qualunque superficie chiusa sarà zero. Scegliamo ora la superficie del tubo di flusso e chiudiamola da due superfici tagliate in due punti diversi. Comunque prendiamo queste superfici il flusso del campo attraverso queste superfici deve essere l'una l'opposto dell'altra, poiché la loro somma (e quella della superficie del tubo) deve annullarsi. Pertanto tante linee di forza entreranno quante ne usciranno, non creando accumulazioni all'interno.

Un campo dotato di questa proprietà viene detto **Solenoidale**.

Definizione 1.6 (Campo Solenoidale) *Un campo vettoriale si dice **Solenoidale** quando la divergenza è nulla in ogni punto, ossia il flusso calcolato lungo qualunque superficie chiusa è nullo*

Si nota immediatamente l'analogia con i campi conservativi.

⁴La dimostrazione del teorema è molto semplice, consiste nell'impiegare sapientemente il teorema di Gauss-Green.

1.2.4 Proprietà della divergenza

Analizziamo subito alcuni calcoli sulla divergenza che verranno utilizzati nel corso di queste dispense:

Teorema 1.1 (Divergenza del prodotto vettoriale)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

Dimostrazione:

Sia $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, calcoliamo la divergenza di \vec{c} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{c} = \frac{\partial}{\partial x} c_x + \frac{\partial}{\partial y} c_y + \frac{\partial}{\partial z} c_z$$

Ricordiamo la definizione di prodotto vettoriale:

$$\vec{c} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

$$c_x = a_y b_z - b_y a_z \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z \quad c_z = a_x b_y - b_x a_y$$

Per semplicità isoliamo dal calcolo della divergenza solo il contributo delle derivate fatte rispetto a x

$$\frac{\partial}{\partial x} c_x = \frac{\partial a_y}{\partial x} b_z + \frac{\partial b_z}{\partial x} a_y - \frac{\partial a_z}{\partial x} b_y - \frac{\partial b_y}{\partial x} a_z$$

Le altre componenti della divergenza di \vec{c} sono analogamente calcolabili. Vediamo per convincerci del teorema a cosa è uguale il membro di destra:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

Anche qui per semplicità isoliamo solo i termini che hanno derivate in x (in modo da confrontare con l'altra espressione) Il primo termine è il rotore di \vec{a} , :

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}$$

Svolgendo solo le derivate in x otteniamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = -\frac{\partial a_z}{\partial x} \hat{j} + \frac{\partial a_y}{\partial x} \hat{k} + \dots$$

Facciamo il prodotto scalare per \vec{b}

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -b_y \frac{\partial a_z}{\partial x} + b_z \frac{\partial a_y}{\partial x} + \dots$$

Analogamente calcoliamo il secondo membro:

$$\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = -a_y \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_z \frac{\partial b_y}{\partial x} + \dots$$

Mettiamo insieme e otteniamo:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = -b_y \frac{\partial a_z}{\partial x} + b_z \frac{\partial a_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial x} - a_z \frac{\partial b_y}{\partial x}$$

Che è esattamente quanto trovato per la divergenza di \vec{c} .

1.3 Rotore

Un altro operatore differenziale che può essere utile ricordare è il rotore.

Definizione 1.7 (Rotore) Si definisce la grandezza **rotore** un vettore ottenuto dal campo vettoriale \vec{v} in questo modo:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \\ \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \hat{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Anche per il rotore, come per la divergenza, esiste una utilissima formula per semplificare il calcolo del lavoro lungo un percorso. In particolare sia S una qualunque superficie con bordo \mathcal{L} vale che:

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (1.3)$$

Si vede immediatamente che la caratteristica di un campo di possedere un rotore nullo è analoga a quella divergenza, infatti se il rotore di un campo è nullo è nullo anche la circuitazione calcolata lungo qualunque percorso, e vice versa.

Da questo deduciamo un'altra condizione necessaria⁵ alla conservatività di un campo vettoriale.

Un campo conservativo è per questo detto *irrotazionale*.

⁵La sufficienza si ha nei campi definiti in un dominio semplicemente connesso, o in qualunque sottoinsieme del dominio semplicemente connesso

1.3.1 Campo gravitazionale

Un esempio immediato di campo contemporaneamente solenoidale e irrotazionale è il campo gravitazionale. Per definirlo prendiamo la funzione scalare seguente:

$$U = \frac{1}{|\vec{r}|} \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

Generiamo da U un campo attraverso l'operazione di gradiente (che quindi risulta conservativo).

$$\vec{\nabla}U = \frac{dU}{d|\vec{r}|} \nabla|\vec{r}|$$

Questa formula si ottiene usando la regola di derivazione delle funzioni composte, si verifica immediatamente che

$$\vec{\nabla}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$$

Da cui otteniamo il nostro campo \vec{v} :

$$\vec{v} = \vec{\nabla}U = -\frac{1}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

$$\vec{v} = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Che il campo sia irrotazionale è ovvio, poiché l'abbiamo dedotto attraverso l'operatore di gradiente da un campo scalare, bisogna verificare se è solenoidale, basta derivare banalmente per calcolare la divergenza:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

Siccome le altre derivate sono simmetriche a questa calcoliamo direttamente la divergenza, mettendo $|\vec{r}|$ in evidenza:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{|\vec{r}|^2 - 3x^2}{|\vec{r}|^5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{3|\vec{r}|^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{|\vec{r}|^5} = -\frac{3|\vec{r}|^2 - 3|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} = 0$$

Come risulta evidente il campo è anche solenoidale.

1.4 Coordinate sferiche e angolo solido

Giacchè rivestiranno un ruolo importante sia per la comprensione di molti argomenti che tratteremo sia per la risoluzione degli esercizi, introduciamo le coordinate sferiche e il concetto di angolo solido, naturali generalizzazioni delle coordinate polari e dell'angolo dal piano allo spazio. Preso un punto $(x, y, z) \in R^3$ possiamo considerare il vettore dall'origine al punto in questione, il quale sarà definito univocamente una volta fissato modulo o direzione e verso. Per il modulo definiamo una variabile r , per direzione e verso due angoli ϕ e θ , il primo tra l'asse z e il vettore, il secondo fra l'asse x e la proiezione di r sul piano xy , come in figura 1.2.

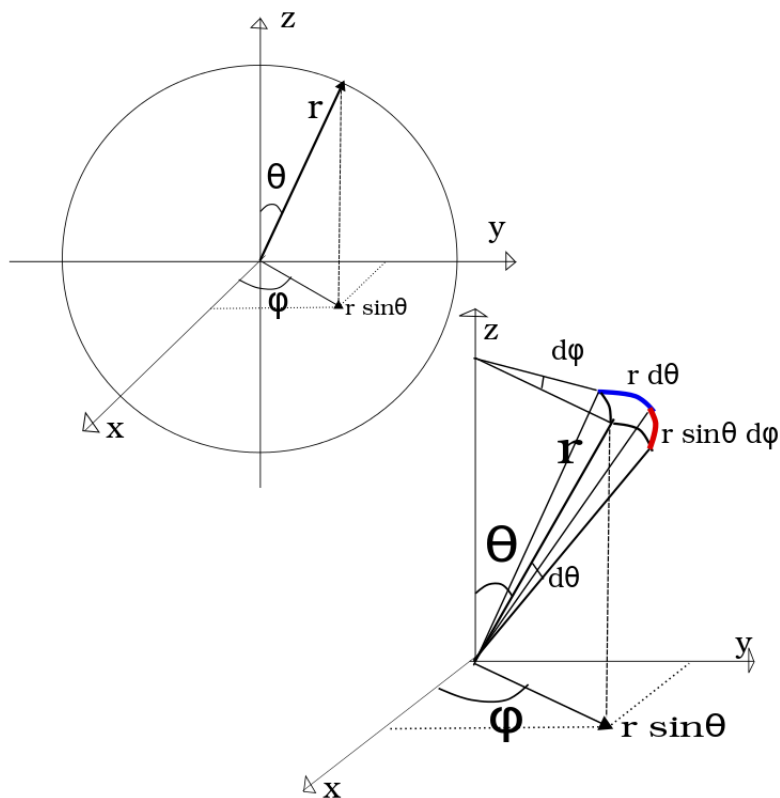


Figura 1.2: Rappresentazione in coordinate sferiche

Vogliamo trovare una relazione che permetta di passare dalle coordinate cartesiane a quelle sferiche, molto semplicemente usando la trigonometria vediamo che:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Ora per rendere univocamente determinato il cambio di coordinate dobbiamo porre:

- $r \in [0, +\infty)$
- $\phi \in [0, \pi]$
- $\theta \in [0, 2\pi)$

Ora usando queste nuove coordinate si può facilmente esprimere un elementino di superficie dS o di volume $d\tau$, infatti come si può vedere $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ (i lati del 'quadrato' in blu e rosso moltiplicati fra loro), il volume si ottiene moltiplicando per l'incremento dr del raggio ,

$$d\tau = dS \cdot dr = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

Ora un'altra estensione da R^2 a R^3 è quella degli angoli, infatti se prendiamo una circonferenza di raggio r , tracciamo due semirette con origine nel centro O della circonferenza e chiamiamo A e B i punti di intersezione tra le semirette e la circonferenza definiamo l'angolo $A\hat{O}B = \alpha = \frac{AB}{r}$ e quindi l'angolo infinitesimo sarà, se chiamiamo $AB=l$, $d\alpha = \frac{dl}{r}$. Se al posto della circonferenza prendiamo una sfera e al posto delle rette un cono con vertice nell'origine, che interseca la sfera delimitando una superficie S ,

Definizione 1.8 (Angolo solido) *Si definisce angolo solido Ω e si misura in steradiani, la quantità:*

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

Da cui segue che l'angolo solido infinitesimo è $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$

Se prendiamo il dS calcolato precedentemente abbiamo:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

1.4.1 Operatori differenziali in coordinate sferiche

È possibile a partire dalla definizione di angolo solido, definire l'operatore gradiente di un campo in coordinate sferiche: Data una funzione scalare $V(\rho, \theta, \varphi)$, come mi calcolo il gradiente di questa funzione?

Sfruttiamo l'equazione 1.1 per ricavare il gradiente della funzione. Riprendiamo l'operazione fatta precedentemente per calcolare il volumetto $d\tau$, ossia moltiplicare tre spostamenti ortogonali tra loro. Componendo questi tre spostamenti infinitesimi in un unico spostamento $d\vec{l}$ otteniamo:

$$d\vec{l} = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi)$$

Per cui:

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = \left(\vec{\nabla} V\right)_r dr + \left(\vec{\nabla} V\right)_\theta r d\theta + \left(\vec{\nabla} V\right)_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi$$

Da cui otteniamo l'espressione del gradiente in coordinate sferiche.

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} V)_r = \frac{\partial V}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} V)_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{r} \\ (\vec{\nabla} V)_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \end{cases} \quad (1.4)$$

Possiamo scrivere tutti gli altri operatori applicando lo stesso ragionamento nelle coordinate sferiche:

Rotore

Scriviamo l'operatore rotore in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{a} &= \frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\theta) \right] + \\ &+ \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (a_\varphi r \sin \theta) \right] + \\ &+ \frac{\hat{\varphi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Laplaciano

L'operatore laplaciano $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot f) \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Capitolo 2

Elettrostatica

Iniziamo lo studio dell'elettromagnetismo con un esperimento. Immaginiamo di appendere una pallina da ping-pong ad un filo abbastanza lungo, cospargere questa pallina con della grafite.

Prendiamo ora una bacchetta in Plexiglas e strofiniamola con della carta energeticamente. A questo punto avviciniamo la bacchetta alla pallina senza metterle a contatto, osserviamo che la pallina è attratta, anche se di pochissimo, dalla bacchetta.

L'effetto più eclatante si ottiene invece mettendo la pallina e bacchetta a contatto. A questo punto si osserva una forte repulsione tra bacchetta e pallina, tanto che riusciamo tranquillamente a mettere in moto il pendolo, anche con grande ampiezza semplicemente agitando con intelligenza la bacchetta.

A questo punto prendiamo un'altra bacchetta in PVC, e ripetiamo su questa l'operazione di strofinio. Osserviamo che a questo punto si verifica invece il fenomeno di attrazione. La pallina viene attratta dalla bacchetta fin quando non vi entra in contatto.

Se a questo punto riprendiamo la bacchetta in plexiglas si nota che la pallina è attratta di nuovo, anziché essere respinta. Da questo bizzarro esperimento possiamo dedurre alcune delle proprietà fondamentali dell'elettrostatica.

2.1 La carica elettrica

Per spiegare il comportamento della pallina nell'esperimento mostrato bisogna teorizzare un modello. Sembra che la bacchetta di plexiglas, una volta strofinata, acquisisca una proprietà, che trasferisce alla pallina per contatto. E che due corpi che possiedono la stessa proprietà sono soggetti ad una forza di tipo repulsivo.

Chiamiamo **carica elettrica** questa proprietà, e assegnamo il segno + a quella del plexiglas, per convenzione.

Il PVC, sottoposto allo strofinio, acquisisce una carica differente a quella del plexiglas (che chiamiamo di segno -, sempre per convenzione), supponiamo dunque che due corpi di carica differente si attraggono. Abbiamo ora definito in termini molto qualitativi le basi del nostro modello, vediamo se riusciamo con queste a spiegare il resto dell'esperimento.

Mettiamo a contatto il PVC con la pallina, la carica negativa si trasferisce alla pallina, che quindi diviene carica negativamente. Avvicinando il Plexiglas (che è rimasto carico positivamente) la pallina dovrebbe essere attratta, come di fatto abbiamo osservato.

Chiaramente il concetto di carica elettrica rimane non ben definito fin quando non inventiamo un procedimento operativo per effettuare una misura.

Per misurare la carica quindi invento uno strumento che sfrutta queste proprietà che abbiamo osservato. Immaginiamo di collegare alla nostra pallina due lembi di alluminio. Una volta che la pallina si carica, per contatto con i lembi di alluminio trasferirà la sua carica anche ai due lembi.

Poiché i due lembi si caricano dello stesso segno, si respingeranno, aprendosi in un angolo α , che può essere misurato con una scala graduata.

Abbiamo quindi trovato un modo operativo di misurare la carica elettrica di un corpo, attraverso uno strumento detto **elettroscopio** (vedi Figura 2.1).

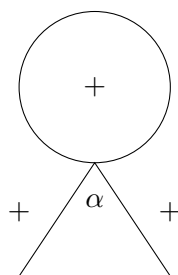


Figura 2.1: Elettroscopio in azione, la carica presente nella pallina si distribuisce anche alle foglie d'alluminio, che si respingono, formando tra di loro un angolo α . Dalla misura di α si ha una stima della forza di repulsione tra le foglie, e di conseguenza della carica. Questo elettroscopio è pertanto detto elettroscopio a foglie.

Grazie all'elettroscopio a foglie è possibile dimostrare che se abbiamo due palline, di cui inizialmente una sola è carica, e di cui l'angolo delle foglie dell'elettroscopio è 2α , dopo averle messe a contatto osserviamo che entrambi gli elettroscopi segnano un angolo di α . Quindi deduciamo che la carica si è distribuita sulle due palline ugualmente.

Un teorema empirico che viene da queste osservazioni può essere enunciato:

La somma algebrica delle cariche è una quantità conservata

2.2 La legge di Coulomb

Uno strumento efficace per misurare la forza attrattiva o repulsiva è il pendolo di torsione. Questo funziona sospendendo una sbarretta orizzontalmente, sostenuta da un filo, e appiccicando alle estremità della sbarretta due cariche elettriche. Studiando il moto rotativo del pendolo quando viene accostata al sistema una carica nota, il fisico Coulomb ha potuto studiare l'andamento della forza.

Coulomb ha osservato che il modulo della forza è proporzionale al prodotto delle cariche

$$F \propto Qq$$

Ripetendo la misura allontanando pian piano la carica ha visto che l'andamento della forza in funzione della distanza dipendeva in realtà dalla particolare geometria dei corpi.

Però ha osservato che allontanando sempre di più gli oggetti arrivava ad ottenere un comportamento simile a tutti. Egli dedusse perciò che nel limite in cui le dimensioni dell'oggetto siano trascurabili rispetto alla distanza delle cariche tutti gli oggetti si comportassero allo stesso modo.

Dedusse quindi una legge nel limite di cariche puntiformi¹.

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Usando quindi ora una costante di proporzionalità k dedusse che:

$$F = k \frac{Qq}{r^2} \quad (r \gg l)$$

Dove l è la lunghezza del corpo, ed r la distanza tra Q e q .

Ma la forza è un vettore, noi abbiamo dato ora informazione sul modulo. Abbiamo già notato che se le cariche sono di segno opposto la forza è di tipo attrattivo, e vice versa. Come per la forza di gravità per il principio di azione reazione una carica esercita una forza su una e l'altra ne esercita una uguale e contraria. Questa forza è diretta lungo la congiungente delle due cariche (Figura 2.2).

$$\vec{F} = k \frac{Q_+ q_-}{r^2} \hat{r}$$

Ora abbiamo specificato anche la direzione, manca il segno, scegliendo di adottare la convenzione che $q_- = -q$ e che $Q_+ = Q$:

$$\vec{F} = -k \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$$

A questo punto dobbiamo stabilire bene il verso di \hat{r} . Mettiamoci nella condizione di trovare la forza che viene esercitata su q . Chiamiamo quindi

¹in cui la distanza tra le cariche è molto maggiore delle dimensioni degli oggetti carichi

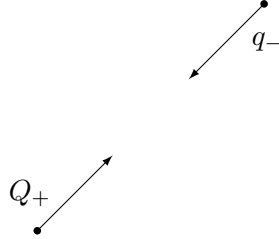


Figura 2.2: Le due cariche Q_+ e Q_- si attraggono con forza \vec{F} diretta lungo la congiungente delle forze, e il cui verso dipende dal segno delle cariche.

questa la carica **passiva**, poiché subisce la forza, mentre Q si dice carica **attiva**, perché esercita la forza².

Dunque il versore \hat{r} lo definisco come il versore che parte dalla carica *attiva* e termina sulla carica *passiva*. In queste condizioni la formula di Coulomb diventa:

$$\vec{F}_q = -k \frac{Qq}{r^2} \hat{r}_{Q \rightarrow q} \quad (2.1)$$

2.2.1 Istantaneità della forza elettrostatica

Classicamente si pensava che l'azione della forza elettrostatica fosse immediata, ossia che ponendo una carica in una posizione P_1 , istantaneamente la carica di prova risentisse della presenza della carica in P_1 .

In realtà questo non può chiaramente essere vero, perché violerebbe la relatività ristretta di Einstein secondo cui due eventi che distano tra loro di un vettore di tipo spazio non possono essere correlati, e se non ci fosse un piccolo intervallo di tempo tra il momento in cui noi mettiamo la carica in P_1 e quello in cui la nostra carica di prova subisce la forza coulombiana da parte di quella carica in un altro punto generico dello spazio, la distanza tra questi eventi nello spazio-tempo sarebbe data solo dalle coordinate spaziali, e non quelle temporali, rappresentando quindi proprio un vettore di tipo spazio.

Per risolvere questo paradosso si è supposto che nel momento in cui mettiamo la nostra carica in P_1 essa *genera un campo elettrico*³ che inizia

²Nota bene, che sia q che Q sono contemporaneamente sia cariche attive che passive, quando però noi vogliamo solo considerare la forza esercitata su di una carica, facciamo questa distinzione, dal carattere più filosofico che fisico, che sarà però utile per definire il concetto di Campo elettrico.

³Torneremo tra poco su questo concetto, nella sezione 2.3.

a modificare lo spazio, partendo da P_1 e diffondendosi in tutte le direzioni con velocità c (se ci troviamo nel vuoto). Questo risultato è stato verificato sperimentalmente.

2.2.2 Il coulomb e la costante dielettrica nel vuoto

Come ci mostra la formula (2.1) la forza è determinata a meno di una costante di proporsionalità k . Se ci mettiamo nel sistema internazionale k possiamo definire l'unità di misura di k a partire dalla formula, dobbiamo però prima introdurre una unità di misura della carica. Questa è il **Coulomb**, indicato con il simbolo C .

Ancora non diamo la definizione definitiva di *coulomb* (rimandata alla sezione 5.1, definizione 5.2). Basti sapere che, fissato k pari a:

$$k = 8.99 \cdot 10^9 \frac{N m^2}{C^2}$$

Il Coulomb è quell'unità tale che, se poniamo due cariche da 1 C l'una a distanza di un metro, esse esercitano tra loro una forza pari $8.99 \cdot 10^9 N$.

Risulta subito evidente che, poste queste unità di misura, la forza elettrostatica è molto più potente di quella gravitazionale!

Molto spesso si preferisce dare a k un valore più comodo, il cui scopo sarà mostrato in seguito. Basta definire un'altra costante ε_0 detta costante dielettrica del vuoto e esprimere k in funzione di questa costante.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Facendo un po' di conti possiamo trovare quanto vale ε_0

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2}$$

2.3 Il campo elettrico

Immaginiamo di avere due cariche: Q e q .

Mettiamo la carica Q in un punto dello spazio P_1 , in qualunque altro punto P generico in qui metto q , questa carica risentirà della presenza di Q in P_1 subendo una forza che posso misurare.

Questo mi dice che posso creare una funzione vettoriale dello spazio che mi indica modulo, direzione e verso della forza che subirà q per opera di Q se posta in quel punto.

Genericamente questa funzione dipenderà da q , per eliminare questa dipendenza posso definire una quantità chiamata **campo elettrico** in questo modo:

Definizione 2.1 (Campo Elettrico) *Definisco **campo elettrico** la funzione vettoriale dello spazio \vec{E}_0 come la forza che subisce una carica di prova q^+ (scelta per convenzione positiva) posta in un punto dello spazio diviso la carica di prova stessa.*

$$\vec{E}_o(x, y, z) = \frac{\vec{F}(x, y, z, q)}{q^+}$$

Il campo elettrico si misura in N/C.

Nel caso di un campo elettrico generato da una carica Q puntiforme abbiamo:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Il campo elettrico generato da due cariche può essere scritto:

$$\vec{E}_0^t = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{q} = \frac{\vec{F}_1}{q} + \frac{\vec{F}_2}{q} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Da cui il campo elettrico generato da due (o più) cariche è la somma vettoriale dei campi generato dalle singole cariche, questa definizione si può chiaramente estendere al continuo, come vedremo in seguito.

2.3.1 Campo elettrico di un dipolo

Cerchiamo di studiare il campo elettrico generato da un dipolo, come nello schemetto in Figura 2.3.

Chiamiamo P_1 e P_2 i punti dove si trovano rispettivamente le cariche $+q$ e $-q$.

$$P_1 = \left(0, 0, \frac{d}{2}\right) \quad P_2 = \left(0, 0, -\frac{d}{2}\right) \quad P = (0, R, 0)$$

$$\vec{E}_o^t = \vec{E}_o^{(1)} + \vec{E}_o^{(2)}$$

$$\vec{E}_o^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+q}{R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \frac{\overrightarrow{P_1P}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$\vec{E}_o^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \frac{\overrightarrow{P_2P}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$\vec{E}_o^t = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left[R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left(\overrightarrow{P_1P} - \overrightarrow{P_2P}\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P} = \left(0, R, -\frac{d}{2}\right) \quad \overrightarrow{P_2P} = \left(0, R, \frac{d}{2}\right)$$

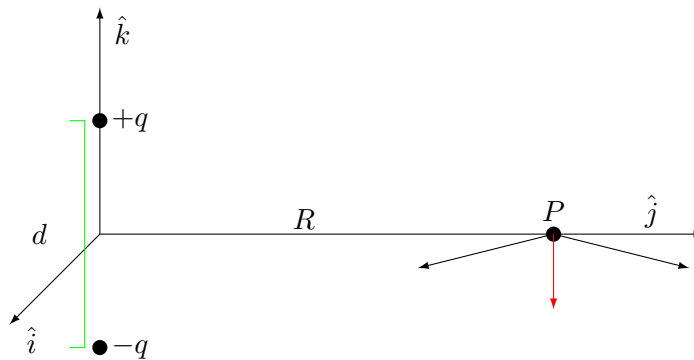


Figura 2.3: Schema grafico del dipolo: due cariche di pari modulo q ma segno opposto poste tra loro ad una distanza d , vogliamo calcolare il campo elettrico che agisce su un punto P posto lungo il piano perpendicolare alla congiungente delle cariche ad una distanza R dal centro del dipolo.

$$\left(\overrightarrow{P_1P} - \overrightarrow{P_2P} \right) = (0, 0, -d)$$

Questo ci dice che il campo elettrico è diretto solo lungo l'asse del versore \hat{k} , e verso il basso, come del resto si poteva intuire graficamente:

$$\vec{E}_o^t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Qd}{\left[R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

Le linee di forza di questo campo elettrico sono simili a quelle mostrate in Figura 1.1.

Definizione 2.2 (Momento del dipolo elettrico) Definiamo **momento del dipolo elettrico** la grandezza vettoriale \vec{p} data dal prodotto tra il valore assoluto di una delle due cariche q del dipolo⁴ e la distanza \vec{d} tra le due cariche:

$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

La direzione del momento è per convenzione quella che va dalla carica negativa a quella positiva.

Alla luce di questa definizione possiamo riscrivere il valore del modulo del campo elettrico totale nell'ipotesi in cui $d \ll R$, in questo caso abbiamo che:

$$E_o^t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{R^3}$$

⁴Le due cariche del dipolo devono essere in modulo uguali.

Come si vede questo campo elettrico diminuisce con un fattore R^3 , anche a distanze R molto grandi. Sembra violare la legge di Coulomb, che dice che una qualunque carica, quando la distanza è molto maggiore della lunghezza propria della carica, genera un campo elettrico che va come R^{-2} .

In realtà il dipolo non è una carica, né una distribuzione particolare di carica, poiché la somma totale della carica è nulla. Inoltre la direzione del campo elettrico infatti non punta alla carica, ma parallelamente al dipolo.

Il calcolo generico del campo elettrico del dipolo è affrontato nella sezione (2.6.1).

2.3.2 Distribuzioni di cariche nel continuo

Abbiamo già visto che il campo elettrico di un sistema a due cariche si ottiene sommando vettorialmente i campi elettrici generati dalla singola carica. Questo concetto può essere banalmente esteso a più cariche nel seguente modo:

$$\vec{E}_o^t = \sum_{i=1}^n \vec{E}_0^{(i)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.2)$$

Anche se immaginiamo che le cariche siano portate da particelle puntiformi, dette protoni ed elettroni, le loro dimensioni sono così piccole rispetto al mondo macroscopico che la fisica classica si pone di studiare che risulta conveniente immaginare che in un corpo macroscopico la distribuzione di carica goda della proprietà di continuità.

Per questo intendiamo dire che è possibile definire una funzione ρ dello spazio che ci da un'informazione di quanta carica è presente in un certo volume di materia, e comunque piccolo scegliamo questo volume, ci troviamo di fronte a funzioni continue.

Si definiscono quindi tre funzioni, dette funzioni di densità di carica o di distribuzione di carica nel seguente modo⁵:

$$\rho = \frac{dQ}{d\tau} \quad \sigma = \frac{dQ}{dS} \quad \lambda = \frac{dQ}{dl}$$

Dove ρ è detta *densità volumica di carica* e indica la carica sull'unità di volume. σ è la *densità superficiale di carica*, indica la carica sull'unità di superficie, e λ è la *densità lineare di carica*, indica la carica sull'unità di lunghezza.

Con queste definizioni possiamo generalizzare la (2.2):

$$\vec{E}_o^t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \overbrace{\frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}^{dQ} \overbrace{dx' dy' dz'}^{d\tau} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.3)$$

⁵Il valore $d\tau$ indica un volume, per non confonderlo con il potenziale, grandezza che sarà introdotta a breve.

Dove il termine \vec{r} indica la posizione della carica dQ , per cui dobbiamo integrare al variare di questo fattore, il termine \vec{r} è invece costante, e indica la posizione del punto in cui vogliamo calcolare il campo elettrico.

2.3.3 Campo elettrico di un filo infinito

Vediamo di sfruttare immediatamente la formula appena ricavata (2.3) nel caso però di un filo infinito con distribuzione di carica lineare λ assunta per semplicità costante.

Osserviamo anzitutto che un oggetto del genere gode di alcune interessanti proprietà di simmetria, una simmetria rotazionale per cui se facciamo girare il filo intorno a se stesso il sistema rimane nelle stesse condizioni iniziali. Da questa proprietà deduciamo che l'intensità del campo elettrico dipende solo dalla distanza dal filo, non dalla sua orientazione, e la sua direzione non può avere componenti lungo la circonferenza di rotazione attorno al filo⁶

Un'altra simmetria è quella speculare, ossia tagliando il filo con qualunque piano ortogonale dividiamo sempre il filo a metà. Questo ci dice che la direzione del campo deve essere diretta lungo questo piano di simmetria⁷.

Combinando le due simmetrie riusciamo a dedurre che la direzione del campo elettrico è ortogonale al filo (Figura 2.4).

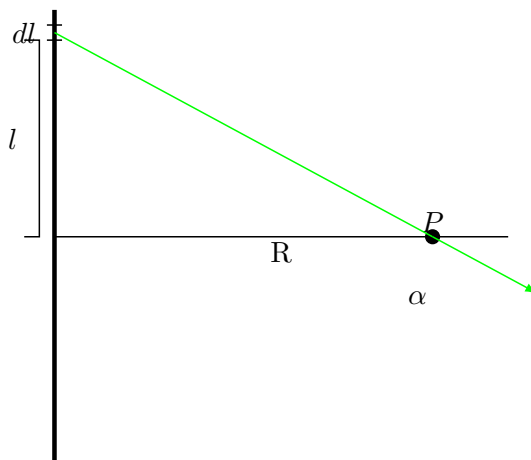


Figura 2.4: Filo infinito uniformemente carico, vogliamo trovare il campo elettrico in P dovuto all'elementino di carica $dq = \lambda dl$.

⁶Altrimenti con una rotazione faremo variare la direzione del campo elettrico, mantenendo il sistema nella stessa condizione iniziale.

⁷Altrimenti capovolgendo il filo avremo un campo elettrico con una direzione differente, pur mantenendo inalterato lo stato del sistema.

Passiamo ora al calcolo del campo elettrico nel punto P :

$$E_o^t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dl \cos \alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Notiamo con un po' di trigonometria che:

$$l = R \tan \alpha \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{R}{\cos \alpha}$$

Notiamo che conviene esprimere tutto in funzione di α , differenziamo l :

$$dl = R \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Per indicare l'intero filo in funzione di α scriviamo:

$$l \rightarrow \infty \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} R \tan \alpha = \infty$$

$$l \rightarrow -\infty \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} R \tan \alpha = -\infty$$

$$E_o^t = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} \cos \alpha \cdot \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$E_o^t = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha d\alpha}{R}$$

R è una costante, risolviamo l'integrale del coseno di α , che è banale e otteniamo un fattore 2:

$$E_o^t = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Abbiamo ottenuto un andamento del campo che va come R^{-1} , questo risultato sembra violare la legge di Coulomb⁸. In realtà non è così perché noi abbiamo risolto l'esercizio usando un'astrazione matematica, quello del filo infinito. Questa approssimazione ha un significato fisico quando la distanza dal filo è molto minore della lunghezza totale del filo. Per cui la soluzione che abbiamo trovato non vale più quando ci allontaniamo dal filo di distanze paragonabili o superiori alla lunghezza del filo. La legge di Coulomb invece vale quando la distanza dal filo è molto maggiore della lunghezza del filo. Per cui i due andamenti, apparentemente incompatibili, sono in realtà due approssimazioni, una valida per distanze molto piccole rispetto a l , e l'altra per distanze molto grandi.

⁸La legge di Coulomb dice che qualunque oggetto dotato di una carica genera un campo elettrico che nel limite di distanze molto grandi diminuisce con R^{-2} .

2.3.4 Campo elettrico di un piano uniforme

Iniziamo a calcolare il campo elettrico generato da un piano uniforme, con distribuzione di carica superficiale σ che supponiamo uniforme su tutto il piano.

Anche questo sistema è dotato di diverse simmetrie. Presa una qualunque retta che attraversa ortogonalmente il piano ruotando il sistema attorno a quella retta c'è simmetria. Questo vuol dire che la direzione del campo elettrico è diretta lungo questa retta, e si comporta da un lato del piano esattamente allo stesso modo speculare dall'altro.

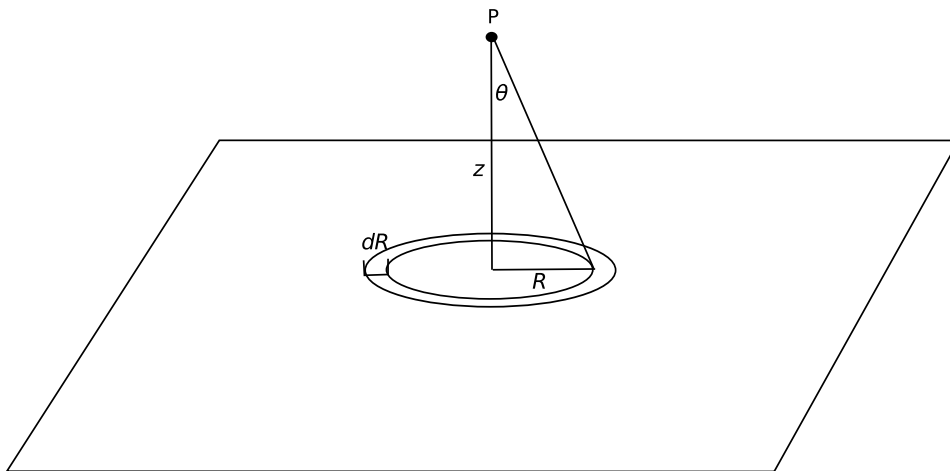


Figura 2.5: Piano infinito dotato di carica, suddividiamo il piano in anelli, ogni anello da un contributo al campo in P .

Possiamo immaginare di dividere tutto il piano in anelli (Figura 2.5), ognuno dei quali ha una carica dQ pari a:

$$dQ = \sigma R dR d\varphi$$

Integrando su tutto l'anello

$$dQ = 2\pi R \sigma dR$$

A questo punto possiamo passare al calcolo del campo elettrico (ricordando di prendere solo la componente verticale):

$$dE_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{(R^2 + z^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R \sigma dR}{(R^2 + z^2)} \cos\theta$$

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{2\pi R \sigma dR}{(R^2 + z^2)} \cos\theta$$

Per procedere all'integrazione notiamo subito che z è una costante, possiamo esprimere qualcosa in funzione di θ .

$$\sqrt{R^2 + z^2} = \frac{z}{\cos \theta} \quad R = z \tan \theta$$

Differenziamo R e otteniamo:

$$dR = z \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Torniamo al calcolo del campo, ricordando che θ va calcolato da 0 a $\pi/2$:

$$E_o = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{z \tan \theta z \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta}{\left(\frac{z}{\cos \theta}\right)^2} \cos \theta$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos \theta \tan \theta}_{\sin \theta} d\theta$$

Ma l'integrale del seno di θ tra 0 e $\pi/2$ è 1, per cui:

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Abbiamo ottenuto un risultato apparentemente incredibile, il campo elettrico di un piano infinito apparentemente non dipende dalla distanza dal piano ma è uniforme! Anche in questo caso la violazione della legge di Coulomb è solo apparente, poiché questo risultato per piani ad estensione finita (tutti i piani che esistono nella realtà) ha un significato fisico solo nell'ipotesi in cui la distanza dal piano è molto minore della dimensione lineare del piano stesso!

Inoltre questo risultato sembra possedere una discontinuità, poiché il campo elettrico in modulo è costante e sempre diverso da zero, ma da una parte all'altra del piano per simmetria il verso deve cambiare, quindi c'è una discontinuità del campo sopra e sotto il piano!

2.4 Il teorema di Gauss

Teorema 2.1 (di Gauss) *Il flusso totale uscente di un campo elettrico E_0 da una superficie chiusa dipende solo dalle cariche interne alla superficie e vale:*

$$\Phi(\vec{E}_0) = \frac{Q_{tot}^{int}}{\epsilon_0}$$

Dim:

Per dimostrare il teorema prendiamo una superficie chiusa avente al suo interno una carica puntiforme q e consideriamo un angolo solido infinitesimo

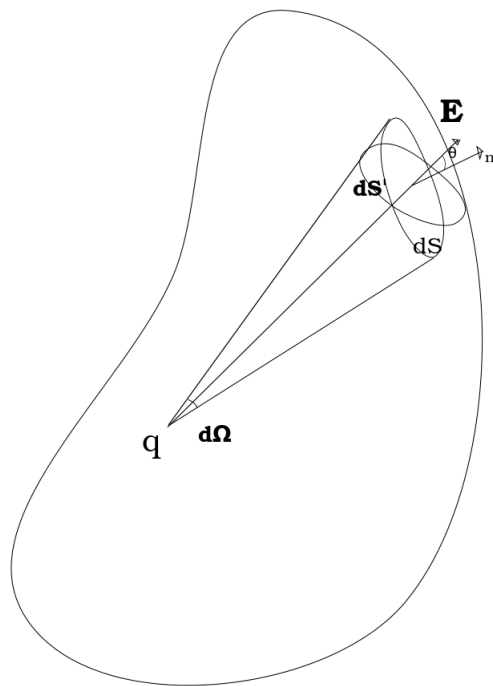


Figura 2.6: Campo elettrico di una particella carica contenuta all'interno della superficie chiusa

$d\Omega$ con vertice in q che interseca un infinitesimo dS della superficie chiusa (vedi fig. 2.6).

Ora il flusso infinitesimo attraverso dS sarà:

$$d\Phi(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS = E_0 \cos \theta dS$$

La superficie normale può essere espressa geometricamente come $dS' = r^2 d\Omega$. Tenendo presente che $E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ e $dS' = \cos \theta dS$, sostituendo si ottiene:

$$d\Phi(\vec{E}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega$$

Semplificando⁹ ed integrando su tutto l'angolo solido

$$\int d\Phi(\vec{E}_0) = \int_{\Omega} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\Phi(\vec{E}_0) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Il risultato si generalizza tenendo presente che il campo elettrico totale si ottiene sommando i vari campi $\vec{E}_0 = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02} + \dots + \vec{E}_{0n}$ di conseguenza:

$$\Phi(\vec{E}_0) = \int d\Phi(\vec{E}_0) = \sum_i \int d\Phi(\vec{E}_{0i}) = \sum_i \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

Per finire la dimostrazione dobbiamo far vedere che il flusso non risente delle cariche esterne. Prendiamo allora la nostra solita superficie chiusa e la carica puntiforme q , questa volta posta esternamente (fig 2.7). Adesso l'angolo solido $d\Omega$ intersecherà due volte la superficie formando dS_1 e dS_2 ; calcoliamo allora il flusso ricordando che per convenzione si prendono i versori normali uscenti.

$$d\Phi_1 = \vec{E}_o(r_1) \cdot \hat{n}_1 dS_1 = E_0(r_1) \cos \theta_1 dS_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} r_1^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_2 = \vec{E}_o(r_2) \cdot \hat{n}_2 dS_2 = E_0(r_2) \cos \theta_2 dS_2$$

Per prendere la superficie normale al campo occorre prendere il supplementare di θ_2 , cioè $\theta'_2 = \pi - \theta$, quindi sostituendo otteniamo:

$$d\Phi_2 = E_0(r_2) \cos(\pi - \theta'_2) dS_2 = -E_0(r_2) \cos \theta'_2 dS_2 = -E_0(r_2) dS' = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

⁹Vogliamo attirare l'attenzione su questo passaggio! Infatti i due r^2 derivano il primo da una legge sperimentale mentre il secondo da considerazioni geometriche, quindi se il secondo è una quantità precisa, il campo elettrico potrebbe dipendere da $r^{2+\epsilon}$ e quindi la semplificazione non si potrebbe fare con leggerezza! Oggi abbiamo conferme sperimentali con una precisione maggiore di 10^{-10} e di conseguenza possiamo togliere r^2

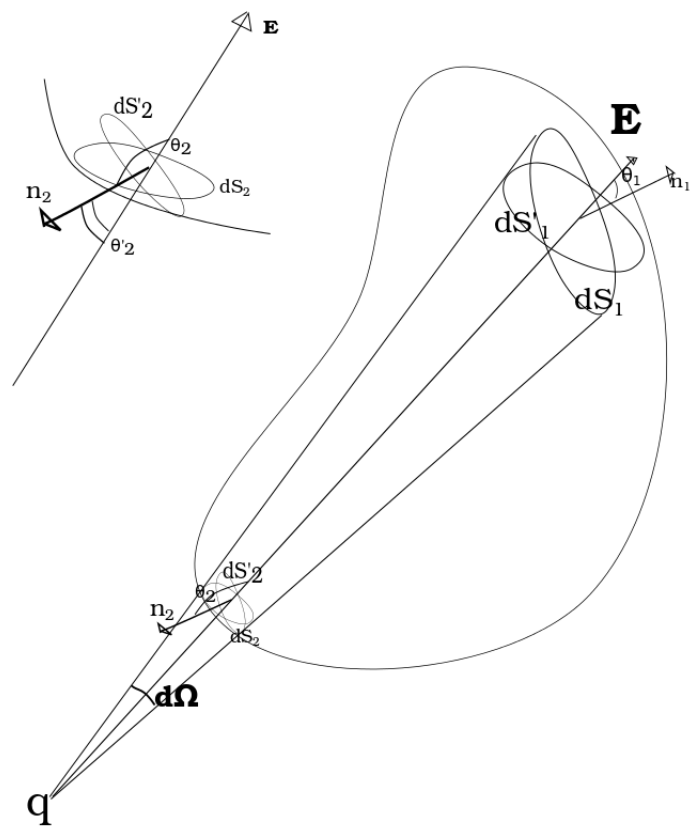


Figura 2.7: Campo elettrico di una particella carica contenuta all'esterno della superficie chiusa, in alto a sinistra un ingrandimento

Il flusso infinitesimo totale è $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$ e poichè il flusso totale è una somma di contributi nulli è nullo anch'esso, quindi non dipende da una carica esterna. A livello qualitativo quest'ultima parte si può giustificare osservando che tante linee di flusso 'entrano' attraverso dS_2 tante ne escono da dS_1 .

2.5 Prima equazione di Maxwell

Il risultato ottenuto con il teorema di Gauss è strabiliante. Il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa dipende solo dalle cariche interne alla superficie stessa! Applichiamo il teorema della divergenza per poter trovare un diverso modo di scrivere il teorema di Gauss (1.2).

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_o) = \int_{S_c} \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o) d\tau$$

Applichiamo il teorema di Gauss:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o) d\tau$$

Supponiamo che le cariche abbiano una distribuzione continua di volume, definiamo una funzione

$$\rho = \begin{cases} \frac{dQ}{d\tau} & (x, y, z) \in \tau \\ 0 & (x, y, z) \notin \tau \end{cases}$$

Ossia è la densità di carica dentro il volume e 0 di fuori:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \int_{\tau^*} \frac{\rho d\tau}{\varepsilon_0}$$

Dove τ^* è un qualunque volume che contiene τ . Tuttavia poichè abbiamo definito ρ nulla fuori di V Possiamo scegliere arbitrariamente τ^* coincidente con τ , e otteniamo quindi la relazione:

$$\int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{\varepsilon_0} = \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o) d\tau$$

Da cui ricaviamo la **prima equazione di Maxwell**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.4)$$

Questa è una proprietà intrinseca del campo elettrico.

2.5.1 Calcolo del campo elettrico - Sfera uniforme

Il teorema di Gauss può essere usato anche per semplificare nettamente i calcoli del campo elettrico di sistemi che hanno particolari simmetrie.

Un esempio particolare riguarda gli oggetti a simmetria sferica, con distribuzione di carica uniforme.

Sia ρ la densità di carica per unità di volume, R_0 il raggio della sfera carica, r la distanza a cui vogliamo calcolare il campo elettrico. Vediamo due casi distinti

Caso 1: $r > R$

In questo caso possiamo provare a calcolare il campo elettrico di un punto generico dello spazio P esterno alla sfera. Per farlo notiamo che per simmetria il modulo del campo elettrico dovrà essere lo stesso in tutti gli altri punti P^* che distano dal centro della sfera la stessa quantità¹⁰.

La sfera è dotata anche di simmetria cilindrica, ovvero individuato l'asse di rotazione che passa per il centro della sfera e il punto P , ruotando il sistema attorno a questo asse il sistema rimane uguale.

Quindi la direzione del campo elettrico deve essere parallela a quest'asse.

Abbiamo concluso che la tutti i punti P^* che distano r dal centro della sfera hanno associato un campo elettrico di modulo E_0 uguale per tutti, e di direzione radiale.

Costruiamo una superficie particolare S_1 , un'altra sfera centrata nel centro della prima sfera, e di raggio r (dunque il luogo dei punti P^*).

Il campo elettrico è sempre perpendicolare a questa superficie e di modulo costante in tutti i punti. Calcoliamo il flusso del campo elettrico lungo S_1 :

$$\Phi_{S_1}(\vec{E}_0) = \int_{S_1} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS = \int_{S_1} E_0 dS = E_0 \int_{S_1} dS$$

La nostra superficie S_1 è una sfera di raggio r da cui:

$$\Phi_{S_1}(\vec{E}_0) = E_0 \cdot 4\pi r^2$$

Ora sfruttiamo il teorema di Gauss (2.1). Questo ci dice che il flusso di una *qualsiasi* superficie chiusa è dato dalla somma delle cariche interne su ε_0 . In particolare possiamo scegliere la superficie S_1 e dire che il suo flusso è pari a:

$$\Phi_{S_1}(\vec{E}_0) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

Mettiamo insieme i due risultati e ricaviamo il campo elettrico:

$$E_0 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

¹⁰Questo è vero perché ruotando la sfera non cambia il sistema.

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{tot}}{r^2}$$

Questo risultato è sensazionale! Il campo elettrico di una sfera uniformemente carica è uguale a quello di una sfera puntiforme! Il risultato che abbiamo ottenuto è in realtà ancora più generico, poiché non abbiamo mai sfruttato l'uniformità della sfera questo vale per qualunque distribuzione di carica sferica, ovvero qualunque funzione di densità $\rho(r)$ dipendente solo dal raggio.

Caso 2: $r < R$

Andiamo ora a vedere quanto vale il campo elettrico in un punto interno alla sfera. Possiamo ragionare come nel caso precedente¹¹. Per le stesse simmetrie di prima tutti i punti che distano la stessa lunghezza dal centro avranno un campo elettrico di modulo uguale, e la direzione è sempre quella che si irraggia dal centro.

Sia P il punto interno alla sfera a cui vogliamo calcolare il campo elettrico, costruiamo una superficie S_2 composta dal luogo dei punti P^* in cui il campo elettrico ha modulo pari a P . Questa è una sfera in cui il campo elettrico è ortogonale in ogni punto. Passiamo al calcolo del flusso:

$$\Phi_{S_2}(\vec{E}_0) = \int_{S_2} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS = \int_{S_2} E_0 dS = E_0 \int_{S_2} dS = E_0 4\pi r^2$$

Come si vede il conto è uguale al precedente, adesso applichiamo il teorema di Gauss, Questa volta però la carica interna del sistema non è più Q_{tot} , ma solo quella interna. Poiché abbiamo assunto ρ costante Q_{int} diventa:

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Nel caso in cui ρ non fosse uniforme il calcolo della carica interna si riduce alla risoluzione dell'integrale:

$$Q_{int} = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

Che se ρ è costante torna la formula di prima.

Assumiamo per semplicità ρ costante e applichiamo il teorema di Gauss:

$$\Phi_{S_2}(\vec{E}_0) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\rho\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

Uguagliamo i due flussi ricavati:

$$E_0 4\pi r^2 = \frac{4\rho\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

¹¹Questa volta però è necessario che la sfera sia uniformemente carica.

$$E_0 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r$$

Abbiamo l'interessante risultato che il campo elettrico aumenta linearmente con r ! Se mettiamo assieme i due risultati possiamo graficare l'andamento del campo elettrico in funzione di r . Questo cresce linearmente per $r < R$ poi decresce come r^{-2} (Figura 2.8).

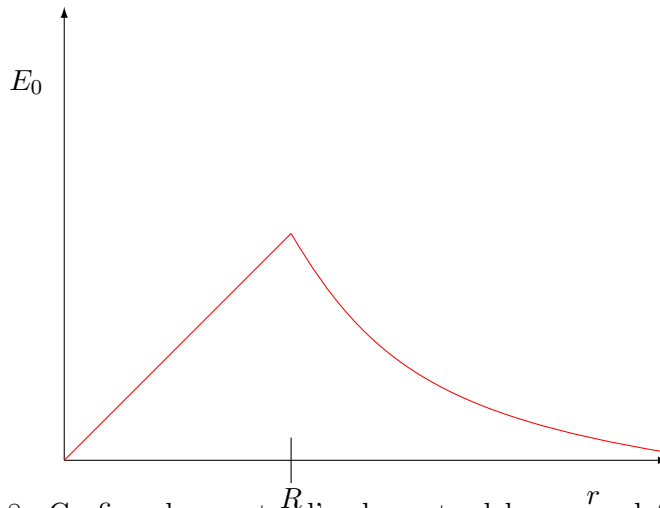


Figura 2.8: Grafico che mostra l'andamento del campo elettrico dentro e fuori dalla sfera di raggio R uniformemente carica.

Con la stessa tecnica è possibile calcolare con più semplicità i campi delle distribuzioni già affrontate nella sezione 2.3.

2.6 Il potenziale elettrostatico

Definito il campo elettrico come:

$$E(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Si nota subito che è conservativo¹², ha senso quindi cercare un potenziale! Per ricavarlo calcoliamoci il lavoro del campo lungo un percorso di estremi AB

$$\int_A^B E(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{l}}{|\vec{r}|^3}$$

Ora il prodotto scalare $\vec{r} \cdot d\vec{l}$, chiamando ϕ l'angolo compreso (vedi fig. 2.9) diventa $r \cos \phi dl$ dove la quantità $\cos \phi dl$ è la proiezione di $d\vec{l}$ nella direzione \hat{r} che rappresenta l'allungamento di r nel passare da l a $(l+dl)$ quindi

¹²Tutti i campi centrali sono conservativi.

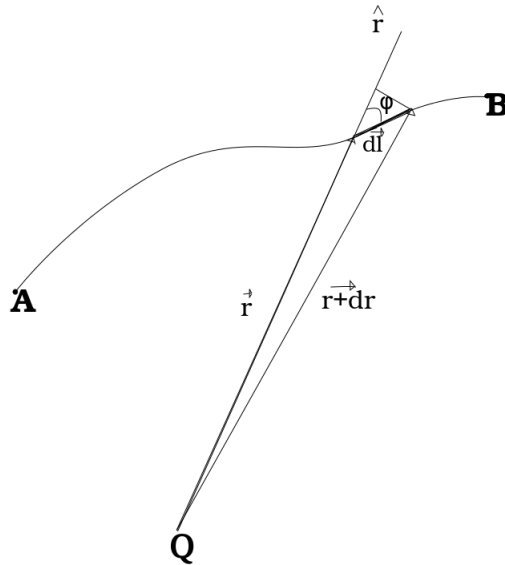


Figura 2.9: Percorso AB

cos $\phi dl = dr$, allora l'integrale diventa banale infatti:

$$\int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{l}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Come ci aspettavamo nella formula finale non c'è traccia del percorso fatto ma solo del punto di partenza e quello di arrivo!

Definizione 2.3 (Potenziale elettrostatico) *Si definisce potenziale elettrostatico e si indica con $V_o(\vec{r})$ la quantità:*

$$V_o(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C$$

In particolare se in A è assegnato un potenziale $V_0(A)$ allora il potenziale di un generico punto si può esprimere come:

$$V_0(P) = - \int_A^P \vec{E}_0 d\vec{l} + V_0(A)$$

Va precisato che poichè il campo elettrico è definito come la forza divisa per la carica il potenziale elettrico è un energia potenziale divisa per la carica $V = \frac{\Delta E_P}{q}$.

Dalle relazioni precedenti si vede come non si possa di fatto calcolare un potenziale ma solo una differenza di potenziale fra due punti in quanto il potenziale è definito a meno di una costante. Nella pratica si assume nullo

il potenziale a distanza infinita e quello di un circuito collegato a terra. L'unità di misura del potenziale è il Volt definito come:

$$V = \left[\frac{N \cdot m}{C} \right] = \left[\frac{J}{C} \right]$$

Ora dalle relazioni precedenti abbiamo che:

$$V_0(A) - V_0(B) = \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV_0$$

Poichè questo deve essere verificato per ogni percorso si ottiene:

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = -dV_0$$

Da cui svolgendo il prodotto scalare del primo e differenziando totalmente V che è funzione di $V(x,y,z)$, abbiamo:

$$(E_0)_x dx + (E_0)_y dy + (E_0)_z dz = - \frac{\partial V_0}{\partial x} dx - \frac{\partial V_0}{\partial y} dy + - \frac{\partial V_0}{\partial z} dz$$

Da cui si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= - \frac{\partial V_0}{\partial x} \\ \left\{ \begin{aligned} E_{0y} &= - \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ E_{0z} &= - \frac{\partial V_0}{\partial z} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Usando una notazione più compatta possiamo scrivere:

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} V_0$$

2.6.1 Potenziale del dipolo elettrico

Nella sezione (2.3.1) abbiamo calcolato il campo elettrico di un dipolo lungo l'asse ortogonale alla retta congiungente le due cariche, e abbiamo messo in evidenza un andamento del tipo:

$$E_0 \propto \frac{1}{r^3}$$

Sfruttiamo questi risultati sul potenziale per provare a calcolare il campo elettrico in un generico punto P dello spazio (Figura 2.10).

Procediamo Al calcolo del potenziale in P . Il potenziale è una funzione additiva:

$$V_0^{tot}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

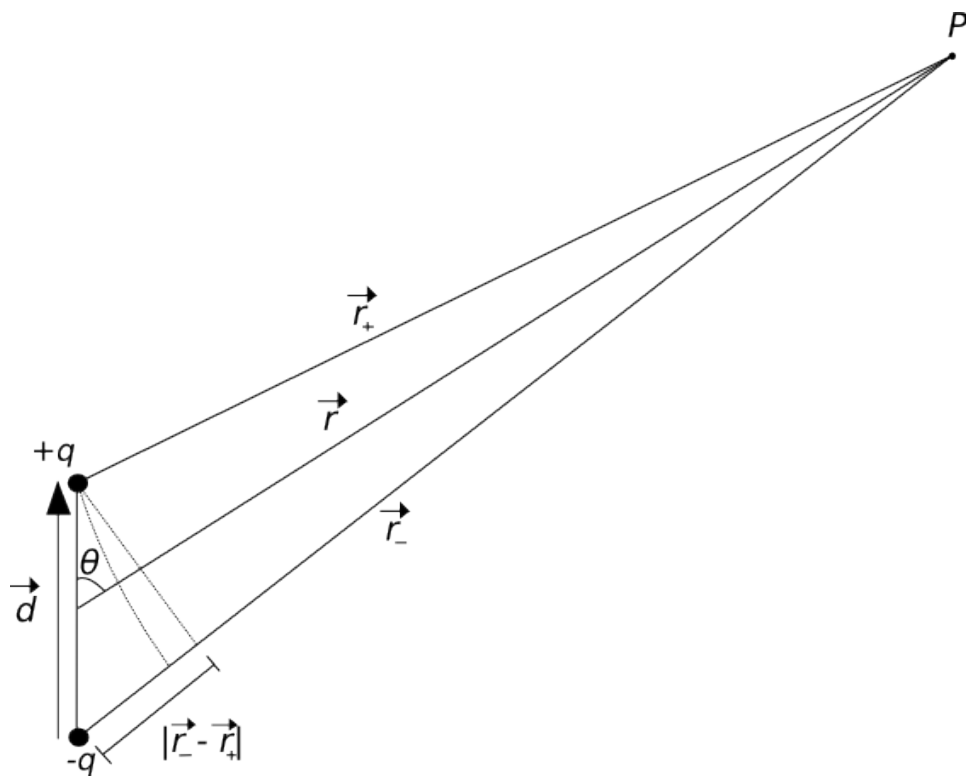


Figura 2.10: Schema del calcolo del potenziale di un punto P abbastanza lontano dal dipolo elettrico.

Mettiamoci nell'approssimazione di calcolare il potenziale in una regione di punti tali che $r \gg d$.

$$V_0^{tot}(P) \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \right)$$

Poiché siamo in questa ipotesi e r è un valore mediano tra r_+ e r_- , che differiscono tra loro di poco, facciamo la prima seguente approssimazione:

$$r_- r_+ \approx r^2$$

Un'altra approssimazione la possiamo fare sulla distanza, come si vede già nella figura 2.10, possiamo proiettare r_+ su r_- , e sfruttare e sfruttare l'approssimazione che per angoli piccoli il coseno dell'angolo è circa uguale a 1.

$$r_- - r_+ \approx d \cos \theta$$

$$V_0^{tot}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$$

Ricordiamo la definizione di momento del dipolo \vec{p} (definizione 2.2).

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

$$qd \cos \theta = \vec{p} \cdot \hat{r}$$

$$V_0^{tot}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Oppure possiamo scriverla come:

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.5)$$

Notiamo che il potenziale diminuisce come r^{-2} , risultato che ci aspettiamo, poiché il campo elettrico, che è la derivata del potenziale, diminuisce come r^{-3} .

Ricaviamo a questo punto il campo elettrico. Per semplicità di calcoli lo faremo in coordinate sferiche, per questo useremo le formule del gradiente, già illustrate nella (1.4) ma che riportiamo per maggiore chiarezza:

$$\begin{cases} E_r = -(\vec{\nabla} V_0)_r = -\frac{\partial V_0}{\partial r} \\ E_\theta = -(\vec{\nabla} V_0)_\theta = -\frac{\partial V_0}{\partial \theta} \frac{1}{r} \\ E_\varphi = -(\vec{\nabla} V_0)_\varphi = -\frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \end{cases}$$

Si nota subito che poiché il potenziale non dipende da φ , la componente lungo φ del campo elettrico è nulla (come ovviamente poteva essere dedotto per ragioni di simmetria cilindrica).

Passiamo al calcolo delle componenti:

$$\begin{aligned}
 E_r &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) \\
 E_r &= +\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} \\
 E_r &= +\frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \\
 E_\theta &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) \frac{1}{r} \\
 E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \\
 E_\varphi &= 0
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi risolto il problema del campo elettrico di un dipolo distante dal centro. Questo risultato è importantissimo, soprattutto nel sistema che analizzeremo tra breve.

2.7 Sistema di N cariche

Vediamo di studiare un sistema composto da N cariche che abbia la proprietà di essere globalmente neutro, ossia che la somma totale delle cariche, considerando i segni, è nulla. Sistemi di questo tipo sono largamente presenti in natura, basta pensare che la maggior parte delle molecole si comportano proprio come sistemi di n cariche che si distribuiscono lungo la nube elettronica.

È chiaro che per distanze \vec{R} molto grandi il campo elettrico va a zero rapidamente, poiché come nel dipolo la carica globale è nulla. Se ci avviciniamo troppo alla molecola il dettaglio in cui sono disposte le cariche inizia ad essere particolarmente rilevante, per cui non riusciamo ad ottenere informazioni utili sul campo elettrico. Mettiamoci dunque in una condizione intermedia ossia dove:

$$R \gg r_i \quad \forall r_i$$

Cioè ci mettiamo a distanze molto maggiori della distanza propria del sistema. (Figura 2.11).

Calcoliamo il potenziale:

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|}$$

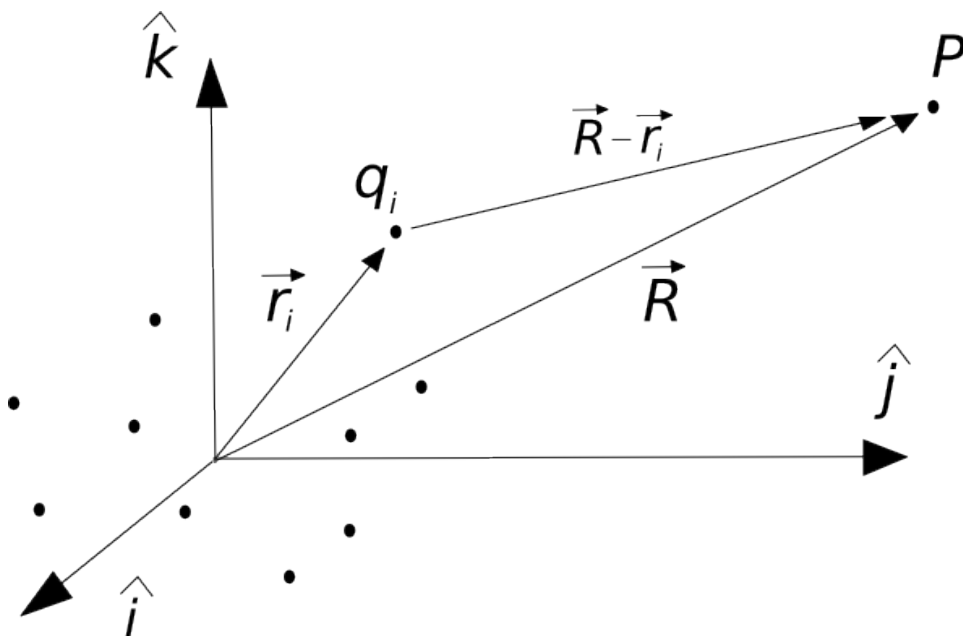


Figura 2.11: Sistema di tante cariche (i puntini), ogni carica q_i è individuata da un vettore \vec{r}_i .

Sfruttiamo il fatto che il modulo quadro di un vettore è definito come il prodotto scalare del vettore per se stesso.

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\sqrt{(\vec{R} - \vec{r}_i) \cdot (\vec{R} - \vec{r}_i)}}$$

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\sqrt{R^2 + r_i^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{R}}}$$

Portiamo fuori un fattore R :

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 - \frac{2\vec{r}_i \cdot \vec{R}}{R^2}}}$$

Per via dell'approssimazione che abbiamo fatto all'inizio possiamo trascurare il termine al quadrato sulla radice, che sarà un infinitesimo del secondo ordine. L'altra quantità è comunque un valore molto piccolo, se chiamo quella quantità α_i posso fare la seguente approssimazione usando i polinomi di Taylor.

$$\alpha_i = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{R}}{R^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha_i}} \approx 1 + \alpha_i$$

Da cui ottengo

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{i=1}^n q_i (1 + \alpha_i)$$

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{i=1}^n q_i \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{R}}{R^2} \right)$$

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overbrace{\sum_i q_i}^{Q_{tot}}}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \vec{R}}{R^3}$$

Abbiamo ottenuto un'espressione che ci dà il potenziale in un punto ad una certa distanza R dal centro. Se non avessimo fatto queste approssimazioni avremmo avuto altri fattori con andamenti che decrescono più rapidamente di R .

Notiamo subito che nel primo termine compare la quantità Q_{tot} , ma poiché il sistema di cariche l'abbiamo scelto globalmente neutro, $Q_{tot} = 0$.

Diamo a questo punto un'ulteriore definizione di momento del dipolo:

Definizione 2.4 (Momento di dipolo generalizzato) *Il momento del dipolo di un sistema di n cariche elettriche \vec{p} è dato dalla quantità:*

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i$$

Questa definizione ovviamente coincide con quella 2.2 per un sistema formato da sole due cariche. Con questa definizione otteniamo la seguente espressione del potenziale:

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}$$

Ma questa è identica alla relazione che avevamo ottenuto per il dipolo semplice (2.5)! Questo vuol dire che, a distanze sufficientemente grandi, un qualunque sistema di cariche globalmente neutro si comporta fisicamente esattamente come se si trattasse di un dipolo elettrico!

Ecco perché in chimica alcune molecole come l'acqua si dicono dotate di un momento di dipolo non nullo, poiché hanno una distribuzione degli elettroni non uniforme sui loro orbitali, e questo fa sì che la molecola d'acqua si comporti esattamente come un dipolo elettrico (Ecco perché è così importante studiare i dipoli, poiché le applicazioni si estendono anche al di là della fisica e investono campi come la chimica).

Vediamo adesso qualche cosa in più nella nuova definizione di momento di dipolo che abbiamo dato.

Sembrerebbe ad esempio che dipenda dal particolare sistema di riferimento che abbiamo scelto, compaiono infatti nella sua forma dei vettori \vec{r}_i che dipendono dall'origine del nostro sistema.

Facciamo allora una generica traslazione, e l'origine del vecchio sistema di riferimento è indicata rispetto al nuovo dal vettore \vec{a}

I nuovi vettori posizione saranno quindi dati dalla relazione:

$$\vec{r}' = \vec{a} + \vec{r}$$

Calcoliamo il nuovo momento dipolare:

$$\vec{p}' = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^n q_i (\vec{a} + \vec{r}_i)$$

$$\vec{p}' = \vec{a} \overbrace{\sum_{i=1}^n q_i}^{Q_{tot}} + \overbrace{\sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i}^{\vec{p}}$$

Il primo termine è la carica totale per il vettore \vec{a} , il secondo è proprio il vecchio momento di dipolo. Ma se il sistema che scegliamo è neutro, la carica totale è nulla quindi risulta che:

$$\vec{p}' = \vec{p}$$

Cioè il momento di dipolo è invariante alle traslazioni, a patto che la carica totale sia **nulla**.

Possiamo definire il momento di dipolo considerando le distribuzioni di carica nel continuo. In questi casi semplicemente al posto della sommatoria ci sarà l'integrale e al posto delle varie q_i avremo dq .

$$dq = \rho d\tau$$

$$\vec{p} = \int_{\tau} \vec{r}' \rho(x', y', z') dx' dy' dz'$$

E analogamente può essere considerata la densità superficiale o lineare a seconda dei vari esempi.

2.8 Dipolo sottoposto a campo elettrico

In questi paragrafi abbiamo studiato il campo elettrico generato da un dipolo (o da un sistema qualunque di cariche globalmente neutro), possiamo chiederci l'interessante domanda di come reagisce un materiale le cui molecole hanno un certo momento di dipolo non nullo come l'acqua all'azione di un campo elettrico.

Per farlo modellizziamo le molecole del materiale come dei dipoli che funzionano come corpi rigidi. Abbiamo già visto che una qualunque molecola si comporta proprio come un dipolo nel limite di distanze significativamente maggiori del raggio molecolare.

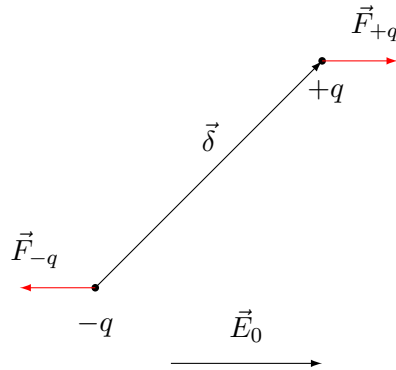


Figura 2.12: Dipolo immerso in un campo elettrico uniforme.

Sia dunque δ la distanza tra le due cariche $+q$ e $-q$. Il campo elettrico \vec{E}_0 in cui è immerso il dipolo eserciterà sulle due cariche una forza, \vec{F}_{+q} e \vec{F}_{-q} (Figura 2.12).

Vediamo di calcolare l'energia potenziale del dipolo.

$$U = V \cdot q$$

$$U_{+q} = qV_{+q} \quad U_{-q} = -qV_{-q}$$

Supponendo che la distanza $\vec{\delta}$ che separa le due cariche sia significativamente più piccola delle variazioni del campo elettrico (come è ragionevole supporre se il nostro dipolo ha le dimensioni di una molecola come l'acqua), possiamo esprimere V_{+q} in questo modo:

$$V_{-q} = V_0 \quad V_{+q} = V_0 + dV_0$$

Dove dV_0 è l'incremento del potenziale lungo $\vec{\delta}$.

$$dV_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \delta} d\delta$$

Di fatto questo è la derivata direzionale del potenziale lungo $\vec{\delta}$.

$$dV_0 = \vec{\nabla} V_0 \cdot \vec{\delta}$$

L'energia potenziale è dunque:

$$U = qdV = q\vec{\nabla} V_0 \cdot \vec{\delta}$$

$$U = q\vec{\nabla} \cdot \vec{\delta} = \vec{\nabla} V_0 \cdot (q\vec{\delta}) \quad \vec{\nabla} V_0 = -\vec{E}_0$$

Ricordiamo come è definito il momento del dipolo (2.2).

$$U = -\vec{E}_0 \cdot \vec{p}$$

Questo ci dice che, poiché il sistema tende a disporsi al minimo del potenziale, il dipolo si posizionerà in modo che \vec{p} e \vec{E} siano paralleli.

In pratica questo avviene per via della coppia esercitata dalla forza elettrostatica sulle due cariche.

Ora studiamo se il campo elettrico esercita una forza sull'intero sistema, per farlo applichiamo il principio dei lavori virtuali, ovvero immaginiamo di far compiere al dipolo uno spostamento infinitesimo $d\vec{l}$, calcoliamo il lavoro virtuale dL :

$$dL = \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{l}}_{\text{traslazione}} + \underbrace{\vec{M} \cdot d\vec{\theta}}_{\text{rotazione}}$$

Ma questo per il principio dei lavori virtuali è proprio:

$$\begin{aligned} dL + dU &= 0 \\ dL = -dU &= -\frac{\partial U}{\partial l} dl - \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \\ dL &= -\vec{\nabla}U \cdot d\vec{l} - (\vec{\nabla}U)_\theta d\theta \end{aligned}$$

Uniamo tutto per ottenere:

$$\begin{cases} \vec{F} = -\vec{\nabla}U \\ |\vec{M}| = (\nabla U)_\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{p} = -E_0 p \cos \theta \\ M &= \frac{\partial U}{\partial \theta} = E_0 p \sin \theta \end{aligned}$$

Otteniamo l'espressione compatta della coppia che si applica al dipolo

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

Allo stesso modo possiamo ricavare l'espressione della forza:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{\nabla} \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{p} \right) \\ \vec{F} &= \vec{\nabla} (E_{0x} p_x + E_{0y} p_y + E_{0z} p_z) \\ \vec{F} &= p_x \left(\vec{\nabla} E_x \right) + p_y \left(\vec{\nabla} E_y \right) + p_z \left(\vec{\nabla} E_z \right) \end{aligned}$$

Possiamo manipolare ulteriormente, ad esempio limitiamo ci a calcolare:

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Ricordiamo che il campo elettrico è conservativo quindi possiamo usare la proprietà di inversione delle derivate:

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$F_x = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} (E_x)$$

Stessa cosa per le altre componenti.

Otteniamo quindi il fatto che ciascuna delle componenti della forza dipende dal gradiente del campo elettrico lungo quella direzione, questo ci dice che il campo elettrico deve essere non uniforme per avere una forza diversa da zero e quindi operare una traslazione. +

Capitolo 3

Elettrostatica dei conduttori

Fino a questo punto abbiamo trattato di problemi di elettrostatica parlando sempre di materiali isolanti, in cui le cariche sono stazionarie e ben localizzate al loro interno. Sappiamo bene tuttavia che questi non sono gli unici tipi di materiali, esistono infatti anche materiali *conduttori*, in cui le cariche possono muoversi e ridisporsi al loro interno.

L'esistenza semplice dei conduttori crea un enorme problema per la fisica dei conduttori. Fino a questo punto con la teoria dell'elettrostatica che abbiamo sviluppato siamo in grado di calcolare qualunque campo elettrico generato da un qualunque corpo in un qualunque punto, a patto di essere sufficientemente bravi con gli integrali.

Purtroppo la presenza di conduttori fa crollare completamente questo modello. Immaginiamo infatti di porre un conduttore scarico vicino ad un isolante che genera un campo elettrico che sappiamo calcolare. Le cariche del conduttore risentono di questo campo elettrico e si ridispongono nuovamente nel conduttore in maniera non uniforme, generando un sistema in cui abbiamo l'ammassarsi delle cariche positive in un punto e le cariche negative in un altro, con una distribuzione σ incognita.

Questo sistema a sua volta genera un campo elettrico che interferisce con quello generato dall'isolante rendendo impossibile prevedere il valore del campo elettrico in un qualunque punto dello spazio (Figura 3.1).

In realtà possiamo sfruttare le leggi dell'elettrostatica studiata fino ad ora per ottenere qualche risultato davvero interessante.

Questo problema è detto il *problema generale dell'elettrostatica*.

3.1 Campo elettrico dentro i conduttori

Sfruttiamo adesso alcuni assiomi dell'elettrostatica: un sistema è elettrostatico se le cariche sono ferme. Per cui se vogliamo calcolare il campo elettrico del sistema di Figura 3.1 dobbiamo trascurare il tempo in cui le

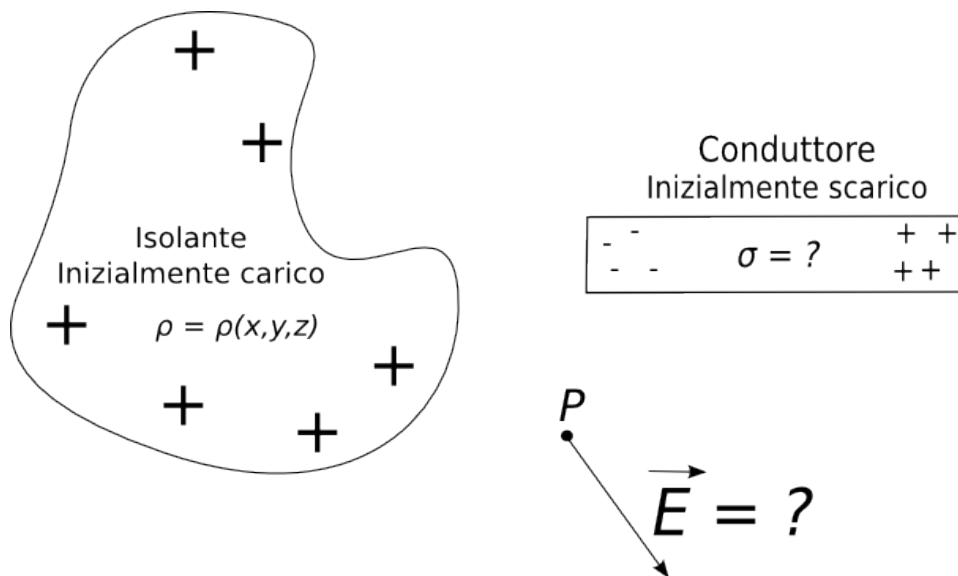


Figura 3.1: La presenza di un conduttore scarico sottoposto ad un campo elettrico rende impossibile calcolare il campo elettrico a priori, poiché le cariche nel conduttore si ridispongono nuovamente con una distribuzione di carica superficiale σ incognita. Questo processo si chiama caricamento per **induzione**.

cariche¹ si ridispongono all'interno del conduttore fino a raggiungere una nuova situazione di equilibrio.

Poiché le cariche sono libere di muoversi ma rimangono ferme nella nuova situazione di equilibrio, possiamo dedurre che la forza totale che agisce sulle cariche sia nulla. Poiché la forza che subisce una carica è data dalla relazione:

$$\vec{F} = q\vec{E} = 0$$

E la carica q è diversa da zero, risulta che

$$\vec{E} = 0$$

Ossia:

Il campo elettrico all'interno di un conduttore in **elettrostatica** è sempre nullo

È chiaro che questo risultato è limitato solo in elettrostatica, poiché l'abbiamo espressamente ottenuto dalla condizione che le cariche sono ferme. In

¹Se il conduttore è un metallo le cariche mobili sono ovviamente gli elettroni degli orbitali atomici più esterni, ma possono essere conduttori anche semplici composti ionici, come l'acqua salata, in questi casi le cariche mobili sono sia positive che negative, e sono composti da ioni.

generale non sarà vero, anzi in elettrodinamica è generalmente falso, poiché all'interno dei conduttori si sviluppa una corrente elettrica determinata da un campo elettrico non nullo al loro interno.

Ottenuto questo risultato possiamo ricavare un'altra informazione molto importante sul potenziale. Poiché

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}V & \vec{E} &= 0 \\ V &= \text{cost}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Il potenziale elettrostatico in un conduttore è sempre costante

Che può anche essere enunciato come

Il volume occupato da un conduttore in elettrostatica è **equipotenziale**

3.1.1 Distribuzione di carica del conduttore

Dimostriamo ora una proprietà importantissima dei conduttori in elettrostatica: le cariche elettriche si dispongono tutte sulla superficie del conduttore, e non all'interno.

La dimostrazione è semplicissima e sfrutta il teorema di Gauss (2.1).

Prendiamo una qualunque superficie contenuta nel nostro conduttore, e calcoliamo il flusso del campo elettrico lungo questa generica superficie:

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = \int_{S_c} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS$$

Poiché abbiamo visto che il campo elettrico all'interno di tutto il conduttore è nullo, lo è in particolare in tutti gli elementini dS della superficie contenuta nel nostro conduttore, per cui otteniamo che

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = 0$$

Indipendentemente dalla scelta di S_c purché la superficie sia totalmente contenuta nel conduttore. Ma per il teorema di Gauss (2.1) possiamo dire che:

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = 0$$

Oppure passando all'espressione continua, definendo con ρ la distribuzione di carica

$$\frac{\int_{V(S_c)} \rho(x, y, z) dV}{\varepsilon_0} = 0$$

Per ogni volume V contenuto dalla superficie chiusa S_c . Ma questo è vero se e solo se ρ è una funzione identicamente nulla in tutto il dominio.

Per cui all'interno del conduttore la densità di carica è sempre nulla.

Questo ci dice che tutta la carica si dispone sulla superficie del conduttore. Ecco spiegato per quale motivo abbiamo chiamato σ la densità di carica del conduttore in Figura 3.1.

3.2 Campo elettrico tra conduttore e esterno

Abbiamo risolto totalmente ciò che avviene all'interno dei conduttori. Ora possiamo chiederci cosa avviene immediatamente fuori dal conduttore.

Possiamo già dare una risposta per quello che riguarda la direzione del campo elettrico. Se consideriamo la superficie esterna del nostro conduttore è una superficie equipotenziale, come ricorda la formula (3.1).

Quindi poiché il campo elettrico è sempre perpendicolare alle superfici equipotenziali, otteniamo che il campo elettrico è diretto perpendicolarmente alla superficie del conduttore.

Possiamo dare una dimostrazione di questa cosa un po' più rigorosa, che ci servirà poi in seguito.

Per farlo immaginiamo di metterci al limite tra interno ed esterno del conduttore, e fare un percorso circuitante infinitesimo che abbia due tratti paralleli alla superficie di separazione, uno interno ed uno esterno, congiunte tra loro tra due tratti ortogonali.

Prendiamo questi due elementi dl paralleli alla superficie del conduttore sufficientemente vicini tra loro in modo da rendere i tratti di congiungimento infinitesimi di ordini superiori, i cui contributi nel calcolo della circuitazione possono essere trascurati. (Figura 3.2).

Passiamo a calcolare la circuitazione del campo elettrico, ricordandoci che è un campo conservativo:

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

Ora spezziamo la circuitazione nei vari componenti, trascurando i due elementi ortogonali², e ricordando che il percorso interno e esterno sono uguali in modulo dl , ma di verso opposto:

$$\int \vec{E}_0^{int} \cdot d\hat{t} - \int \vec{E}_0^{est} \cdot d\hat{t} = 0$$

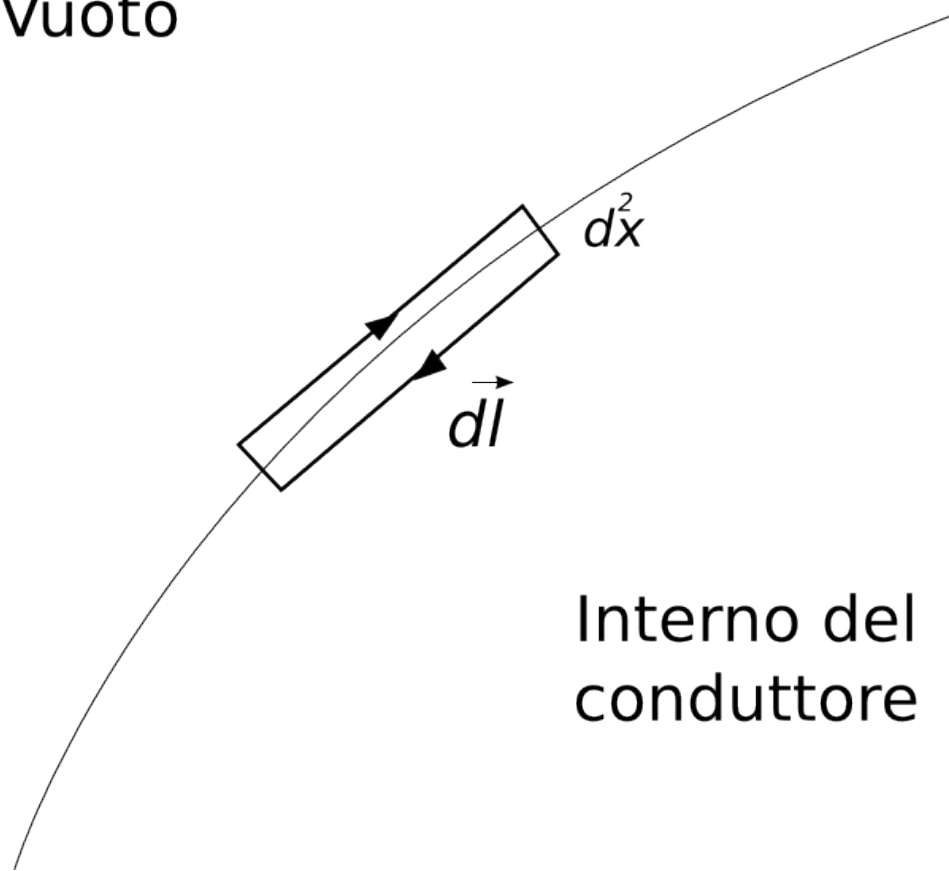
Ma \vec{E}_0^{int} è nullo.

$$\int \vec{E}_0^{est} \cdot d\hat{t} = 0$$

$$\int E_0^t dl = 0$$

²Sono elementi di lunghezza infinitesima di ordini superiore al dl , per cui possono essere trascurati nel calcolo della circuitazione.

Vuoto



Interno del
conduttore

Figura 3.2: Circuitazione del campo elettrico in un conduttore

Dove E_0^t è la componente del campo elettrico tangente alla superficie di separazione. Poiché dl lo possiamo scegliere piccolo a piacere, scegliamolo sufficientemente piccolo da rendere E_0^t una costante lungo dl :

$$E_0^t dl = 0$$

$$E_0^t = 0$$

Abbiamo quindi dimostrato in maniera un po' più pedante un risultato in realtà abbastanza banale: cioè che immediatamente fuori dal conduttore il campo elettrico è ortogonale alla superficie di contatto.

Ora per calcolare il modulo di questo campo elettrico basta fare un analogo discorso ma sfruttando invece il calcolo del flusso.

Costruiamo una superficie cilindrica infinitesima con una superficie circolare dentro e una fuori al conduttore, ma entrambe sufficientemente piccole e vicine alla superficie da essere parallele alla superficie di separazione.

Calcoliamo il flusso lungo attraverso questa superficie (Figura 3.3)

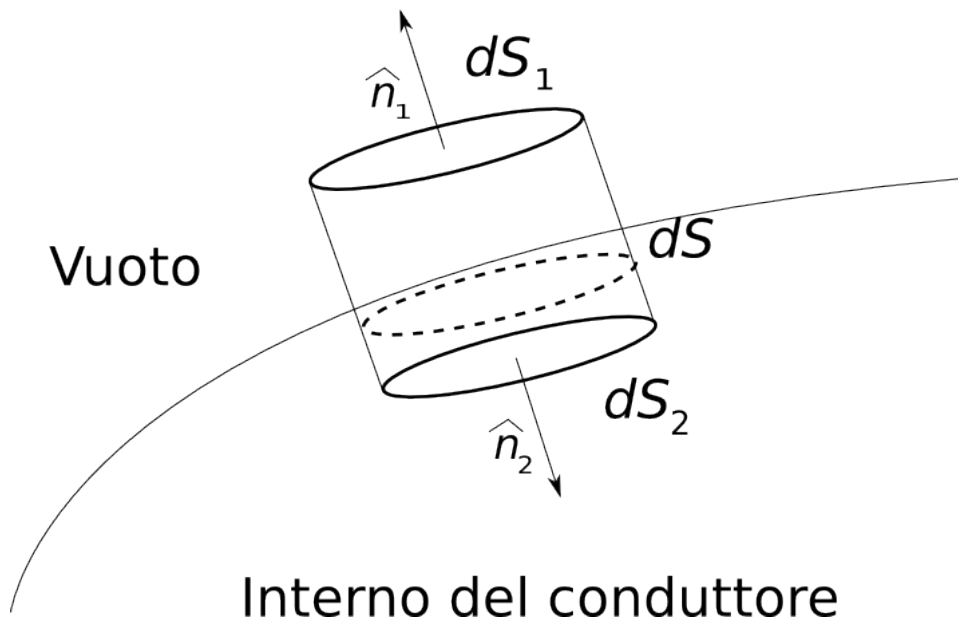


Figura 3.3: Calcolo del flusso lungo una superficie chiusa che attraversa il conduttore.

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = \int_{S_c} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS$$

Ma abbiamo appena dimostrato che il campo elettrico è perpendicolare alla superficie di separazione, pertanto il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo. Rimangono i due contributi delle due superfici circolari:

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = \vec{E}_{01} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \vec{E}_{02} \cdot \hat{n}_2 dS_2$$

Se chiamiamo dS l'area della superficie che intersecano la nostra superficie attraverso la quale calcoliamo il flusso (S_c) e la superficie di separazione, otteniamo che:

$$dS = dS_1 = dS_2$$

Se consideriamo che

$$\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$$

Arriviamo a scrivere che:

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = dS \left(\vec{E}_{01} - \vec{E}_{02} \right) \cdot \hat{n}$$

Prendiamo sola componente perpendicolare del campo elettrico:

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = dS (E_{01}^n - E_{02}^n)$$

Ma il campo elettrico interno è nullo ($E_{02}^n = 0$)

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = dS E_0^n$$

Ma la componente tangenziale del campo elettrico è nulla

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = dS |\vec{E}_0|$$

A questo punto applichiamo il teorema di Gauss (2.1).

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

Dove σ è la densità superficiale di carica del nostro conduttore:

$$dS |\vec{E}_0| = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}_0| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Abbiamo quindi ottenuto modulo, direzione e verso del campo elettrico immediatamente fuori dalla superficie del solido. Questo risultato prende il nome di

Teorema 3.1 (di Coulomb) *Il campo elettrico generato da un conduttore in statica, nelle immediate vicinanze del conduttore, è esprimibile dalla relazione:*

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

Dove \hat{n} è il versore normale uscente dalla superficie del conduttore, σ è la densità di carica superficiale.

3.3 Gabbia di Faraday

Un oggetto molto interessante nello studio dell'elettrostatica è la cosiddetta gabbia di Faraday.

Per arrivare a spiegarne il funzionamento dobbiamo prima compiere una serie di esperimenti virtuali.

Supponiamo di avere un conduttore cavo, inizialmente scarico. Mettiamo all'interno di questo conduttore una carica elettrica positiva q . Il conduttore per induzione ridistribuirà le sue cariche lungo le due superfici esterne, verosimilmente le cariche negative lungo la superficie più vicina a q , e quelle positive sulla superficie più esterna. (Vedi Figura 3.4).

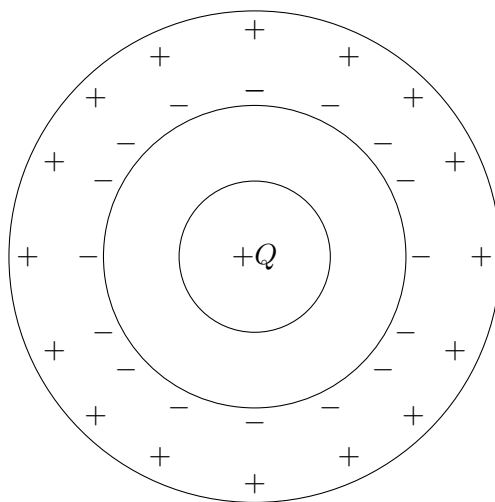


Figura 3.4: Conduttore cavo con dentro una carica Q positiva, che si carica attraverso il fenomeno dell'induzione.

Qual'è in totale il valore della carica negativa che si addensa sulla superficie interna del guscio? Per calcolarla basta sfruttare il teorema di Gauss.

Scegliamo una superficie interna al guscio che avvolga la cavità. Essendo totalmente interna al conduttore il campo elettrico è nullo, per cui anche il flusso lungo tale superficie è nullo. Ma il flusso lungo la superficie è per il teorema di Gauss (2.1) pari alla somma delle cariche interne diviso ϵ_0 . Poiché le cariche interne a tale superficie possono disporsi solo sulla parete interna del guscio e sulla sfera dentro la cavità, la somma di queste cariche deve essere nulla. Ma questa somma è data dalla carica negativa che si dispone sulla superficie interna del guscio e la carica $+Q$ posta all'interno.

Questo ci dice che la carica negativa che si dispone sulla faccia interna del guscio è $-Q$.

Di conseguenza poiché il guscio è globalmente neutro, la carica che si dispone sulla faccia esterna è $+Q$.

A questo punto possiamo caricare il guscio in due maniere, o portando a contatto la carica interna con la superficie interna del conduttore, scaricando sia la carica che la superficie interna (che avevano cariche uguali e opposte). In questo caso il guscio rimane carico all'esterno.

Un altro modo per caricare questo conduttore consiste invece nel collegare il guscio a terra³, scaricando quindi la parte esterna del conduttore lasciando carico l'interno con carica $-Q$.

Questo particolare guscio è detto *gabbia di Faraday* perché è in grado di schermare tutto ciò che avviene all'esterno. Qualunque carica mettiamo al di fuori da questo guscio, il campo elettrico interno non ne risente.

Supponiamo di porre una carica all'esterno del guscio (e nulla all'interno), è facile dimostrare che il campo elettrico all'interno del guscio è nullo.

Ansitutto è facile dimostrare che la carica totale che si dispone sulla superficie interna è nulla (basta applicare il teorema di Gauss ad una superficie interna al conduttore che avvolga la cavità), ma non è possibile che la carica si disponga in modo asimmetrico, (da un lato si concentrino le cariche positive e dall'altro quelle negative in modo da avere un totale neutro), perché se così fosse sarebbe possibile trovare un percorso che collega due punti della superficie interna attraverso il quale il lavoro del campo elettrico sarebbe non nullo. Ma siccome posso chiudere il percorso passando all'interno del conduttore (in cui il campo elettrico è nullo) e ottenere un assurdo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

La caratteristica interessante è che la *gabbia di Faraday* è sia uno schermo elettrostatico, che uno schermo elettrodinamico, infatti è in grado di schermare anche le onde elettromagnetiche, ecco perché i palazzi rivestiti di un'armatura di metallo ostacolano le reti di telefonia mobile, anche se offrono un'ottima protezione da fenomeni elettrostatici violenti come i fulmini.

3.4 Effetto punta

Andiamo ora a studiare un effetto molto particolare che riguarda la distribuzione di carica σ sui conduttori. Immaginiamo di prendere due conduttori sferici carichi, il primo con un raggio R_1 maggiore di R_2 (raggio della seconda sfera). Supponiamo di allontanarli sufficientemente in modo che la distribuzione di carica sulle superfici non risenta del campo elettrico generato dall'altro conduttore. Supponiamo che la sfera 1 sia carica di Q_1 e la

³Con questo meccanismo poniamo il guscio a potenziale nullo, il che implica che il lavoro fatto per portare una carica dall'infinito alla superficie del guscio sia nulla, ovvero che non vi sia campo elettrico all'esterno della gabbia, questa operazione corrisponde ad avere il sistema dei due conduttori globalmente scarico, poiché sulla superficie interna al guscio si deve disporre una carica $-Q$, la superficie esterna deve scaricarsi.

sfera 2 abbia carica Q_2 . Proviamo a calcolare il potenziale delle due sfere:

$$V_0(R) = \int_R^\infty -\vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

$$V_1(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^\infty \frac{-Q_1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1}$$

$$V_2(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

Ora proviamo ad unire le due sfere con un filo di rame di spessore trascurabile, che riporti le due sfere allo stesso potenziale elettrostatico, alla fine dell'operazione ci ritroveremo con:

$$V_1(R_1) = V_2(R_2)$$

Sulle due sfere sarà presente una carica differente Q'_1 e Q'_2 .

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_2}{R_2}$$

$$Q'_2 = \frac{R_2}{R_1} Q'_1$$

Cioè la sferetta più piccola accumula meno carica di quella grande. Cosa succede invece alla densità di carica σ ?

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}$$

$$\sigma_1 = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} \quad \sigma_2 = \frac{Q'_2}{4\pi R_2^2}$$

$$\sigma_2 R_2^2 4\pi = \frac{R_2}{R_1} \sigma_1 R_1^2 4\pi$$

$$\sigma_2 = \frac{R_1}{R_2} \sigma_1$$

Questo ci dice che in generale la densità di carica tende ad accumularsi in quei punti che hanno un raggio di curvatura minore, in particolare in prossimità di punte la densità di carica diverge, e poiché il campo elettrico subito fuori dal conduttore è di modulo

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Il campo elettrico è molto intenso! Questo fenomeno elettrostatico è usato in molti congegni, come l'accendino, in cui vengono caricate due punte vicine, che generano un grande campo elettrico capace di ionizzare l'aria, o il parafulmine. Per questo motivo un fulmine in genere colpisce sempre oggetti a punta, poiché anche una piccola carica genera un grande campo elettrico.

3.5 Capacità elettrostatica

3.5.1 Capacità di un conduttore isolato

Supponiamo di conoscere la funzione σ che ci dice la distribuzione di carica di un conduttore inizialmente carico. Supponiamo di raddoppiare la carica del conduttore:

$$Q = \sigma \cdot S$$
$$Q' = \sigma' \cdot S$$

Risulta immediatamente verificabile che:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\sigma}{\sigma'}$$

Poiché la distribuzione di carica dipende solo dalla geometria del sistema è lecito pensare che σ aumenti proporzionalmente in ogni punto del conduttore all'aumentare della carica, e cioè che σ e Q siano direttamente proporzionali, in ogni punto del conduttore.

Poiché il campo elettrico in un generico punto dello spazio lo possiamo scrivere come:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS$$
$$E \propto \sigma$$

Quindi il campo elettrico in ogni porzione dello spazio prossimo al conduttore è direttamente proporzionale alla carica Q sul conduttore stesso. Siccome il potenziale elettrostatico è legato al campo elettrico dalla relazione:

$$V = - \int_{\text{conduttore}}^{\infty} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

Risulta che potenziale e carica del conduttore isolato sono tra loro direttamente proporzionali.

$$Q \propto V$$

Sia C la costante di proporzionalità possiamo definire una nuova relazione:

$$Q = CV$$

Definizione 3.1 (Capacità elettrostatica di un conduttore isolato)

*Si definisce **capacità elettrostatica** di un conduttore isolato la grandezza*

$$C = \frac{Q}{V}$$

Come il rapporto tra la carica Q e il potenziale V di un qualunque solido. Questa grandezza si misura in Farad

$$[F] = \left[\frac{C}{V} \right]$$

La capacità di un conduttore isolato dipende solamente dalla sua geometria, calcoliamo ad esempio la capacità della sfera di raggio R :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Quindi una sfera ha una capacità proporzionale al raggio. Per trovare un ordine di grandezza basta vedere che una sfera di un metro di raggio ha una capacità nell'ordine di 10^{-10} Farad, ossia circa 100 pF.

3.5.2 Sistemi non isolati

Il caso che abbiamo analizzato poco fa è in realtà una situazione estremamente rara, poiché in generale vicino al nostro conduttore possono esserci altri conduttori. Supponiamo ora di avere due conduttori che indichiamo con 1 e 2, come mostra la Figura 3.5.

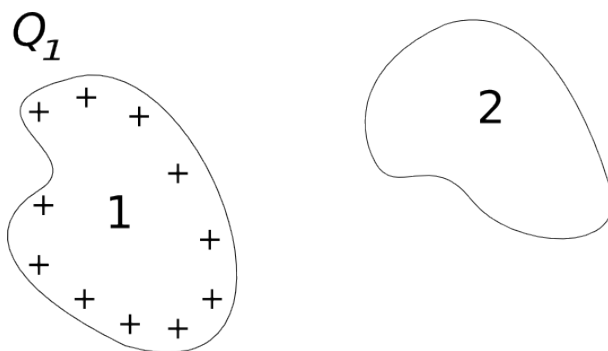


Figura 3.5: Due conduttori, 1 e 2, li carichiamo alternativamente con cariche Q_1 e Q_2 .

Una volta caricato il corpo 1 si porta ad un certo potenziale V_1 proporzionale a Q_1 . L'effetto della carica Q_1 sul corpo 2 lo fa posizionare ad un potenziale V_2 sempre proporzionale alla carica Q_1 .

Questo perché il corpo 1 una volta caricato genera un campo elettrico che punto per punto è direttamente proporzionale alla carica Q_1 del corpo, e il potenziale del corpo due la possiamo calcolare calcolando il lavoro fatto da una carica di prova q per essere portata dalla superficie del corpo 2 all'infinito, diviso la carica di prova q . Questo lavoro è evidentemente direttamente proporzionale al valore del campo elettrico in ciascun punto dello spazio, che a sua volta è direttamente proporzionale alla carica totale che giace sul corpo 1.

Chiamiamo p_{11} e p_{21} i coefficienti di proporzionalità:

$$V_1 = p_{11}Q_1 \quad V_2 = p_{21}Q_1$$

A questo punto scarichiamo il corpo 1 e carichiamo il corpo 2 di una carica pari a Q_2 . Con considerazioni analoghe a quelle fatte prima otteniamo che

$$V_2' = p_{22}Q_2 \quad V_1' = p_{12}Q_2$$

Dove nuovamente p_{22} e p_{12} sono coefficienti che dipendono solo dalla geometria dei corpi.

Che succede se carichiamo i corpi contemporaneamente? I due effetti misurati appariranno simultaneamente, e poiché il potenziale elettrostatico è una quantità additiva otteniamo che:

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases}$$

Ma questo è un sistema lineare che può essere scritto in forma matriciale!

$$V = \mathcal{P}Q$$

Dove V è un vettore dei potenziali dei corpi, \mathcal{P} è una matrice, detta matrice dei potenziali, che dipende strettamente dalla particolare geometria dei corpi, e dalla loro disposizione nello spazio, Q è un vettore che ci dice la carica totale su ciascun corpo.

Si può verificare che \mathcal{P} è una matrice invertibile, questo vuol dire che il sistema è invertibile e in particolare possiamo sempre esprimere le cariche in funzione dei potenziali:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}V_j$$

I coefficienti c sono detti coefficienti di **induzione** quando $i \neq j$, coefficienti di **capacità** quando $i = j$ (i termini sulla diagonale).

Infatti i coefficienti c_{ij} si misurano in Farad, e sono l'analogo della capacità elettrostatica per i sistemi di conduttori non isolati.

$$V_h = \sum_{k=1}^n p_{hk}Q_k \tag{3.2}$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}V_j$$

$$\det||p_{hk}|| \neq 0$$

Si può dimostrare matematicamente che la matrice di potenziale e la matrice di capacità sono due matrici simmetriche, e tutti gli elementi p_{hk} e c_{ij} sono numeri positivi.

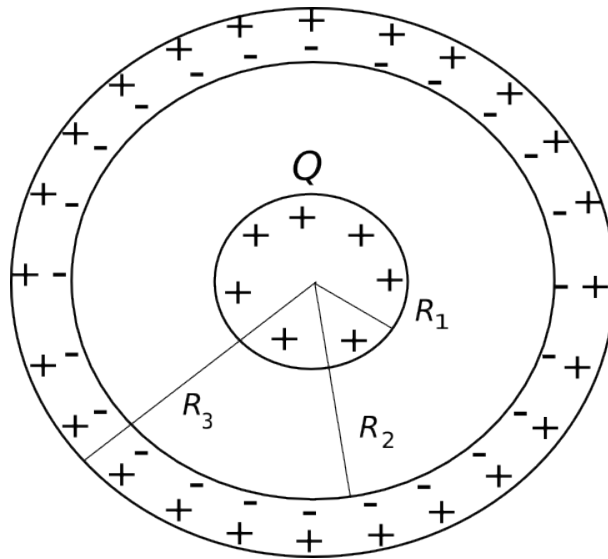


Figura 3.6: Schema di un condensatore sferico, una carica sferica all'interno racchiusa in un guscio sferico.

3.5.3 Capacità di un condensatore sferico

Riprendiamo il sistemino già visto nella sezione 3.3, in Figura 3.4, e proviamo a calcolarne i coefficienti di potenziale, facciamo riferimento per i calcoli ai dati di Figura 3.6.

Per calcolare i coefficienti mettiamoci prima nella condizione in cui il guscio sia scarico e la carica interna sia Q_1 . Il potenziale del guscio (ora corpo 2) e della sfera (corpo 1) è dato dalla (3.2).

$$V_1 = p_{11}Q_1$$

$$V_2 = p_{21}Q_1$$

Calcolare il potenziale del corpo due è però molto facile

$$V_2 = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

Qual è l'espressione del campo elettrico fuori dal guscio? Per ricavarla basta applicare il teorema di Gauss. Prendiamo una qualunque superficie sferica di raggio r centrata nel centro della sfera carica Q_1 , con $r > R_3$. Per simmetria sferica il campo elettrico in ogni punto di questa superficie è diretto normalmente alla superficie stessa, ed è di modulo costante su tutta la superficie. Il teorema di Gauss (2.1) ci dice che:

$$\Phi_{S_c}(\vec{E}_0) = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} = E_0 4\pi r^2$$

Da cui ricaviamo che il campo elettrico è diretto lungo la direzione radiale e ha modulo:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2}$$

Proprio come era facile aspettarsi è indipendente dalla presenza o meno del guscio metallico. Il potenziale dunque è semplicemente

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_3} = p_{21} Q_1$$

Da cui otteniamo facilmente che

$$p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

Analogamente possiamo ricavare il potenziale della sfera interna. È semplice verificare con il teorema di Gauss che il campo elettrico interno al guscio è sempre

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2}$$

Il potenziale del corpo 1 misura:

$$V_1 = V_2 + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

(Ricordo che tra R_2 e R_3 il campo elettrico è nullo, e quel volume è equipotenziale, per questo motivo è stato ommesso questo integrale nei calcoli)

$$V_1 = V_2 + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = p_{11} Q_1$$

Da cui ricaviamo il secondo coefficiente di potenziale

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

A questo punto scarichiamo il corpo 1, e carichiamo il guscio con carica Q_2 . Sempre attraverso il teorema di Gauss vediamo subito che il campo elettrico all'interno del guscio è nullo, poiché qualunque superficie interna al guscio chiusa non contiene cariche, quindi il campo elettrico ha flusso nullo (ed essendo dotato di simmetria sferica, se scegliamo una sfera centrata nel centro, il campo elettrico è sempre perpendicolare alla superficie, $\Phi_{S_c}(\vec{E}) = E_0 S = 0$).

Questo ci dice che non c'è differenza di potenziale tra il corpo 1 e il corpo 2:

$$V_1 = V_2$$

$$V_1 = p_{12}Q_2$$

$$V_2 = p_{22}Q_2$$

Segue che

$$p_{12} = p_{22}$$

Non resta che ricavare p_{22} calcolando esplicitamente V_2

$$V_2 = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

Ancora una volta, con un ragionamento analogo a quello fatto poco fa nel caso in cui fosse carico il corpo 1, riusciamo a dedurre che il campo elettrico è diretto radialmente e ha modulo pari a:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2}$$

Da cui otteniamo:

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

Da cui

$$p_{12} = p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

Si vede subito che è verificata la proprietà di simmetria della matrice delle potenze, infatti $p_{12} = p_{21}$. Riscriviamoli tutti per comodità grafica:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \\ p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \\ p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Ora supponiamo di caricare il corpo 1, e mettere a massa il guscio, in modo da lasciargli solo la carica interna negativa (Figura 3.7).

Sfruttando le relazioni ottenute proviamo a calcolare la differenza di potenziale tra le due armature:

$$V_1 = p_{11}Q - p_{12}Q$$

$$V_2 = p_{21}Q - p_{22}Q$$

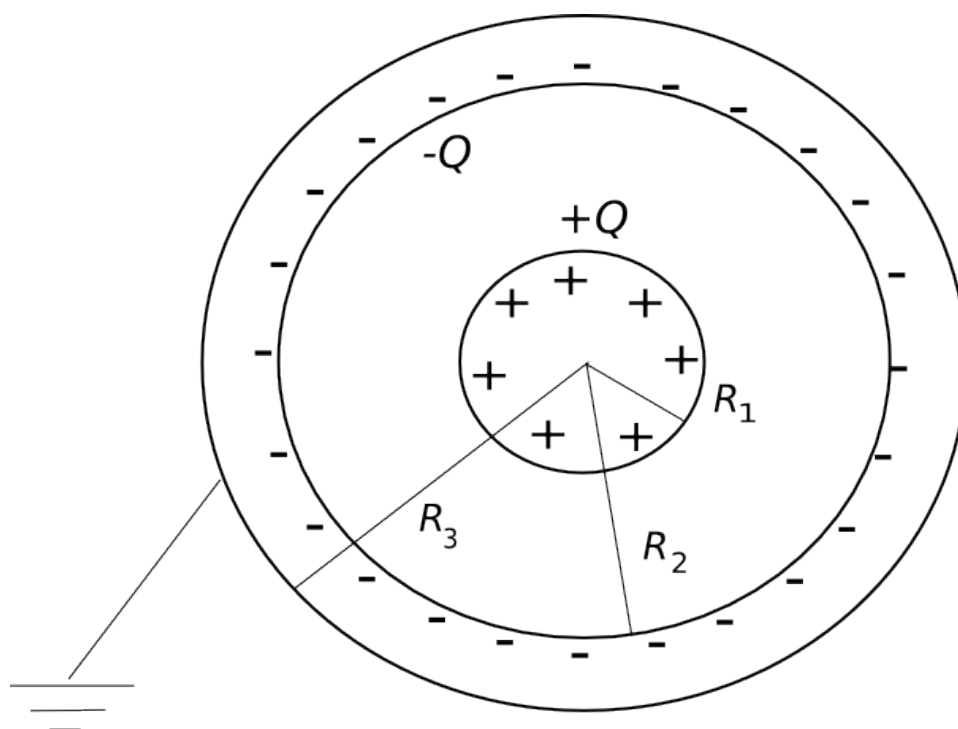


Figura 3.7: Condensatore sferico, in cui le due armature sono cariche e possiedono la stessa carica di modulo ma segno opposto, ottenuto caricando il guscio per induzione e mettendo a massa la parte esterna del guscio, lasciando l'interno di carica $-Q$.

Perché le cariche sono di uguale modulo ma segno opposto.

$$V_1 - V_2 = \Delta V = (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}) Q$$

Ricordiamo che $p_{12} = p_{21}$ indipendentemente da tutto (la matrice dei potenziali è sempre simmetrica)

$$\Delta V = (p_{11} - 2p_{12} + p_{22}) Q$$

Anche in questo caso vediamo che ΔV e Q sono due quantità tra loro proporzionali, sia C la costante di proporzionalità:

$$Q = C \Delta V$$

Definizione 3.2 (Capacità di un condensatore) *Si definisce C la **capacità di un condensatore**, il rapporto tra la carica presente su una delle due armature, e la differenza di potenziale tra le due armature.*

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Si misura in Farad

Non bisogna confondere la capacità di un condensatore con la capacità di un corpo isolato. Queste due quantità hanno un significato fisico completamente differente.

$$C = \frac{1}{p_{11} - 2p_{12} + p_{22}}$$

Anche qui la capacità dipende solo dalla particolare geometria dei corpi.

Calcoliamo la capacità di un condensatore sferico, applicando le relazioni (3.3):

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Il Condensatore in generale è un oggetto fisico composto da due armature di conduttori in *induzione completa* ossia cariche con la stessa carica q ma in un'armatura positiva e nell'altra negativa.

3.6 Energia elettrostatica

Date due cariche q_1 e q_2 , distanti l'una dall'altra $r_{1,2}$, fra di esse si esercita una forza elettrostatica, diretta lungo la congiungente alle due cariche, tale che le due cariche tenderanno ad avvicinarsi o ad allontanarsi a seconda delle loro rispettive cariche. Nello specifico se le cariche sono concordi tenderanno ad allontanarsi e per 'costringerle' ad avvicinarsi bisognerà compiere un lavoro positivo, viceversa se sono di segno discorde sarà positivo il lavoro per allontanarle.

Immaginiamo allora di avvicinare due cariche concordi, molto lentamente, così lentamente da non imprimere loro alcuna energia cinetica e vediamo come si traduce in formule quanto detto! Cominciamo con il posizionare una carica in un punto qualsiasi e teniamola ferma (nel far questo non si compie lavoro), poi prendiamo una altra carica e avviciniamola fino a distanza $r_{1,2}$, da q_1 ;

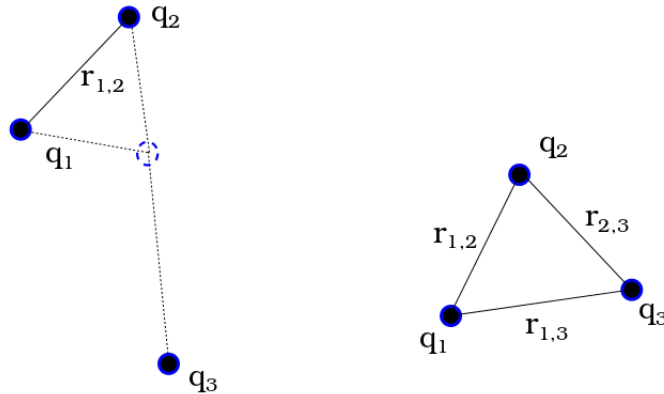


Figura 3.8: Formazione di un sistema di cariche

il lavoro compiuto sarà:

$$L_{1,2} = \int_{\infty}^{r_{1,2}} \vec{F}_{2,1} \cdot d\vec{l} = -q_2 \int_{\infty}^{r_{1,2}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} =$$

$$= -\frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_{1,2}} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{l} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} \right]$$

Ora tenendo fisse queste due avviciniamone una terza (vedi fig. 3.8):

$$L_3 = L_{1,3} + L_{2,3} = \int_{\infty}^{r_{1,3}} \vec{F}_{3,1} \cdot d\vec{l} + \int_{\infty}^{r_{2,3}} \vec{F}_{3,2} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{3,1}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{3,2}}$$

L'energia per creare questo sistema sarà data dalla somma dei tre lavori:

$$U = L_{1,2} + L_{1,3} + L_{2,3} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{q_i q_j}{r_{i,j}}$$

Il risultato trovato vale per un sistema qualsiasi di N cariche, l'energia sarà:

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{i,j}} \right)$$

Ora osservando la formula ci accorgiamo che la parte in parentesi tonde è proprio il potenziale che le N-1 cariche esercitano sulla carica i-esima! Quindi possiamo esprimere l'energia come:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (3.4)$$

La U prende il nome di energia di interazione di un sistema di cariche.

Adesso passiamo a sistemi continui, verrebbe naturale definire:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau'} \rho(r) V(r) d\tau' \quad (3.5)$$

dove si è sostituito q_i con $dq = \rho(r) d\tau'$. Questo passaggio, seppur giusto, non è del tutto ovvio e naturale. Infatti poichè ora dall'infinito non si avvicinano più cariche bensì elementi infinitesimi di carica, le cariche si 'formano' non più all'infinito, ossia fuori dall'influenza delle forze di interazione, ma 'sul posto', quindi bisogna sommare all'energia di formazione del sistema un'autoenergia di formazione delle cariche stesse! Vediamo allora di esprimere la relazione in un modo più significativo; dalla prima equazione di Maxwell abbiamo $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 \epsilon_0$ e sostituendo otteniamo

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 V(r) d\tau$$

Ora ricordando che vale l'identità (con f campo scalare, \vec{v} campo vettoriale):

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{v}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Otteniamo che:

$$V_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \vec{\nabla} \cdot (V_0 \vec{E}_0) - \vec{\nabla} V_0 \cdot \vec{E}_0$$

Ora sostituiamo la quantità all'interno dell'integrale e spezziamolo in due

$$U = \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (V_0 \vec{E}_0) d\tau}_{\text{th. della divergenza}} - \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon \int_{\tau} \vec{\nabla} V_0 \cdot \vec{E}_0 d\tau}_{-\nabla V_0 = E_0}$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \int_{\Sigma} V_0 \vec{E}_0 \hat{n} dS + \frac{1}{2} \epsilon \int_{\tau} E_0^2 d\tau$$

Dove Σ è una superficie che racchiude le cariche. Poiché questa superficie è arbitraria possiamo sceglierla grande a piacere, facciamola tendere all'infinito. Ora se integriamo su tutto lo spazio, il primo termine va come $\frac{1}{r} \frac{1}{r^2} r^2 \approx \frac{1}{r}$ quindi va a zero, in quanto viene valutato sulla superficie (pensiamola sferica) di raggio r con $r \rightarrow \infty$; il secondo integrale invece è su tutto lo spazio e quindi è una serie di termini che all'aumentare del raggio divengono nulli,

quindi convergente ad una quantità finita! Possiamo quindi introdurre una densità di energia $u = \frac{dU}{d\tau}$, tale che:

$$U = \int_{\tau} u d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 d\tau \quad (3.6)$$

da cui segue che $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$ è una quantità sempre positiva!

3.6.1 Energia del condensatore

Riassumiamo i due modi che abbiamo trovato per calcolare l'energia di un sistema di cariche, concettualmente profondamente diversi:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\tau} V \rho d\tau$$

In cui si calcola direttamente l'energia delle cariche

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} E_0^2 d\tau$$

Che invece esprime l'energia dello spazio vuoto in cui è presente un campo elettrico.

Useremo entrambi i modi per calcolarlo, vediamo il primo metodo. Il condensatore può essere schematizzato come due lastre di conduttore che si trovano a potenziale definito, V_1 e V_2 con due densità di carica σ_1 e σ_2 . L'energia associata all'intero sistema sarà la somma dell'energia associata a ciascuna delle due armature:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} V_1 \underbrace{\int_{S_1} \sigma_1 dS}_{Q_1} + \frac{1}{2} V_2 \underbrace{\int_{S_2} \sigma_2 dS}_{Q_2}$$

Ma stiamo parlando di un condensatore, ovvero due conduttori a induzione completa, per cui la carica che si induce sulle armature è uguale in modulo ma di segno opposto:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 = -Q_2 \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} Q \Delta V \end{aligned} \quad (3.7)$$

Chiaramente ricordandosi la definizione di capacità di un condensatore (3.2).

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Si può scrivere la (3.7) in altri modi del tutto equivalenti:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\Delta V^2 \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Ripeteremo ora lo stesso calcolo sfruttando invece solo le proprietà del campo elettrico. Per semplicità questa volta consideriamo il condensatore piano⁴.

Il campo elettrico generato da un condensatore piano è nullo fuori dal condensatore e pari a

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

All'interno del condensatore, per ricavare questo risultato basta sommare il campo generato da due distribuzioni di carica piana infinita oppure sfruttando le simmetrie del sistema per dedurre che all'interno del sistema il campo è uniforme, poiché per il teorema di Coulomb nelle prossimità delle armature questo vale $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, assume lo stesso valore in tutti i punti interni del condensatore, mentre all'esterno il condensatore è neutro, cioè $\sigma = 0$, e quindi il campo fuori è nullo per lo stesso motivo.

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_0^2 d\tau$$

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} d\tau$$

In teoria questo integrale va fatto su tutto lo spazio, all'infinito. In realtà la funzione integranda è nulla fuori dal condensatore (il campo elettrico è zero fuori dalle armature), per cui è come svolgere l'integrale solo sul volume del condensatore

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} \int_{\tau} d\tau$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{S \cdot d}{\varepsilon_0}$$

Ma $S\sigma$ è la carica di un armatura:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

Ricordiamo che la differenza di potenziale tra le armature è proprio

$$\Delta V = E_0 \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

Abbiamo proprio ritrovato la formula (3.7)

⁴Il discorso può essere rifatto in maniera più complessa per tutte le geometrie di condensatori, infatti il risultato ottenuto prima ha valenza generale, tuttavia è istruttivo vedere come compiere questo calcolo usando il campo elettrico.

3.7 Pressione elettrostatica

Prima di passare al calcolo della pressione di un condensatore e poi quella generica di un conduttore enunciamo a titolo di ricapitolazione un noto principio della fisica matematica.

Definizione 3.3 (Principio dei lavori virtuali) *In presenza di sole forze conservative e in un sistema isolato, possiamo immaginare di muovere un ente fisico di uno spostamento virtuale $\delta\vec{l}$ con infinita lentezza⁵, il lavoro virtuale che corrisponde a questo spostamento soddisfa la relazione:*

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{l} + dU = 0$$

Dal principio dei lavori virtuali segue immediatamente che:

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{l} = -dU = -\vec{\nabla}U \cdot \delta\vec{l}$$

Poiché $\delta\vec{l}$ è arbitrario, questa relazione vale lungo qualsiasi direzione. Da questo possiamo dedurre che:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Questo risultato, apparentemente ovvio, è valido in realtà soltanto per sistemi **conservativi** e **isolati**. Se la prima condizione non è un problema (il campo elettrico è conservativo), spesso si ha a che fare con sistemi non isolati per cui la relazione è leggermente differente.

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U$$

La dimostrazione di questa formula è una banale conseguenza del principio dei lavori virtuali applicato a sistemi non isolati, la dimostreremo più avanti quando sarà usata.

3.7.1 Pressione di un condensatore isolato

Calcoliamo ora la forza che agisce sulle armature del condensatore. Per semplicità consideriamo il condensatore piano, su un armatura agisce una forza F_x :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right)$$
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{E_0 \cdot d} = \frac{Q}{\sigma \cdot d} \epsilon_0$$

⁵Così da trascurare l'energia cinetica, un po' come si fa in termodinamica per descrivere le trasformazioni reversibili, in cui ogni punto è istantaneamente all'equilibrio e il passaggio da un punto all'altro avviene al limite di velocità nulla.

$$C = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

Facciamo uno spostamento virtuale per capire come varia C al variare di x

$$C = \frac{S\varepsilon_0}{d+x}$$

$$F_x = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{S\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x}(d+x)$$

$$F_x = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{S\varepsilon_0}$$

Abbiamo trovato ora la forza che agisce sull'armatura. Questa forza è ortogonale alla superficie dell'armatura, è quindi una forza di pressione che viene esercitata sull'armatura, possiamo definire la pressione del condensatore lo scalare:

$$P = \frac{F_{\perp}}{S}$$

Calcoliamola:

$$P = \frac{F_x}{S} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q^2}{S^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0^2} \sigma^2$$

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}$$

Ma ricordiamo che in un condensatore piano vale che:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

Si noti l'analogia tra la pressione delle armature del condensatore e la densità di energia del conduttore!

In realtà il risultato che abbiamo raggiunto può essere dimostrato in linea molto più generale, come faremo nella prossima sezione.

3.7.2 Pressione di un conduttore isolato

Ora immaginiamo un conduttore secondo il modello dell'elettrostatica. Le cariche sono libere di muoversi lungo tutta la superficie del conduttore. Questo significa che su ogni elemento infinitesimo di superficie il resto delle cariche esercitano una forza che genera una pressione, come mostra bene la Figura 3.9.

Il campo elettrico nelle prossimità di dS è dato dal teorema di Coulomb:

$$\vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

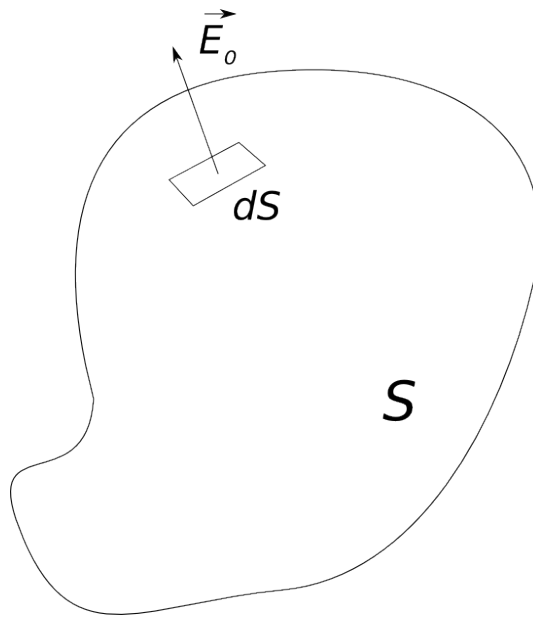


Figura 3.9: Il disegno mostra un conduttore carico, con il campo elettrico in prossimità della superficie generato da due contributi, quello della superficie dS e quello di tutto il resto della superficie $S - dS$.

Ma il campo elettrico possiamo scomporlo tra campo elettrico generato dall'elementino dS e dal resto della superficie:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_0^{(dS)} + \vec{E}_0^{(S-dS)}$$

Siamo però in grado di calcolare facilmente il campo elettrico dovuto a dS . Se infatti ci mettiamo in prossimità della superficie dS ad una distanza dalla superficie di un infinitesimo di ordine superiore alla grandezza lineare di dS possiamo considerare dS come un piano di carica infinita, che genera un campo elettrico pari a:

$$\vec{E}_0^{(dS)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Ma a questo punto si può calcolare il campo elettrico dovuto a tutto il resto della superficie:

$$\vec{E}_0^{(S-dS)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Calcoliamo quindi la forza che si esercita sull'elementino di conduttore dS :

$$d\vec{F} = \sigma dS \cdot \vec{E}_0 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \hat{n}$$

Calcoliamo la pressione che si esercita su dS , notando che $d\vec{F}$ è diretta proprio lungo la normale:

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}$$

Ricordiamo che per il teorema di Coulomb il campo elettrico immediatamente fuori dal conduttore è proprio:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

Abbiamo dunque generalizzato il caso visto prima nello specifico per il condensatore piano a qualunque sistema di conduttori **isolati**.

3.7.3 Sistemi non isolati

Proviamo a estendere ora il concetto nei casi di sistemi non isolati, ossia in presenza di strumenti che sono in grado di fornire o sottrarre cariche all'ambiente.

Questi sistemi sono chiamati *generatori*. Il più comune tipo di generatore è il generatore di tensione, che ha la funzione di mantenere una differenza di potenziale costante ai suoi capi.

Che succede se colleghiamo un generatore ai capi di un condensatore?

Proviamo a descrivere nuovamente la forza elettrostatica che si esercita sulle armature del condensatore ricorrendo al principio dei lavori virtuali per sistemi non isolati (Il δL è il termine di lavoro fornito dall'esterno):

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} + dU = \delta L$$

Dove δL è il lavoro infinitesimo fatto dal nostro generatore per mantenere costante la differenza di potenziale. Cerchiamo di stimare i vari termini:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} + d\left(\frac{1}{2}Q\Delta V\right) = d(Q\Delta V)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \Delta V dQ - \frac{1}{2}\Delta V dQ$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}\Delta V dQ = dU$$

Il risultato di collegare il condensatore con un generatore di tensione è quello di invertire il segno di dU

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla}U \cdot d\vec{l}$$

Poiché la relazione vale per ogni direzione $d\vec{l}$ segue che:

$$\vec{F} = +\vec{\nabla}U$$

3.7.4 Microfono e altoparlante

Arrivati a questo punto del corso siamo in grado di costruire un microfono e un altoparlante ideale. Il circuito consiste in un generatore di tensione collegato ad un condensatore. Una delle due armature del condensatore è molto flessibile, tanto da vibrare all'arrivo delle onde sonore. Vibrando viene modificata la distanza tra le due armature, poiché il generatore è collegato ad un generatore di tensione, ΔV rimane costante.

Questo significa che cambia la carica totale Q che si accumula sulle armature. L'affluire ed il defluire di cariche sulle armature del condensatore genera un segnale elettrico di cui può essere letta l'intensità attraverso un apposito apparecchio (l'amperometro). Che registra quindi il movimento delle armature.

Allo stesso modo è possibile nuovamente tradurre questo segnale elettrico in un'onda acustica usando un generatore di tensione di cui possiamo far variare ΔV . Facendo variare la differenza di potenziale, si opera una forza F variabile sulle lastre del condensatore in modo che l'armatura flessibile oscilli producendo le onde acustiche desiderate.

3.8 Il problema generale dell'elettrostatica del vuoto

A questo punto del corso abbiamo tutti gli strumenti per affrontare il problema generale dell'elettrostatica del vuoto.

Il problema è il seguente: Dato un sistema di conduttori e isolanti, di nota carica e geometria nello spazio, è possibile calcolare il campo elettrico che questi generano in tutto lo spazio?

In altre parole in che condizioni sono in grado di risolvere le due equazioni fondamentali dell'elettrostatica del vuoto?

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla}V$$

Notiamo che queste due equazioni possono essere scritte in una forma ulteriormente più compatta.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'espressione appena scritta può essere abbreviata facendo uso dell'operatore differenziale laplaciano:

Definizione 3.4 (Laplaciano) L'operatore differenziale ∇^2 , detto **laplaciano**, corrisponde alla seguente scrittura:

$$\nabla^2 w = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.8)$$

L'equazione (3.8) è detta equazione di **Poisson**. Il problema generale dell'elettrostatica dunque si riduce a capire in che condizioni siamo in grado di risolvere l'equazione di Poisson, e capire quando è unica.

Se è nota la distribuzione delle cariche ρ e non siamo in presenza di conduttori, conosciamo già una soluzione dell'equazione di Poisson, ed è facile intuire che sia l'unica:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

Se siamo in presenza di conduttori le cose si complicano leggermente. Tuttavia possiamo analizzare un caso interessante, ossia cercare di trovare un'espressione del potenziale in regioni dello spazio in cui non sono presenti cariche⁶.

Prendiamo quindi due ipotesi:

1. Il potenziale a distanze grandi ha un'espressione del tipo $V \propto \frac{1}{r^2}$
2. La densità di carica ρ è nulla
3. Sono noti i valori dei potenziali in diversi punti del problema (all'infinito, nei conduttori e nelle cariche)

Risolvere il problema di Poisson con queste premesse è detto soluzione del problema di Dirichlet, e la nuova equazione a cui si giunge prende il nome di equazione di **Laplace**:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.9)$$

Si può dimostrare (ma noi non lo faremo) che l'equazione (3.9), con i requisiti dati dal problema di Dirichlet, ammette sempre una soluzione, e questa è unica!

⁶La stragrande maggioranza dei conti di interesse corrisponde proprio a questa situazione: si tratta di cercare un'espressione del campo elettrico generato da una qualunque distribuzione di cariche al di fuori della distribuzione stessa, anche in presenza di conduttori vicini.

Trovare quale sia questa soluzione dipende dalle varie geometrie del sistema, e non è detto che sia sempre banale, tuttavia il teorema di esistenza e unicità della soluzione di questa equazione ci è di grande aiuto, poiché una volta che abbiamo trovato una soluzione, ci assicura che questa è l'unica soluzione possibile.

È possibile chiaramente invertire il problema di Dirichlet e chiedersi che succede se conosciamo tutte le cariche dei conduttori, ma non il loro potenziale.

Ebbene notiamo subito che poiché per un sistema di conduttori è in generale sempre valida la relazione:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} V_j$$

Con il determinante della matrice $\det(c_{ij}) \neq 0$, possiamo sempre ricavare dalle cariche il potenziale e quindi risolvere il problema di Dirichlet.

Il problema impostato con queste altre premesse è detto problema di **Neumann**, e ammette anche questo una soluzione.

3.8.1 Risoluzione con le cariche immagine

Un metodo molto semplice che può essere usato per risolvere il problema generale dell'elettrostatica è quello di sfruttare il sistema delle cariche immagine.

Questo metodo può essere usato solo se siamo in presenza di particolari simmetrie.

Immaginiamo ad esempio di avere un piano conduttore infinito, collegato a massa e tenuto a potenziale nullo. Immaginiamo di avvicinare una carica puntiforme $+q$ al piano (Figura 3.10).

La presenza di $+q$ indurrà sul piano una certa densità superficiale di carica σ molto particolare, non solo, la presenza del collegamento a massa farà scaricare una parte del piano conduttore, alterandone anche la carica.

Trovare quindi il campo elettrico in ogni punto dello spazio sembrerebbe cosa assai difficile, non sapendo neanche come si è caricato il piano, in generale infatti otteniamo che il potenziale in un punto P non appartenente al piano e alla carica $+q$ è:

$$V(x, y, z) = V_{carica} + V_{piano}$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \int \frac{\sigma(y', z') dy' dz'}{\sqrt{x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right]$$

Dove σ è una funzione incognita.

Tuttavia possiamo ricorrere ad un semplice artificio matematico per risolvere subito il problema.

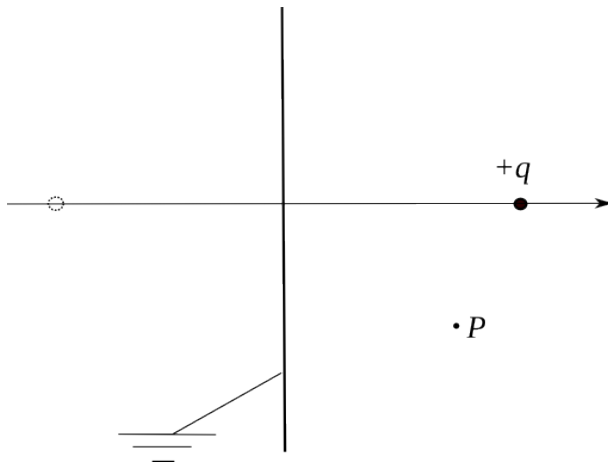


Figura 3.10: Calcolo del campo elettrico nel punto P generato dalla carica puntiforme q e dal piano conduttore messo a massa.

Se ad esempio immaginassimo di porre una carica puntiforme $-q$ in posizione simmetrica rispetto al piano della carica $+q$, e immaginassimo che il piano non ci fosse, tutti i punti lungo il piano $x = 0$ sarebbero a potenziale nullo, non solo, il campo elettrico sarebbe in ogni punto normale al piano:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Abbiamo trovato un potenziale che soddisfa tutti i requisiti del problema di Dirichlet, ma poiché esiste il teorema di esistenza e di UNICITÀ della soluzione, questa è anche l'unica soluzione possibile! Abbiamo quindi trovato un'espressione del potenziale in tutti i punti dello spazio. In realtà ovviamente questa espressione non ha senso nei punti che si trovano nella regione di spazio in cui abbiamo messo la carica immagine, ma solo fuori, tuttavia non è difficile dedurre che in quella regione il campo elettrico deve essere nullo, poiché il piano è collegato a massa.

Non solo, avendo trovato l'espressione del potenziale (e quindi implicitamente quella del campo elettrico) conosciamo anche la distribuzione di carica σ che si induce nel piano: basta sfruttare il teorema di Coulomb per ricavarla dal campo elettrico:

$$\sigma = \epsilon_0 E_0 = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Capitolo 4

Elettrostatica nei mezzi materiali

Abbiamo fino ad ora discusso l'elettrostatica partendo dal presupposto che tra le cariche e i conduttori ci fosse il vuoto. Compito di questo capitolo è quello di riscrivere tutta l'elettrostatica facendo cadere questa ipotesi.

Supponiamo ora di immergere tutto il nostro sistema elettrostatico in un mezzo materiale che abbia la caratteristica di essere isolante¹.

Vediamo subito l'esempio di un condensatore piano. Facciamo l'esperimento di porre un mezzo non conduttore, con le caratteristiche fisiche di essere **omogeneo** e **isotropo**², all'interno delle piastre del condensatore.

Abbiamo visto nel caso del vuoto dalla definizione 3.2 come viene definita la capacità di un condensatore:

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V_0}$$

Se ora poniamo il dielettrico tra le piastre e misuriamo nuovamente la differenza di potenziale ci accorgiamo che essa è cambiata leggermente

$$\Delta V \neq \Delta V_0$$

Mentre la carica Q è rimasta invariata³. Dalla definizione di capacità otteniamo che anche la capacità sarà variata:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \neq \frac{Q}{\Delta V_0} = C_0$$

¹Altrimenti le cariche si muoverebbero attraverso questo mezzo fino a portarlo in una condizione in cui tutto ciò che si trova all'interno sia equipotenziale.

²L'isotropia dei materiali è una proprietà della struttura molecolare che ci assicura essere simmetrica rispetto alle varie direzioni, sono isotropi tutti i materiali *amorfi*, come liquidi e gas, e alcuni solidi che non possiedono struttura cristallina, come il vetro.

³Il dielettrico deve essere un isolante

Chiamiamo ε_r il coefficiente di proporsionalità di C :

$$C = \varepsilon_r C_0$$

In generale la grandezza ε_r è un numero puro, maggiore di uno, ed è detto **costante dielettrica relativa del mezzo**⁴

Il fatto che sia cambiata la differenza di potenziale implica che è variato anche il campo elettrico

$$C = \varepsilon_r C_0 \quad \Delta V = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r}$$

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Questo risultato è vero solo per materiali **omogenei** e **isotropi**, adesso ricaveremo un modello microscopico del tutto generale per spiegare questo fenomeno, e estendibile facilmente anche ad altri materiali.

4.1 Dipolo di deformazione

Vediamo ora di capire che succede all'interno di alcuni gas particolari, come ad esempio l'elio, che sono molecole simmetriche. Questo modello è applicabile per quei materiali con ε_r molto vicino ad 1, per altri come l'acqua occorre ricorrere a modelli leggermente differenti.

Modellizziamo il nostro atomo come un nucleo positivo all'interno, circondato da una nube negativa di forma sferica centrata nel nucleo.

Proviamo ad osservare ciò che accade se l'atomo è sottoposto ad un certo campo elettrico.

Come si vede bene in Figura 4.1 l'azione del campo elettrico sull'atomo ha l'effetto di decentrare il nucleo. Sia z il numero atomico, e la carica dell'elettrone, il momento di dipolo che viene a crearsi è pari a:

$$\vec{p} = ze\vec{\delta}$$

Facciamo una semplice stima di δ , poiché l'atomo è in equilibrio nella nuova posizione basta uguagliare la forza agente sul nucleo a causa del campo elettrico, con la forza di richiamo della nube elettronica.

Sia ρ la densità di carica della nube elettronica:

$$\rho = \frac{ze}{\frac{4}{3}\pi a_0^3}$$

⁴Ovviamente ε_r dipende dal particolare mezzo che si sta utilizzando, e varia considerevolmente se si parla di Elio (molto prossima a 1) o di materiali polarizzati come l'acqua (circa 80).

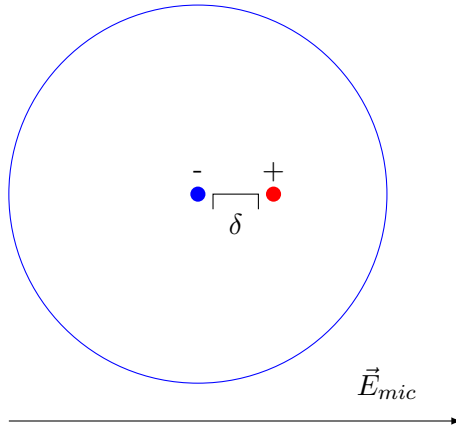


Figura 4.1: Schema di come reagisce il nostro modellino di atomo all'azione di un campo elettrico, il baricentro della nube elettronica carica negativamente e quella del nucleo carica positivamente si spostano di un fattore δ .

Dove a_0 è il raggio dell'atomo. Ricaviamo con il teorema di Gauss il campo elettrico agente sul nucleo, considerando il flusso attraverso una superficie sferica di raggio δ con origine nel centro della nube elettronica:

$$\underbrace{E \cdot 4\pi\delta^2}_{\Phi_{S_\delta}(\vec{E})} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\delta^3}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\delta$$

Ora scriviamo la condizione di equilibrio:

$$zeE_{mic} = zeE$$

$$zeE_{mic} = ze\frac{\rho}{3\epsilon_0}\delta$$

$$\delta = \frac{3\epsilon_0 E_{mic}}{\rho}$$

$$\delta = \frac{4\pi\epsilon_0 a_0^3 E_{mic}}{ze}$$

Da cui il momento di dipolo associato al singolo atomo è pari a:

$$\vec{p} = ze\vec{\delta} = 4\pi a_0^3 \vec{E}_{mic}$$

Come si vede il campo elettrico è direttamente proporzionale al dipolo indotto sull'atomo per deformazione:

$$\vec{p}_d \propto \vec{E}_{mic}$$

$$\vec{p}_d = \alpha_d \vec{E}_{mic} \quad (4.1)$$

Dove abbiamo chiamato con α_d la costante espressa precedentemente, viene chiamata costante di *polarizzabilità* di una molecola.

4.2 Momento di dipolo medio parallelo

Consideriamo ora un materiale formato da molecole polari, con per semplicità tutte momento di dipolo p , in assenza di un campo elettrico esterno i vari dipoli avranno direzioni e versi diversi che in totale daranno un dipolo complessivo nullo! Ma in presenza di un campo esterno tenderanno ad allinearsi parallelamente al campo elettrico; in generale non si avranno mai tutti i dipoli perfettamente orientati in quanto gli urti causati dall'agitazione fanno continuamente cambiare direzione ai dipoli. A livello macroscopico

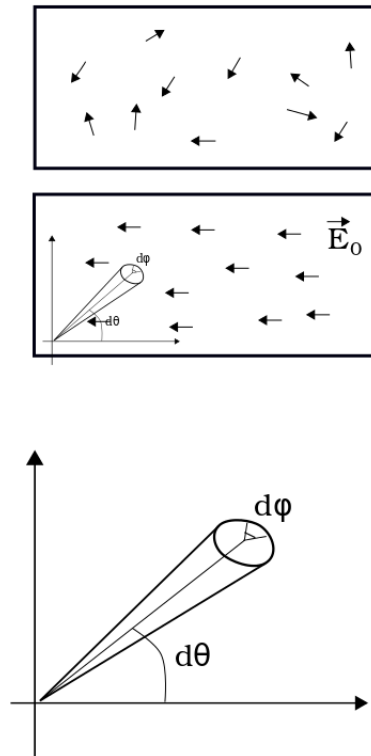


Figura 4.2: Schematizzazione dei dipoli e angolo solido

tuttavia si misura un momento non nullo parallelo al campo, vediamo ora come esprimerlo in formule! Prendiamo la funzione di distribuzione di probabilità di Boltzmann e ricordiamo che data una funzione di probabilità $f(x)$

il valor medio è definito come:

$$\bar{x} = \int x f(x) dx$$

Allora data la funzione di Boltzmann $P(U) = Ae^{-\frac{U}{kT}}$, dove $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{mic} = -pE_{mic} \cos \theta$,⁵, avremo:

$$\langle p_{//} \rangle = \int dP = \int \overbrace{p \cos \theta}^{\Omega} \overbrace{Ae^{\frac{pE_{mic} \cos \theta}{kT}}}_{f(\Omega)} d\Omega$$

Ora dobbiamo esprimere Ω in funzione di θ e valutare A, dal disegno (vedi fig 4.2) abbiamo $\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, mentre per A, imponendo la condizione di normalizzazione, ossia che la probabilità su tutto lo spazio debba essere uno, otteniamo:

$$1 = \int dP = A \int e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega \implies A = \frac{1}{\int e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega}$$

Unendo il tutto abbiamo:

$$\langle p_{//} \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi p \cos \theta \sin \theta e^{\frac{pE_{mic} \cos \theta}{kT}} d\theta}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta e^{\frac{pE_{mic} \cos \theta}{kT}} d\theta}$$

Non resta che calcolarlo... vediamo come semplificare un po le cose! Intanto l'angolo ϕ non compare da nessuna parte quindi il suo contributo all'integrale sarà 2π , che comparando sia al numeratore che al denominatore si può semplificare, poi effettuiamo un cambio di variabile, $x = \cos \theta$ da cui $dx = -\sin \theta d\theta$ con i nuovi estremi di integrazione $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, ed infine chiamiamo $a = \frac{pE_{mic}}{kT}$. L'integrale diventa:

$$\langle p_{//} \rangle = p \frac{\int_{-1}^1 x e^{ax} dx}{\int_{-1}^1 e^{ax} dx}$$

L'integrale ora è notevolmente più semplice, risolto (il numeratore per parti) ha la forma:

$$\langle p_{//} \rangle = p \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} = p \left[\coth a - \frac{1}{a} \right]$$

La quantità $L(a) = \left[\coth a - \frac{1}{a} \right]$ viene chiamata funzione di Langevin La

⁵il campo elettrico considerato è quello locale ossia quello che sente il singolo dipolo come unione del campo elettrico esterno e quello generato da tutti gli altri dipoli; vedremo in seguito caso per caso come esprimere il campo locale E_{mic}

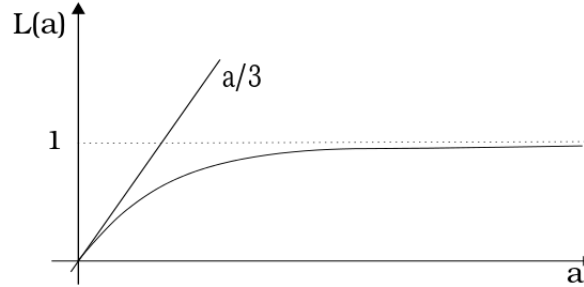


Figura 4.3: Funzione di Langevin

funzione ha un asintoto orizzontale che vale 1 quando a tende all'infinito, in questo caso il momento è parallelo al campo elettrico; essendo $a = \frac{pE_{mic}}{kT}$, il rapporto tende ad infinito o quando E è grandissimo o quando T è lo zero assoluto. In tutti e due i casi ci aspettiamo che il momento sia parallelo al campo, infatti o quest'ultimo è enorme oppure la temperatura è prossima allo zero e quindi l'agitazione termica non rimescola le molecole! Ora se sviluppiamo in serie la funzione otteniamo:

$$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \frac{2a^5}{945} \dots$$

per $a \ll 1$ (vero nel caso di campi elettrici ordinari) possiamo fermarci al primo ordine e scrivere:

$$\langle p_{//} \rangle = p \frac{a}{3} = \frac{p^2}{3kT} E_{mic} = \alpha_0 E_{mic}$$

dove $\alpha_0 = \frac{p^2}{3kT}$, è chiamato coefficiente di orientamento.

4.3 Polarizzazione ed intensità di polarizzazione

Finora abbiamo studiato sistemi elettrostatici immersi nel vuoto, con cariche localizzate su isolanti oppure su conduttori, e le cariche si presentavano o depositate o indotte (nei conduttori) da altre cariche presenti nel sistema. Ora vogliamo vedere cosa succede a sistemi in cui sono presenti dielettrici, dove agisce il fenomeno della polarizzazione. Presentiamo per semplicità il caso di un condensatore piano, tra le cui armature è presente un dielettrico. La carica depositata sulle armature determinerà una polarizzazione del materiale, come mostrato in figura 4.4. Se il dielettrico è omogeneo al suo interno le cariche indotte per polarizzazione daranno un contributo nullo e ci sarà una carica complessiva diversa da zero solo sulle superfici di contatto con le armature, avremo cioè una σ_p^- sull'armatura positiva e una σ_p^+

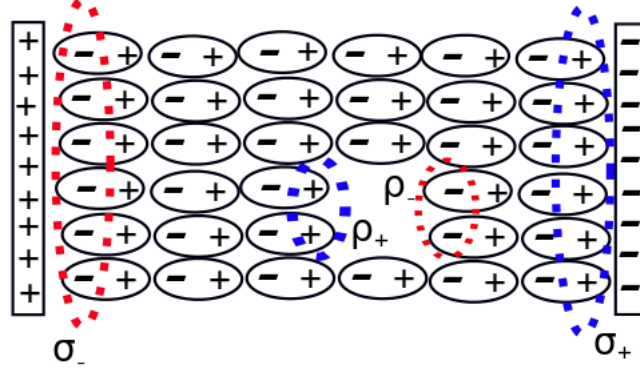


Figura 4.4: Dielettrico polarizzato

su quella negativa. Se invece il mezzo non è omogeneo ma presenta cavità vuote o è formato da materiali diversi, avremo una densità di carica interna ρ_p . Vediamo come stimare queste quantità, per farlo prendiamo un caso più generale; consideriamo una distribuzione di dipoli (ad esempio un dielettrico polarizzato), possiamo definire la quantità intensità di polarizzazione \vec{P} come il rapporto tra la sommatoria degli n dipoli contenuti in un volume τ , nel limite di $\tau \rightarrow 0$:

$$\vec{P} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^n \vec{p}_i}{d\tau} = \frac{dN}{d\tau} \langle \vec{p} \rangle$$

da cui $d\vec{p} = \vec{P}d\tau$, ora il potenziale generato da un dipolo posto nell'origine del sistema di riferimento e nel vuoto(possiamo assumere che le molecole con momento di dipolo del dielettrico siano nel vuoto!), vale:

$$V(\vec{r})_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

ora se invece prendiamo un dipolo identificato con \vec{r}' dall'origine e lo indichiamo con $p' = p(r')$ abbiamo che:

$$dV(\vec{r})_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\vec{P}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \vec{P}' \cdot \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau' =$$

Ora ricordando che vale l'identità $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ possiamo riscrivere il potenziale come:

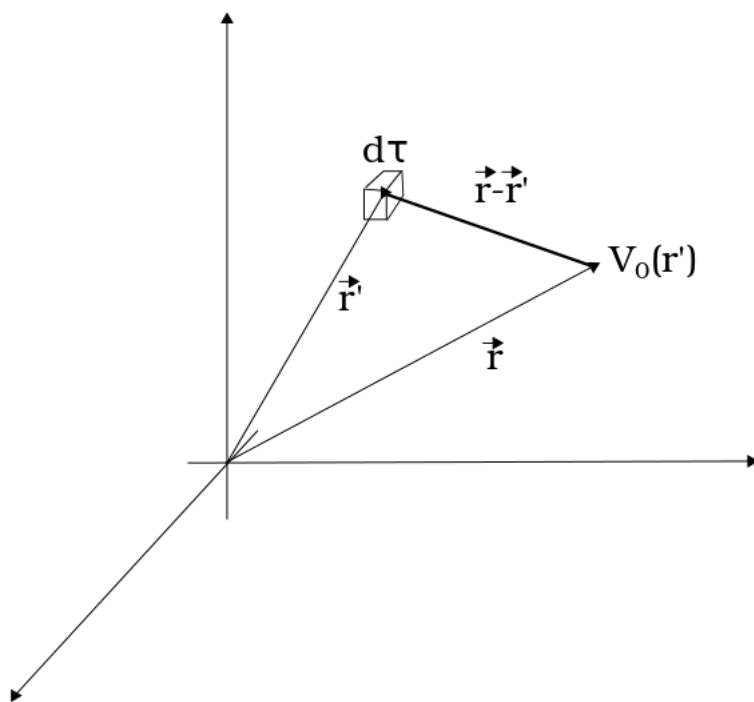


Figura 4.5: Potenziale in approssimazione di dipolo di un dipolo a distanza r' dall'origine

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\tau} \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{div \left(\frac{P'}{|r - r'|} \right)} d\tau' - \int_{\tau} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}') d\tau' \right]$$

applicando il teorema della divergenza abbiamo che il primo integrale sul volume di può riscrivere in termini della superficie chiusa che racchiude le cariche!

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\Sigma} \frac{\vec{P}' \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' - \int_{\tau} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}') d\tau' \right]$$

Ora dall'equazione di Poisson ho che $\nabla^2 V_0 = -\frac{\rho_p}{\epsilon_0}$, da cui ottengo:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\Sigma} \frac{\sigma_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' - \int_{\tau} \frac{\rho_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \right]$$

confrontando i due potenziali che devono essere uguali si osserva che dovranno valere le relazioni:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -div(\vec{P})$$

Dove con la prima si trova la densità superficiale e con la seconda quella interna al materiale. Si vede subito che in un dielettrico omogeneo dove P è costante la densità interna è nulla, in accordo con quanto aspettato!

4.4 Problema generale dell'elettrostatica nei dielettrici

Abbiamo ottenuto nella sezione precedenti due formule molto importanti:

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

In cui ρ_p è la densità di carica polarizzata per unità di volume, σ_p è la densità superficiale di carica polarizzata che si distribuisce sulla superficie del materiale dielettrico.

A questo punto la prima equazione di Maxwell per esprimere il campo elettrico deve tenere conto di tutte le cariche che si trovano nello spazio. Compreso quelle della polarizzazione.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

Dove ρ è la densità di carica localizzata (presente anche in assenza di dipolo).

Da questa espressione, con un po' di algebra possiamo ricavare una nuova equazione:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho_p &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho\end{aligned}$$

Definizione 4.1 (Vettore di spostamento) Si definisce D il **vettore di spostamento**⁶, la grandezza vettoriale ottenuta in questo modo:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Alla luce della definizione 4.1 possiamo riscrivere la prima equazione di Maxwell nel caso dei dielettri:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.2)$$

Si noti come in questa relazione ρ siano solo le cariche localizzate, e dunque il vettore \vec{D} non dipende dalle cariche di polarizzazione, non ha quindi nessuna dipendenza dal mezzo che stiamo tenendo in considerazione. In particolare, da questa proprietà della divergenza di \vec{D} segue direttamente il teorema di Gauss per \vec{D} , che ovviamente si esprime come:

$$\Phi_{S_c}(\vec{D}) = \int_{S_c} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \sum_{i=1}^n Q_i$$

Dove $\Phi_{S_c}(\vec{D})$ rappresenta il flusso del campo elettrico lungo qualunque superficie chiusa S_c , è pari alla somma delle cariche interne del sistema.

Se il vettore \vec{D} è di per se indipendente dal mezzo, nella sua espressione si nasconde l'informazione sul mezzo materiale e in particolare nell'espressione che lega \vec{E} a \vec{P} , per poter dire qualcosa su \vec{E} (che è la grandezza che ci interessa in definitiva) occorre fare alcune ipotesi su \vec{P} .

Risolvere il problema generale dell'elettrostatica nei mezzi equivale quindi a trovare un'espressione che mi consenta di riuscire a tirare fuori \vec{E} dalla relazione:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

⁶Alcuni testi vecchi lo chiamano vettore di induzione.

4.4.1 Materiali omogenei isotropi

Ridiscutiamo i risultati da cui eravamo partiti all'inizio. Sperimentalmente si osserva un aumento della capacità del condensatore quando tra le armature poniamo un mezzo materiale non conduttore.

Questo aumento può essere espresso con una costante adimensionale, detta costante dielettrica relativa del mezzo in questo modo:

$$C = \varepsilon_r C_0$$

Dove C è il valore della capacità del condensatore immerso nel mezzo, e C_0 è il valore della stessa capacità misurata nel vuoto.

Da queste proprietà ricaviamo subito che:

$$\frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_r \frac{Q}{\Delta V_0}$$
$$\Delta V = \frac{1}{\varepsilon_r} \Delta V_0$$

Da cui a sua volta otteniamo la relazione:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_0$$

Dal teorema di Coulomb sappiamo però che:

$$\vec{E} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma + \sigma_p}{\varepsilon_0}$$

Questo ci dice che il valore della densità superficiale di carica nel condensatore è variato. Questa variazione è dovuta alla presenza di una densità superficiale di carica aggiuntiva σ_p di polarizzazione del mezzo, data dalla relazione:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Da tutte queste osservazioni possiamo provare a stimare la nostra σ_p

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\varepsilon_r}$$
$$\sigma + \sigma_p = \frac{\sigma}{\varepsilon_r}$$
$$\sigma_p = \sigma \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right)$$

Notiamo che siccome ε_r è sempre maggiore di 1⁷, σ e σ_p sono opposte in segno, questo ci sta dicendo che il dielettrico si polarizza generando una distribuzione di carica σ_p addossata all'armatura del condensatore ma di segno opposto, abbassando di fatto l'intensità del campo elettrico generato.

⁷Il condensatore quando viene immerso in un materiale isolante registra sempre un aumento della capacità rispetto al vuoto.

Consideriamo ora i moduli delle due grandezze e otteniamo:

$$|\sigma_p| = |\sigma| \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$$

Nel caso del condensatore, e di un dielettro isotropo, il verso di polarizzazione delle molecole è proprio quello del campo elettrico, che è perpendicolare alle superfici delle armature, per cui il valore:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Diventa semplicemente:

$$|\sigma_p| = |\vec{P}|$$

Dove il segno positivo lo abbiamo quando \vec{P} e \hat{n} sono concordi⁸, mentre il segno negativo lo abbiamo quando i due vettori sono discordi⁹. Questo concorda perfettamente con quanto avevamo dedotto sperimentalmente dalla costante ε_r .

$$|\vec{P}| = |\sigma| \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \quad (4.3)$$

Facciamo qualche altra considerazione sul campo elettrico:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

Poiché \vec{E} e \vec{P} hanno la stessa direzione possiamo riscrivere la (4.3) in questo modo:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$$

A questo punto introduciamo la grandezza macroscopica χ :

Definizione 4.2 (Suscettività dielettrica del mezzo) *Si definisce la grandezza χ , **Suscettività dielettrica del mezzo** in questo modo:*

$$\chi = \varepsilon_r - 1$$

⁸Questo avviene sull'armatura carica negativamente, poiché il campo elettrico è diretto verso l'esterno del condensatore come la normale uscente dalla superficie che delimita il mezzo materiale.

⁹Sull'armatura carica positivamente

Per come avevamo definito la polarizzabilità del mezzo α si può intuire che c'è una stretta relazione tra la grandezza χ e il suo corrispondente microscopico α . In realtà spesso la legge che lega tra loro queste grandezze non è semplice e bisogna tenere conto delle differenze che vi sono tra il campo elettrico \vec{E}_{mic} che agisce sulla singola molecola (influenzato fortemente dalle molecole intorno) e quello \vec{E} , generato soltanto dalle cariche localizzate o di polarizzazione.

Per poter scrivere l'espressione finale di \vec{P} :

$$\vec{P} = \varepsilon_r \chi \vec{E}$$

Abbiamo risolto il problema generale nei casi di materiali isotropi, infatti a questo punto segue subito che:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Che unita con la relazione:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Dove ρ rappresentano solo le cariche localizzate, risolve il problema dell'elettrostatica.

4.4.2 Esempi notevoli

Esaminiamo subito alcuni casi molto semplici: una carica Q immersa in un mezzo isolante con costante dielettrica ε_r .

Prendiamo una superficie sferica chiusa di raggio r centrata nella carica. Poiché vale la relazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, allora possiamo applicare il teorema di Gauss per il vettore \vec{D} :

$$\begin{aligned} \Phi_{Sc}(\vec{D}) &= Q \\ D 4\pi r^2 &= Q \\ D &= \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \end{aligned}$$

Da qui ricaviamo subito il campo elettrico con la formula (4.4):

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} Q r^{-2}$$

Vediamo ora un altro esempio interessante: Una carica Q che si trova nel vuoto, in una bolla circondata interamente da un materiale isolante di costante dielettrica ε_r , come mostrato in Figura 4.6.

Il campo elettrico generato dalla carica Q polarizza il dielettrico, che genera una densità superficiale di carica negativa σ_p sul bordo della bolla

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

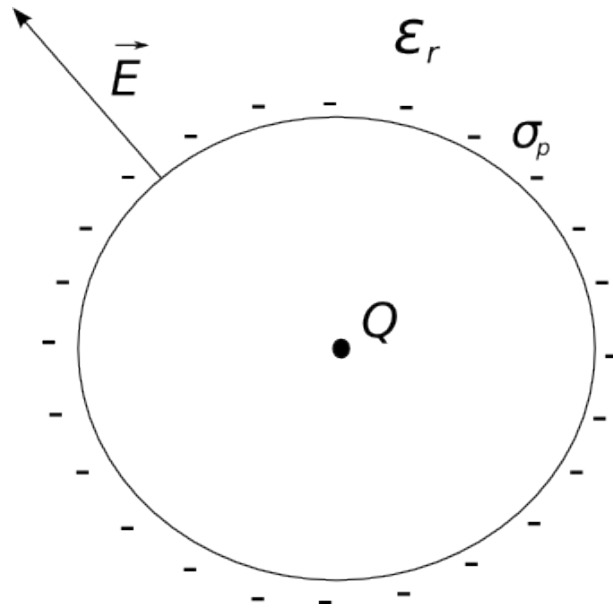


Figura 4.6: Schema di una carica situata in una bolla di vuoto circondata da un mezzo isolante, che si polarizza formando una densità di carica opposta a Q sul bordo della bolla.

Conoscendo già il valore del campo elettrico, stimato nell'esercizio precedente,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n}$$

Poiché il mezzo materiale occupa tutto lo spazio al di fuori della bolla, il vettore \hat{n} uscente dalla superficie che racchiude il mezzo è diretto verso l'interno della bolla, è quindi antiparallelo al vettore \hat{r} , e il loro prodotto scalare genera un segno meno, che descrive quantitativamente perché la carica di polarizzazione è di segno opposto a quella Q .

$$\sigma_p = \frac{1 - \epsilon_r}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{r^2}$$

Calcoliamo la carica globale di polarizzazione integrando σ_p su tutta la superficie:

$$Q_p = 4\pi r^2 \sigma_p = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} Q$$

Tutto va all'interno del dielettrico come se a generare il campo ci fosse una carica Q^* :

$$Q^* = Q + Q_p = Q \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)$$

$$Q^* = \frac{Q}{\epsilon_r}$$

Come del resto era facilmente intuibile.

4.5 Superficie di separazione tra mezzi isolanti

Rimaniamo nelle condizioni di trattare solo materiali omogenei isotropi, cosa accade al campo elettrico nel passaggio attraverso una superficie di separazione tra due mezzi dielettrici differenti?

Possiamo provare a risolvere questo problema sfruttando le proprietà del campo elettrico e del vettore di spostamento \vec{D} enunciate nel paragrafo 4.4.

Supponiamo non siano presenti tra le superfici di separazione cariche isolate¹⁰.

Seguiamo un ragionamento molto simile a quello usato per dimostrare il teorema di Coulomb (3.1).

Calcoliamo la circuitazione del campo elettrico in un percorso che comprende le superfici di separazione come mostra la Figura 4.7.

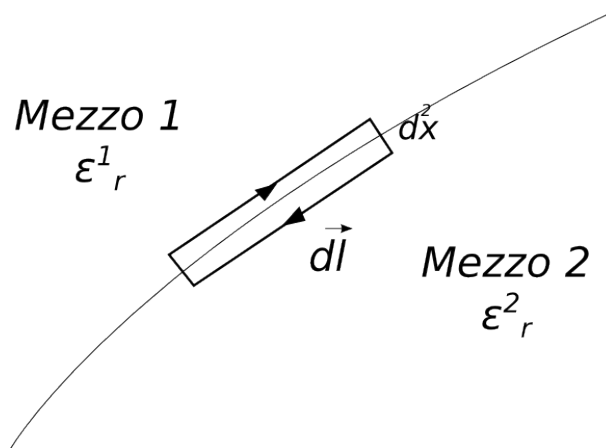


Figura 4.7: Circuitazione del campo elettrico in un percorso con due lati paralleli alla superficie di separazione, e gli altri due di lunghezza infinitesima di ordine superiore (trascurabile), ragionamento analogo a quello fatto in Figura 3.2.

Poiché il campo elettrico è conservativo, la circuitazione totale è nulla. Siccome i tratti che attraversano la superficie del conduttore sono di natura infinitesima di ordine superiore possiamo trascurare il contributo della

¹⁰Altrimenti il problema deve essere trattato seguendo lo stesso ragionamento, ma ricordandosi che $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \neq 0$.

circuitazione in quei tratti¹¹:

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

Ma i vettori $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ sono uguali in modulo e opposti in verso, e hanno direzione tangente alla superficie di separazione, chiamando con E_t la componente del campo elettrico tangente alla superficie, possiamo dedurre che:

$$\begin{aligned} dl (E_{1t} - E_{2t}) &= 0 \\ E_{1t} &= E_{2t} \end{aligned} \quad (4.5)$$

L'equazione 4.5 ci dice che la componente tangente alle superfici di separazione si conserva. Per arrivare all'altra equazione sulle componenti normali occorre sfruttare il teorema di Gauss. Prendiamo una superficie cilindrica infinitesima anche questa, come mostra Figura 4.8.

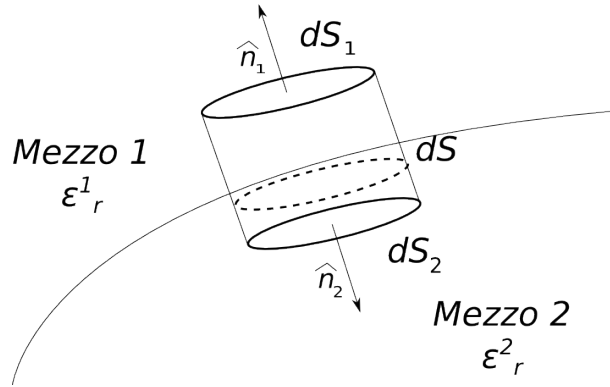


Figura 4.8: Calcolo del flusso attraverso la superficie chiusa cilindrica tra i due mezzi, valgono le stesse considerazioni fatte per la Figura 3.3.

Per le stesse considerazioni fatte nella nota 11 il flusso attraverso la superficie laterale è trascurabile, rimangono solo i due contributi legati alle superfici dS_1 e dS_2 , sfruttiamo la relazione:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{D}_1 \cdot dS_1 \hat{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot dS_2 \hat{n}_2 &= 0 \\ dS_1 &= dS_2 = dS \end{aligned}$$

¹¹È naturale pensare che comunque il campo elettrico non abbia nessuna singolarità in quei tratti, in quanto ci siamo messi nell'ipotesi di non avere cariche isolate sulla superficie di separazione. È quindi possibile maggiorare il modulo del campo elettrico con un valore M reale, e la circuitazione in quei tratti risulta sempre minore di Md^2x , poiché d^2x posso sceglierlo piccolo a piacere, questa circuitazione da contributo nullo.

Ricordiamoci che i versori \hat{n}_1 e \hat{n}_2 sono le normali uscenti dalla superficie, e quindi antiparalleli:

$$\begin{aligned} dS (D_{1n} - D_{2n}) &= 0 \\ D_{n1} &= D_{n2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'equazione 4.6 unita con la 4.5 risolvono completamente il problema del comportamento del campo elettrico nei pressi della superficie di separazione¹². Notiamo subito che studiare quello che avviene al campo elettrico in punti lontani dalla superficie di separazione può essere estremamente complesso, poiché generalmente la presenza di cariche localizzate¹³ induce una densità di carica di polarizzazione σ_p sulle superfici di separazione tra i due dielettrici, che generalmente sarà non uniforme, modificando profondamente le linee di forza del campo. Come al solito questo tipo di problema può essere studiato con il metodo della carica immagine, sfruttando l'unicità delle soluzioni dell'equazione di Laplace se si indovina la posizione della carica immagine, all'interno dei due dielettrici, ma sarà un problema di trattazione non banale.

Risolviamo adesso quello che avviene nelle immediate vicinanze delle superfici di separazione nel caso di materiali omogenei isotropi:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Possiamo chiederci con che angolo sono deviate le due linee di forza, facciamo riferimento ai dati di Figura 4.9.

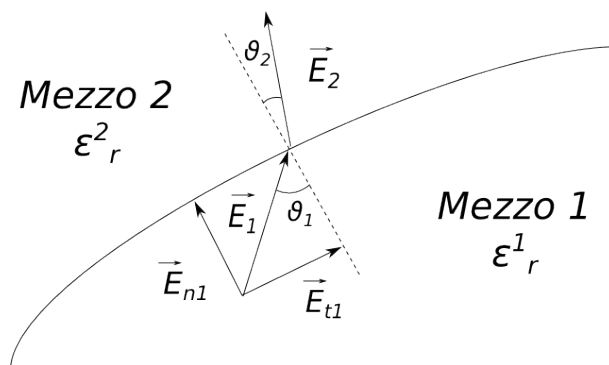


Figura 4.9: Rifrazione del campo elettrico nel passaggio tra un mezzo e un altro con differente costante dielettrica.

$$\begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{n1} &= \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_{n2} \end{aligned}$$

¹²Questa equazione vale solo nel caso in cui non ci siano cariche localizzate sulla superficie di separazione.

¹³Lontane dalla superficie di separazione

Vediamo di calcolare le tangenti di ϑ_1 e di ϑ_2 dalla figura:

$$\begin{aligned}\tan \vartheta_1 &= \frac{E_{1t}}{E_{1n}} & \tan \vartheta_2 &= \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \\ \frac{\tan \vartheta_2}{\tan \vartheta_1} &= \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \cdot \frac{E_{1n}}{E_{1t}} & E_{t1} &= E_{t2} & \frac{E_{n1}}{E_{n2}} &= \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \\ \frac{\tan \vartheta_2}{\tan \vartheta_1} & & & & & \\ & \frac{\tan \vartheta_2}{\tan \vartheta_1} & & = & & \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \\ \tan \vartheta_2 &= \tan \vartheta_1 \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\end{aligned}$$

Questo effetto è detto **rifrazione** delle linee di forza del campo elettrico, e discende direttamente dalle proprietà intrinseche del campo stesso.

Si supponga ora di disporre di un condensatore piano riempito con due differenti materiali isolanti, e di avere la superficie di separazione parallela alle armature, poiché l'unica componente che sopravvive è quella normale alla superficie non si osserva il fenomeno della rifrazione, ma si conserva il vettore \vec{D} nel passaggio tra un mezzo e l'altro:

$$\begin{aligned}\vec{D}_1 &= \vec{D}_2 \\ \varepsilon_{r1} \vec{E}_1 &= \varepsilon_{r2} \vec{E}_2 \\ \vec{E}_2 &= \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \vec{E}_1\end{aligned}$$

Quindi la scelta dei due mezzi può esaltare o deprimere il modulo del campo elettrico, ad esempio il cartone esalta il campo elettrico degli intercapedini d'aria che si formano al suo interno.

4.6 Energia elettrostatica nei mezzi

Ripetiamo lo stesso ragionamento fatto nel caso dei sistemi di conduttori nel vuoto. Partiamo direttamente dal risultato finale, già ottenuto nelle equazioni (3.4), (3.5) e (3.6):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$

Questa espressione è ottenuta tentando di portare le cariche dall'infinito a potenziale nullo, fino alla posizione dove si trovano, a potenziale V_i o V noto.

Le informazioni sulla presenza del dielettrico sono tutte contenute dentro il potenziale. Da queste considerazioni possiamo giungere all'espressione finale:

Ricordiamo che ρ può essere scritto sfruttando la proprietà del vettore di spostamento:

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

Da cui riprendendo la 3.5 diventa:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) V d\tau$$

Adesso vediamo una delle proprietà dell'operatore differenziale $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) = V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + \vec{\nabla} V \cdot \vec{D}$$

Da cui otteniamo che:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{\nabla} V \cdot \vec{D} d\tau$$

Ricordiamo il teorema della divergenza, il flusso lungo una superficie chiusa S è pari all'integrale della divergenza del campo sul volume inscritto dalla superficie. Riconosciamo questa divergenza nel primo integrale di volume, e ricordando per il secondo che $\vec{\nabla} V = -\vec{E}$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_S V \vec{D} \cdot \hat{n} dS + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

Se estendiamo la funzione ρ a zero in tutti i punti dello spazio in cui non sono presenti cariche, possiamo far tendere all'infinito il volume di integrazione, e anche la superficie, il primo termine dell'integrale tende a zero¹⁴.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

Da cui possiamo ridefinire la densità di energia volumica:

$$u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (4.7)$$

4.7 Materiali non isotropi

Cosa succede se cade la condizione di isotropia del materiale? Come si modifica la soluzione del problema?

Esistono alcuni materiali, come ad esempio il cristallo di CO_2 che è una molecola che si polarizza fortemente lungo una direzione specifica, questo perché le interazioni microscopiche tra le molecole sono molto più forti del campo elettrico, e quindi è possibile che il vettore di polarizzazione \vec{P} non sia parallelo al vettore \vec{E} .

¹⁴Stessi passi che nella dimostrazione dell'equazione (3.6), $V \propto r^{-1}$, $D \propto r^{-2}$, $S \propto r^2$

In questo caso possiamo descrivere \vec{P} attraverso una combinazione lineare delle componenti di \vec{E} . Supponiamo che il campo elettrico sia tutto diretto lungo l'asse delle x , otteniamo un vettore \vec{P} orientato in un'altra direzione, sempre proporzionale a E in modulo:

$$P_x = \varepsilon_0 \chi_{xx} E_x$$

$$P_y = \varepsilon_0 \chi_{yx} E_x$$

$$P_z = \varepsilon_0 \chi_{zx} E_x$$

Dove le tre variabili χ_{xx} , χ_{yx} e χ_{zx} esprimono la suscettività del materiale. In linea più generale se il campo elettrico è diretto lungo una qualsiasi direzione, ciascuna delle componenti di \vec{P} sarà una combinazione lineare delle componenti del campo elettrico:

$$P_x = \varepsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z)$$

$$P_y = \varepsilon_0 (\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z)$$

$$P_z = \varepsilon_0 (\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z)$$

Si vede ad occhio che possiamo scrivere \vec{P} in una forma più compatta introducendo il seguente simbolo:

Definizione 4.3 (Tensore di suscettività) *Si definisce tensore di suscettività (a due indici) la matrice 3x3 così composta:*

$$\bar{\bar{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

Con la definizione (4.3) possiamo scrivere il vettore di polarizzazione \vec{P} come prodotto righe per colonna:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \bar{\bar{\chi}} \vec{E}$$

4.7.1 Materiali piezoelettrici

Esistono alcuni materiali, detti materiali **piezoelettrici** che se sottoposti a stress meccanico, si polarizzano in questo modo, creando un campo elettrico, e una differenza di potenziale ai capi, sono molto usati nell'industria. In genere questi materiali hanno anche la capacità di funzionare al contrario, ossia se vengono sottoposti ad un campo elettrico, si deformano meccanicamente. Per lo studio approfondito di questo genere di fenomeni si rimanda ad un corso di struttura della materia.

4.8 Modello di Clausius-Mosotti e campo microscopico

Occupiamoci ora di studiare qual è la differenza significativa tra il campo elettrico microscopico di cui abbiamo parlato nelle prime sezioni di questo capitolo, e il campo elettrico che effettivamente misuriamo in una certa zona di spazio.

In realtà questa differenza è molto difficile da descrivere in quanto dipende strettamente dal tipo di modellino che si utilizza per trattare la materia. Useremo adesso un modello di meccanica classica abbastanza semplice, nel caso di un liquido amorfo apolare ad alta densità, noto come modello di *Clausius-Mosotti*.

$$\vec{P} = n\vec{p}_o = n\alpha_o\vec{E}_{mic}$$

Ricordando la (4.1). Ma sappiamo anche che

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

Se identificassimo \vec{E} con \vec{E}_{mic} saremo in grado di trovare la costante di proporzionalità

$$\alpha_o = \frac{\varepsilon_0\chi}{n}$$

Questa approssimazione vale solo per densità n molto basse, in cui si trascura l'interazione tra dipoli vicini. In generale esisterà una relazione tra \vec{E} e \vec{E}_{mic} del tipo:

$$\vec{E}_{mic} = \vec{E} + \vec{E}_{vicini} \quad (4.8)$$

Dove \vec{E}_{vicini} rappresenta il contributo al campo elettrico da parte di tutti i dipoli nelle vicinanze. Per farlo proviamo a considerare una sfera intorno al punto su cui vogliamo calcolare \vec{E}_{mic} , come in Figura 4.10

$$\vec{E}_{mic} = \vec{E} + \vec{E}_\sigma + \vec{E}_\rho$$

Dove abbiamo chiamato \vec{E}_σ il campo elettrico generato dalla densità di carica che si forma sulla superficie della sfera per polarizzazione, e \vec{E}_ρ quello generato dalla densità volumica di carica all'interno del dipolo.

Otteniamo subito che $\vec{E}_\rho = 0$ perché:

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\rho = \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} = 0$$

Questo è vero poiché il vettore di polarizzazione \vec{P} è uniforme in tutto il materiale per ipotesi.

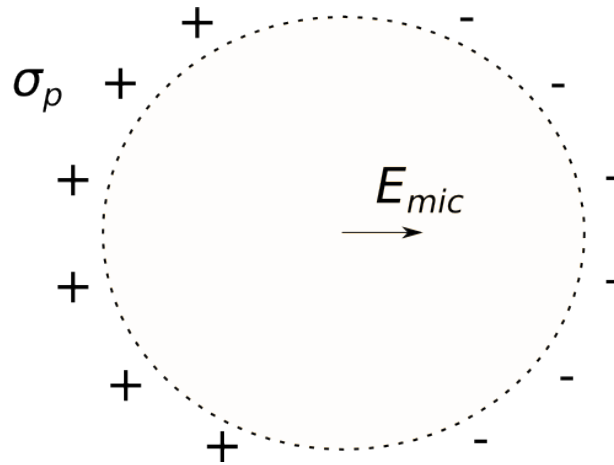
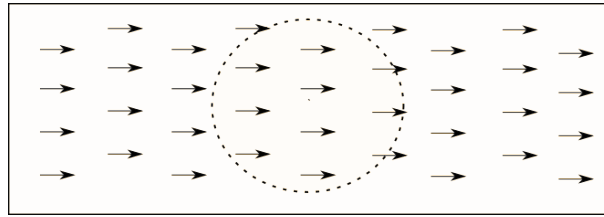


Figura 4.10: Consideriamo solo l'effetto dei dipoli vicino al punto di interesse, per questo estraiamo una sfera di raggio r , sulla superficie di questa sfera l'effetto della polarizzazione è quello di creare una densità di carica σ_p mentre la densità volumica interna alla sfera ρ_p è nulla, perché \vec{P} è uniforme.

Quindi cerchiamo il campo elettrico solo dovuto alla superficie, per simmetria notiamo che non può che essere diretto nella stessa direzione della polarizzazione, calcoliamone quindi solo quella componente:

$$E_{\sigma} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_p \cos \theta 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{R^2}$$

Dove $2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta$ è l'elemento di superficie sulla sfera, e il $\cos \theta$ è la proiezione sull'asse in cui dobbiamo calcolare il campo elettrico (θ è la colatitudine, angolo che forma il versore del raggio \hat{r} della sfera con il vettore di polarizzazione \vec{P}).

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta \\ E_{\sigma} &= \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi} P \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ E_{\sigma} &= \frac{1}{2\epsilon_0} P \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} \\ E_{\sigma} &= \frac{P}{3\epsilon_0}\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo subito l'espressione di \vec{E}_{mic}

$$\begin{aligned}E_{mic} &= E + \frac{P}{3\epsilon_0} \\ \vec{P} &= n\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) \\ \vec{P} \left(1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0} \right) &= n\alpha \vec{E} \\ \vec{P} &= \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} \vec{E} \\ \vec{P} &= \epsilon_0 \chi \vec{E}\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo un'espressione che lega la grandezza microscopica α (che dipende dal modello) alla grandezza macroscopica χ :

$$\chi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}}$$

Oppure alla costante ϵ_r :

$$\epsilon_r = \chi - 1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} - 1$$

Capitolo 5

Elettrodinamica

È finalmente giunto il momento di abbandonare l'ipotesi di staticità delle cariche e iniziarsi a muovere all'interno del mondo dell'elettrodinamica, ossia dello studio di tutta una serie di fenomeni legati allo spostamento delle cariche elettriche.

Per mettere in moto una carica elettrica basta sottoporla ad un campo elettrico. I materiali più adatti per esplorare questo tipo di fenomeni sono i conduttori, se si forza un campo elettrico al loro interno, riscontreremo un moto di cariche.

Di particolare interesse sono i conduttori metallici, in questi le cariche mobili sono gli elettroni liberi delle orbite atomiche più esterne del metallo, che si muovono come in un gas quantistico sugli atomi.

Gli elettroni non possono uscire dal metallo poiché tra superficie del conduttore e l'esterno si crea una barriera di potenziale che impedisce agli elettroni di uscire (a meno che non sia fornita loro una sufficiente energia tale da rompere questa barriera).

5.1 Velocità degli elettroni

Cerchiamo di costruire un piccolo modellino che ci dia un mezzo quantitativo per provare a rintracciare l'ordine di grandezza della velocità con cui si muovono gli elettroni all'interno dei metalli.

Proprio come in un gas supponiamo che l'energia cinetica corrisponda proprio a quella termica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Facendo un conto degli ordini di grandezza:

$$T = 300K \approx 10^2 \quad k \approx 10^{-23} \quad m \approx 10^{-30}Kg$$

$$\bar{v} \approx 10^5 \frac{m}{s}$$

Questo calcolo approssimativo ci suggerisce che in media gli elettroni si muovono con velocità intorno a 10^5 m/s in tutte le direzioni del metallo. In realtà il conto è inesatto poiché non abbiamo considerato che gli elettroni seguono le leggi della meccanica quantistica e la loro energia è data dalla funzione di Fermi-Dirac, e non da quella di Boltzmann. Mostriamo qui qualitativamente il grafico della funzione di Fermi-Dirac, con il solo scopo di far vedere qual è il valore energetico interessante ai fini del nostro calcolo della velocità (Figura 5.1).

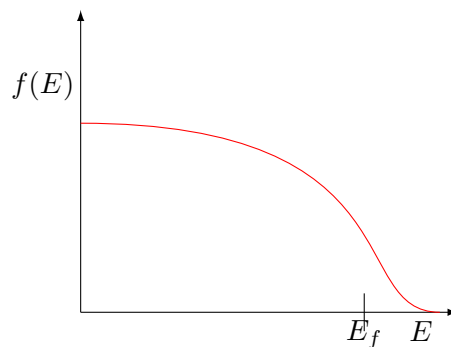


Figura 5.1: Distribuzione di probabilità di Fermi-Dirac, probabilità di trovare elettroni con energia compresa tra E e $E+dE$, l'energia E_f associata alla zona in cui la funzione ha una brusca caduta è quella che generalmente possiedono gli elettroni liberi, viene detta *energia di Fermi*.

L'energia E_f è quella che ci interessa in questo caso, e dipende dal tipo del materiale e dalla massa efficace. Tipicamente è dell'ordine dell'**elettronvolt**.

Definizione 5.1 (Elettronvolt) Si definisce l'unità di misura per l'energia **elettronvolt** come l'energia associata ad un elettrone sottoposto ad una differenza di potenziale pari ad 1 Volt:

$$\mathcal{E} = 1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{E_f}{m}} \approx 10^6 \frac{m}{s}$$

Questa velocità è diretta in tutte le direzioni, quindi la velocità media lungo una qualunque direzione è in realtà nulla. Se però si accende un campo elettrico che fa muovere gli elettroni in un verso privilegiato, a questo moto caotico si sovrappone un moto ordinato in una direzione. Quindi lo

spostamento medio effettivo non è più nullo ma dettato da una velocità detta v_d *velocità di drift*.

Questa velocità è diversi ordini di grandezza inferiori a \bar{v} , ma genera un effetto molto più significativo e sensibile macroscopicamente, poiché tutti gli elettroni si muovono nella stessa direzione.

Questo moto genera una **corrente** elettrica, indicata con il simbolo i :

Definizione 5.2 (Corrente elettrica) *Si definisce corrente elettrica la grandezza i definita come la quantità di carica che attraversa una sezione del conduttore in un unità di tempo:*

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

E si misura in A (Ampere), unità fondamentale del sistema internazionale da cui viene ricavato anche il C (Coulomb):

$$[C] = [A \cdot s]$$

Come si vede dalla definizione 5.2 la corrente elettrica è una grandezza macroscopica, associata al passaggio di cariche attraverso una sezione di un conduttore, quindi è in qualche modo la misura di un flusso di una grandezza vettoriale. Introduciamo quindi il vettore \vec{J} , che indica localmente la direzione del moto delle cariche. Questo vettore viene detto *intensità di corrente*.

Definizione 5.3 (Intensità di corrente) *Si definisce il campo vettoriale \vec{J} intensità di corrente come una funzione vettoriale che ci da localmente informazioni su modulo, direzione e verso di moto delle cariche elettriche all'interno del materiale:*

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Vediamo di estrarre una relazione diretta per \vec{J} sfruttando la definizione di velocità di drift (o di deriva).

Prendiamo un conduttore cilindrico, supponiamo che il vettore \vec{J} sia uniforme all'interno del materiale.

$$i = JS$$

Dove S è la sezione trasversa del cilindro, allo stesso modo prendendo un volumetto dV ottenuto da tutte le cariche che passeranno attraverso quella superficie in un tempo dt , questo vale sicuramente

$$dV = Sv_d dt$$

Sia n il numero di cariche per unità di volume del conduttore e q il valore della singola carica, otteniamo che:

$$dQ = nq dV = nqSv_d dt$$

Da cui

$$i = \frac{dQ}{dt} = nSqv_d = JS$$

Otteniamo un'espressione regolare per \vec{J} :

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (5.1)$$

Questo ci dice che in un conduttore metallico, dove sono gli elettroni a muoversi, la corrente è diretta in senso opposto alla velocità di deriva, poiché la carica q è negativa, \vec{J} e \vec{v}_d sono dunque antiparalleli, e \vec{J} è parallelo al campo elettrico.

Questo ragionamento può essere esteso anche ai conduttori non metallici, che hanno mobilità anche delle cariche positive, come il sale sciolto in acqua che si dissocia in ioni negativi e positivi mobili.

In questo caso al vettore intensità di corrente ci saranno due contributi che sembrano sottrarsi:

$$\vec{J} = n_1qv_d^+ - n_2qv_d^-$$

Ma il fatto che sia \vec{v}_d^- sia diretta in senso opposto a \vec{v}_d^+ è bilanciato dal segno meno (originato dal fatto che sono cariche di segno opposto, quindi in generale i due contributi si sommeranno tra loro).

5.2 Equazione di continuità delle cariche elettriche

Adesso facciamo alcune considerazioni matematiche e fisiche sulle grandezze che abbiamo appena definito per riuscire a tirare fuori delle leggi che governano i fenomeni di elettrodinamica.

Prendiamo una superficie chiusa qualunque e calcoliamoci il flusso di \vec{J} , come in Figura 5.2

Se Q è la quantità di carica contenuta all'interno della superficie S e il flusso non è nullo, significa che un po' di carica dQ entra, o esce, dalla superficie

$$dQ = -idt$$

Il segno $-$ si giustifica con il fatto che se il flusso è positivo, e quindi i è positiva, la carica diminuisce all'interno, quindi dQ è negativa.

Possiamo esprimere questa relazione in termini puntuali:

$$-\frac{dQ}{dt} = i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

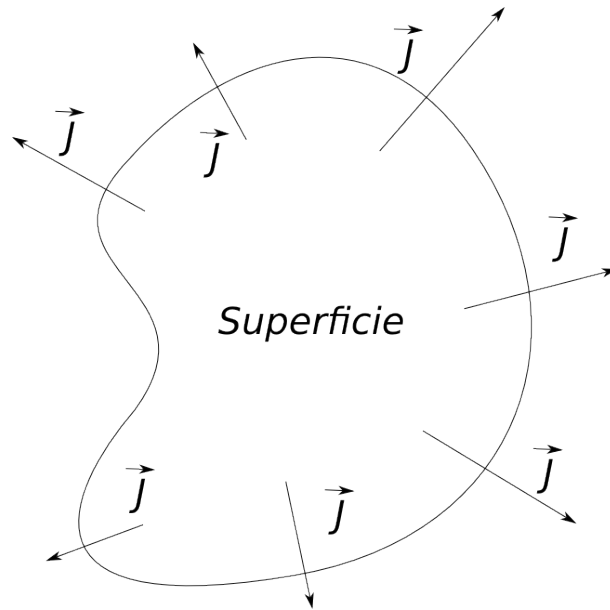


Figura 5.2: Calcolo del flusso del campo vettoriale \vec{J} su una superficie chiusa qualunque.

Supponiamo che la carica contenuta all'interno della nostra superficie abbia una distribuzione continua

$$Q = \int_{\tau} \rho d\tau$$

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Gli estremi di integrazioni sono indipendenti dal tempo, lo è anche la variabile di integrazione, l'unica cosa che ha una dipendenza dal tempo è ρ :

$$-\frac{dQ}{dt} = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Sfruttiamo il teorema della divergenza:

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\tau = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

$$\int_{\tau} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0$$

Poiché questa equazione è indipendente dal particolare volume τ scelto¹, possiamo concludere che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

¹ τ è il volume racchiuso dalla superficie S , scelta in maniera arbitraria.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.2)$$

L'equazione 5.2 è nota come *equazione di continuità della carica elettrica*, ed esprime il comportamento del vettore \vec{J} puntualmente nello spazio. È particolarmente importante perché rispetto all'analogia equazione che si trova nel caso della corrente di massa dei fluidi, in cui la divergenza del vettore intensità di corrente è pari all'opposto della derivata temporale della densità di massa volumica, questa è valida sempre, mentre l'altra ha limiti nella meccanica classica, e viene superata dalla ridefinizione relativistica della massa.

Poiché la prima equazione di Maxwell per il campo elettrico ci assicura che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Se costruisco un campo elettrico che non varia nel tempo, anche ρ non avrà dipendenza dal tempo. In questo caso particolare possiamo riscrivere la 5.2 in questo modo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.3)$$

L'equazione 5.3 definisce le condizioni di **corrente stazionaria**, e la fisica che studia i fenomeni in queste condizioni è detta *fisica delle correnti continue*.

5.3 Fisica delle correnti continue

5.3.1 Prima legge di Kirchhoff

Mettiamoci nell'ipotesi descritta dall'equazione 5.3 (stazionarietà), e proviamo a ricavare alcuni risultati importanti per la teoria dei circuiti:

Supponiamo di avere un nodo a cui convergono tanti cavi elettrici conduttori attraverso cui scorre corrente. Prendiamo ora una superficie qualunque chiusa attorno al nodo, che intersechi tutti i cavi, come in Figura 5.3.

Il flusso totale, è pari alla somma del flusso lungo ciascun cavo:

$$\Phi_{S_c}(\vec{J}) = \sum_{k=1}^n \Phi_{S_k}(\vec{J}_k)$$

Ma il flusso lungo ciascun cavo è la corrente che scorre in quel cavo:

$$\Phi_{S_k}(\vec{J}_k) = i_k$$

Dove per convenzione si prendono positive tutte le correnti uscenti (perché danno un contributo positivo al flusso) e negative quelle entranti nel nodo.

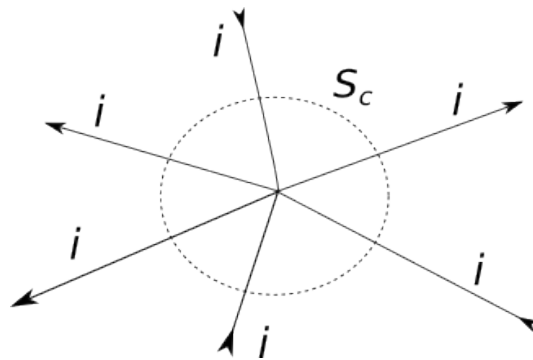


Figura 5.3: Calcolo del flusso dell'intensità della corrente attorno al nodo.

Per il principio di stazionarietà questo flusso è nullo, abbiamo quindi che:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

Dove le correnti sono prese con i segni specificati sopra.

Questa semplice legge è nota come **primo principio di Kirchhoff** anche se non è un vero e proprio principio in quanto l'abbiamo dimostrato, e riveste un'importanza fondamentale nella risoluzione dei circuiti in corrente continua e stazionaria.

5.3.2 Campo elettromotore

Un circuito è un cammino chiuso in cui le cariche si muovono grazie all'azione di un campo elettrico. Tuttavia se proviamo a calcolare il lavoro fatto dal nostro campo elettrico per spostare le cariche otteniamo che:

$$\frac{\mathcal{L}}{q} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Questo perché il campo elettrostatico è un campo di natura conservativa. Siccome le cariche nel muoversi attraverso il circuito suscitano dei fenomeni dissipativi che riscaldano il filo, non sarebbe mai possibile attraverso il solo campo elettrico costruire dei circuiti, poiché il campo elettrico non produce lavoro².

C'è quindi bisogno dell'intervento di una forza esterna per poter mettere in moto le nostre cariche elettriche. Questa forza esterna è un generatore di tensione. Questo generatore è in grado di produrre ai suoi capi una differenza

²Questo discorso salta nei superconduttori, materiali che hanno l'interessantissima curiosità di riuscire a condurre elettricità senza opporre alcuna resistenza al passaggio di corrente.

di potenziale, attraverso la presenza di una forza, detta forza elettromotrice (f_{em}).

Questo generatore compie un lavoro di natura diversa a quello elettrostatico, e nonostante anche la f_{em} si misuri in V il suo significato è profondamente diverso.

È un lavoro di natura differente da quella elettrica (in genere chimica), che riesce a portare le cariche (positive) dal polo negativo a quello positivo, compiendo un lavoro per unità di carica contrario a quello del campo elettrostatico.

$$f_{em} = \int_A^B \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l}$$

Dove \vec{E}_{em} è un campo di forze per unità di carica, detto campo elettromotore.

Dunque in un circuito il cammino non è totalmente chiuso, ma interrotto dal generatore e fa sì che

$$\int_B^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} = f_{em}$$

Chiaramente poiché il campo elettromotore è presente solamente all'interno del generatore possiamo estenderlo in questo modo:

$$\oint E_{em} \cdot d\vec{l} = f_{em}$$

Questo ci conferma che il campo elettromotore è di natura non conservativa.

Questa equazione ci dice anche che:

$$\int_B^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = f_{em}$$

$$\sum_{k=1}^n \Delta V_k = f_{em}$$

La somma delle cadute di potenziale del circuito è pari alla forza elettromotrice, possiamo generalizzarlo se sono presenti più forze elettromotrici:

$$\sum_{k=1}^n \Delta V_k = \sum_{h=1}^m f_{emh} \quad (5.4)$$

L'equazione 5.4 è nota come **secondo principio di kirchhoff**.

5.3.3 Conduttori Ohmici, leggi di ohm

Per far scorrere una corrente attraverso un conduttore occorre fornire energia al materiale, infatti il passaggio di corrente genera un aumento della

temperatura del conduttore. Questa energia viene fornita sotto forma di differenza di potenziale ai capi del conduttore.

Per una serie di conduttori particolari, detti *conduttori ohmici*, la legge che ci dice l'andamento della differenza di potenziale con la corrente è lineare

$$\frac{\Delta V}{i} = \text{cost}$$

Questa costante di proporzionalità è una caratteristica del nostro materiale, e si chiama **Resistenza**.

Definizione 5.4 (Resistenza) *La Resistenza è una grandezza fisica associata ai conduttori ohmici, definita come la costante di proporzionalità tra differenza di potenziale ai capi del conduttore e intensità di corrente i che vi scorre dentro:*

$$\frac{\Delta V}{i} = R \quad (5.5)$$

Si misura in **Ohm**:

$$[R] = \Omega$$

L'equazione 5.5 è detta anche **prima legge di Ohm**.

Nel caso dei metalli, la grandezza R può essere calcolata in base alla forma dell'oggetto. Per un filo di conduttore di sezione S e lunghezza l , la resistenza associata vale:

$$R = \rho_r \frac{l}{S} \quad (5.6)$$

L'equazione 5.6 è nota come **seconda legge di Ohm**, e permette di calcolare la resistenza associata a qualunque conduttore ohmico metallico, di qualunque forma³.

La grandezza ρ_r è la *resistività* di un materiale, generalmente è funzione della temperatura, e può essere ricavata empiricamente, sarà, sviluppando al primo ordine, qualcosa del tipo:

$$\rho_r(t) = \rho_r^0 (1 + \alpha \Delta t)$$

Dove Δt è la temperatura in gradi centigradi e ρ_r^0 la resistività a 0 gradi. Chiaramente si possono fare misure di maggiore precisione e andare avanti con uno sviluppo agli ordini superiori. Attraverso questo principio possono anche essere costruiti dei termometri, come ad esempio il termometro al Platino⁴.

³Infatti basta spezzare il nostro resistore in tanti cubetti di sezione dS e lunghezza dl e poi integrare su tutti, sfruttando le leggi di resistenze in serie e parallelo.

⁴Viene usato il platino perché è un materiale particolarmente robusto e non viene intaccato dalle sostanze acide, è quindi in grado di misurare temperature anche in ambienti poco accoglienti per altri materiali.

Modello microscopico dei conduttori ohmici

La struttura molecolare di un metallo ohmico contiene delle impurezze, inoltre l'agitazione termica degli ioni del metallo fa sì che gli elettroni nel loro moto abbiano interazioni energetiche sia con le impurezze che con l'agitazione termica degli ioni. Possiamo schematizzare queste interazioni come degli urti, come se l'elettrone ad ogni urto perdesse informazioni sulla condizione precedente all'urto, Figura 5.4.

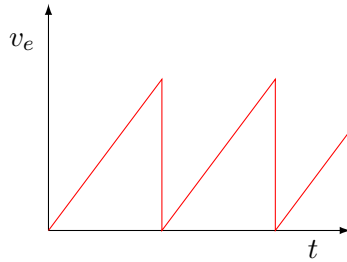


Figura 5.4: Schema della velocità di un elettrone che periodicamente viene annullata da un'interazione con l'agitazione termica degli ioni o con le imperfezioni nel reticolo metallico.

Dal punto di vista macroscopico questo effetto può essere schematizzato come il moto in un mezzo viscoso, dove ho una forza frenante che frena il nostro oggetto. Aspettando un tempo sufficientemente lungo posso studiare il moto a regime con $v_\infty = cost.$

$$\Delta V = Ri$$

Con una differenza di potenziale costante ho una corrente costante ma i e \vec{J} sono proporzionali:

$$i \propto \vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Quindi a fronte di una ΔV costante ho una velocità di deriva degli elettroni costante.

Questo è ovviamente un meccanismo di dissipazione. Prendiamo un elementino di filo di lunghezza dl e spessore dS , per la 5.6 vale:

$$\Delta V = Ri = \rho_r \frac{dl}{dS} i$$

Ma

$$\begin{aligned} i &= J dS \\ \Delta V &= \rho_r \frac{dl}{dS} J dS \\ \frac{\Delta V}{dl} &= \rho_r J \\ E &= \rho_r J \end{aligned}$$

Chiaramente questa relazione vale anche da un punto di vista vettoriale:

$$\vec{E} = \rho_r \vec{J} \quad (5.7)$$

L'equazione 5.7 è molto importante poiché riassume insieme puntualmente le due leggi di Ohm!

Da questa possiamo notare come il campo elettrico produca una velocità di deriva costante, infatti

$$\vec{E} = \rho_r n e v_d$$

La relazione può essere invertita introducendo la **conducibilità** del materiale σ_c come l'inverso della resistività:

$$\sigma_c = \rho_r^{-1}$$

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$$

Densità di carica sul bordo del conduttore

Possiamo sfruttare la relazione 5.7 per trovare l'espressione del campo elettrico in un conduttore in cui è presente una corrente. Ricordiamo che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Cerchiamo di capire quanto vale ρ sulla superficie del conduttore. Notiamo subito che all'esterno del conduttore \vec{J} è nullo. Costruiamo una superficie cilindrica infinitesima accavallo tra dentro e fuori il conduttore come fatto in precedenza (vedi Figura 3.3). Il flusso lungo le superfici laterali lo possiamo trascurare poiché queste le costruiamo di altezza infinitesima di ordine superiore. Il flusso sulla superficie esterna al conduttore è nullo. Rimane solo il flusso sulla superficie interna:

$$\Phi_{S_c}(\vec{J}) = J_n dS$$

Dove J_n è la componente normale alla superficie del conduttore del campo intensità di corrente. Ma poiché siamo in condizioni di stazionarietà questo flusso deve essere nullo, per ogni valore di dS . Da cui:

$$J_n = 0$$

Poi per la 5.7

$$E_n = \rho_r J_n = 0$$

La componente normale di \vec{E} alla superficie del conduttore è nulla. Questo ci dice che \vec{E} è parallelo alla superficie del conduttore, e che quindi, riprendendo di nuovo la superficie di Figura 3.3 e calcolando questa volta il flusso del campo \vec{E} otteniamo che il flusso è nullo (poiché le componenti normali di \vec{E}

sono nulle). Ma per il teorema di Gauss quel flusso è pari alla carica interna alla superficie, ossia:

$$\sigma dS = \Phi_{S_c}(\vec{E}) = 0$$

Da cui otteniamo che la densità di carica superficiale di un conduttore ohmico in regime stazionario è nulla:

$$\sigma = 0$$

Resistenze in serie e in parallelo

In un circuito le resistenze possono essere disposte in vari modi:

Definizione 5.5 (Resistenze in serie) *Due resistenze si definiscono in serie quando tra loro scorre la stessa corrente i , e possono essere considerate come un'unica resistenza R_{eq} il cui valore è la somma delle resistenze:*

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Le resistenze in serie sono indicate in genere come in Figura 5.5.

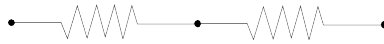


Figura 5.5: Resistenze in serie.

Con le leggi di Ohm. La differenza di potenziale ai capi di una resistenza è:

$$V_A - V_B = iR_1$$

La differenza di potenziale ai capi della resistenza seguente è:

$$V_B - V_C = iR_2$$

Sommando tra loro queste equazioni otteniamo:

$$V_A - V_C = i(R_1 + R_2)$$

Ossia possiamo considerare come se tra A e C ci sia una unica resistenza con valore pari a $R_{eq} = R_1 + R_2$:

$$V_A - V_C = iR_{eq}$$

Un altro modo in cui possono essere disposte le resistenze è in *parallelo*.

Definizione 5.6 (Resistenze in parallelo) N resistenze si definiscono in parallelo quando ai loro capi c'è la stessa differenza di potenziale ΔV , e possono essere considerate come un'unica resistenza R_{eq} che rispetta la seguente legge:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Sono schematizzate in Figura 5.6

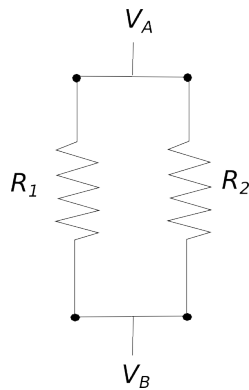


Figura 5.6: Resistenze in parallelo.

Anche in questo caso il conto è molto semplice, dividiamo la corrente che scorre in i_1 e i_2 , sia i la corrente iniziale. Per la legge di Ohm:

$$\Delta V = i R_{eq}$$

Per la prima legge di Kirchhoff

$$i = i_1 + i_2$$

Applicando la legge di Ohm alle due resistenze:

$$i_1 = \frac{\Delta V}{R_1} \quad i_2 = \frac{\Delta V}{R_2}$$

Da cui

$$i = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$R_{eq} = \frac{\Delta V}{i}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{i}{\Delta V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ecco dimostrata anche la legge per il parallelo⁵.

⁵Entrambe le leggi le abbiamo dimostrate nel caso di due resistenze, è facilissimo da dimostrare per induzione che valgono per n resistenze, poiché se aggiungo una terza, la

5.4 Legge di Joule

La presenza di resistenze in un circuito elettrico abbiamo visto che comporta dissipazione. Questo fenomeno tende a disperdere una certa quantità di energia, poiché siamo in condizione stazionaria tutta l'energia che forniamo al sistema va in calore (le cariche si muovono di moto uniforme)

Una singola carica elettrica dq quindi dissipa per passare attraverso una differenza di potenziale ΔV una quantità di energia pari a:

$$d\mathcal{E} = dq\Delta V$$

Quindi l'energia dissipata dipende dalla quantità di carica che attraversa la resistenza

$$i = \frac{dq}{dt}$$
$$d\mathcal{E} = idt\Delta V$$

Questa è l'espressione dell'energia dissipata, che dipende linearmente dal tempo. È naturale introdurre la potenza che dissipa una resistenza, che ricordiamo essere l'energia per unità di tempo:

$$W = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = i\Delta V$$

Questa è nota come **legge di Joule**, e può essere scritta per i conduttori Ohmici, in diverse forme:

$$W = i\Delta V = Ri^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

5.5 Conduzione nei liquidi e gas

Analizzeremo in questa parte in maniera qualitativa come conducono i liquidi e i gas, se seguono o meno la legge di Ohm, e cercheremo di fornire un'idea di come funzionano i modelli che li descrivono.

5.5.1 Conduzione nei liquidi

I liquidi possono essere sia conduttori che isolanti. La conducibilità elettrica dei liquidi dipende dalla presenza al loro interno di ioni carichi, che si muovono risentendo dell'effetto di un campo elettrico.

L'acqua distillata è un leggerissimo conduttore, questa capacità di condurre è data dalla presenza naturale dissociata di molecole H^+ e OH^- , in concentrazione come è noto di 10^{-7} moli/litro.

resistenza equivalente è il parallelo tra quella e l'equivalente del parallelo delle altre due, stessa cosa la serie.

Quindi in un cm^3 di acqua ci sono 10^{13} ioni positivi e negativi, molti di meno degli elettroni presenti nello stesso volume di rame (10^{23}). Non solo, gli ioni sono molto più pesanti degli elettroni, quindi la loro velocità di deriva è molto minore a parità di campo elettrico. Poiché l'intensità di corrente dipende anche dalla mobilità delle cariche, questo ulteriore elemento diminuisce la conducibilità dell'acqua rispetto a quella dei metalli normali.

Tuttavia è presente in acqua un fenomeno che la può rendere un ottimo conduttore, ossia la possibilità di sciogliere i sali. La grande costante dielettrica dell'acqua ($\epsilon_r \approx 80$) fa sì che le interazioni elettrostatiche che tengono insieme il legame ionico dei sali siano fortemente indeboliti, questo rende possibile la dissociazione dei sali in ioni.

Questa dissociazione è regolata da un parametro α di saturazione che regola l'equilibrio tra ioni disciolti e molecole intere⁶.

Il modello che regola questi equilibri si chiama modello di Van t'Hoff, il legame tra il numero di molecole dissociate e quelle non dissociate può essere studiato attraverso la pressione osmotica che si verifica attraverso la misura del Δh nel sistema a Figura 5.7

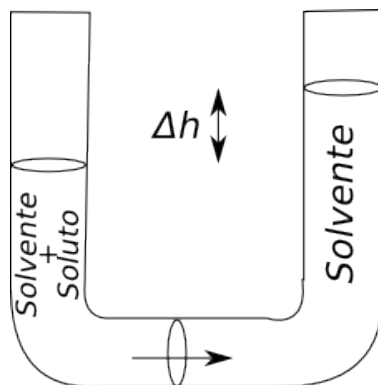


Figura 5.7: Il setto poroso posto sul fondo dei vasi permette passaggio di solvente ma non di soluto. Il modello di van t'Hoff consente di misurare le pressioni parziali di solvente e soluto a partire dalla Δh , e quindi α di saturazione, da cui ricavare una stima del numero di portatori di cariche N .

Si misura sperimentalmente che la dissociazione α non dipende dal campo elettrico applicato al materiale, inoltre anche in questo caso la velocità di drift degli ioni risulta essere molto minore di quella di agitazione termica. Dunque il processo di conduzione funziona in maniera analoga a quello in un metallo, infatti sperimentalmente si verifica che segue la legge di Ohm.

⁶Il processo di dissociazione è reversibile ossia gli ioni possono ricombinarsi se l'agitazione termica fa urtare tra loro due ioni. Quando questo processo (che avviene tanto più velocemente quanti più ioni sono presenti in acqua) è veloce quanto quello di dissociazione si ha l'equilibrio di saturazione.

Nelle soluzioni elettrolitiche in cui viene accesa una differenza di potenziale tra due elettrodi di materiale metallico gli ioni sciolti nella soluzione migrano verso il polo di segno opposto. Quando lo raggiungono cedono la carica al polo e formano un deposito sul fondo⁷.

La misura della massa di materiale depositato fornisce una stima eccezionale della carica che è passata, infatti il numero di molecole depositate sono proprio il numero di ioni che è entrato in contatto con il polo.

5.6 Coduzione nei gas (neon)

I fenomeni che descrivono la conduzione elettrica nei gas sono estremamente complicati, ci limiteremo ad una trattazione fortemente qualitativa. Analizzeremo in particolare il fenomeno di conduzione attraverso il neon. Inizialmente si osserva che la legge tra differenza di potenziale e corrente è lineare per piccoli valori della corrente. Questa conduzione avviene perché il fenomeno della radioattività naturale (unito in piccola parte dall'effetto dei raggi cosmici) ionizza alcuni atomi del gas, formando dei portatori di carica che seguono una legge in prima approssimazione (per piccole correnti) simile a quella di Ohm.

Con l'incremento del campo elettrico e della corrente si verifica un effetto particolarmente interessante, la differenza di potenziale rimane quasi costante. Questo perché quando gli ioni hanno un'energia sufficiente, riescono ad ionizzare le altre molecole quando vi urtano, questo innesca un fenomeno di ionizzazione a catena autosufficiente. Questa fase di conduzione è detta *scarica di Townsend*. I parametri che identificano quando si passa in questa fase sono determinati dalle condizioni del gas, in particolare gli ioni devono avere un'energia cinetica sufficiente affinché l'urto con una molecola causi la sua ionizzazione. Questo dipende dalla velocità con la quale lo ione arriva ad urtare la molecola, che a sua volta è influenzata dal campo elettrico E e dal cammino libero medio l .

Poiché il cammino libero medio è inversamente proporzionale alla pressione P del gas è possibile definire un parametro β con:

$$\beta = \frac{E}{P}$$

Al variare del parametro β si ha il passaggio da un regime all'altro.

L'aumento di molecole ionizzate porta ad un aumento di corrente che ha come ricaduta la formazione di nubi di ioni intorno ai poli, a cui corrisponde un abbassamento della differenza di potenziale. In questo stato sono ancora presenti molecole non ionizzate, ma eccitate. Gli elettroni che si trovano in orbitali eccitati tendono spontaneamente a ricadere in orbitali ad energia

⁷Potrebbero anche evaporare nel caso di gas (ad esempio l'idrogeno).

minore, e così emettono radiazione luminosa. Questa fase è detta di *scarica a bagliore*.

Aumentando ancora le correnti il gas si ionizza sempre di più fin quando gli elettrodi, colpiti dagli ioni, si scaldano a sufficienza da emettere anche loro (*scarica ad arco*). In questa tra gli elettrodi, pur essendo complessivamente neutra, la materia è completamente ionizzata.

Questo stato si chiama **plasma**. La fisica che studia il comportamento del plasma è un capitolo a se, di notevole interesse per gli sviluppi moderni, ma esula da questi appunti. Uno schema riassuntivo è presente in Figura 5.8.

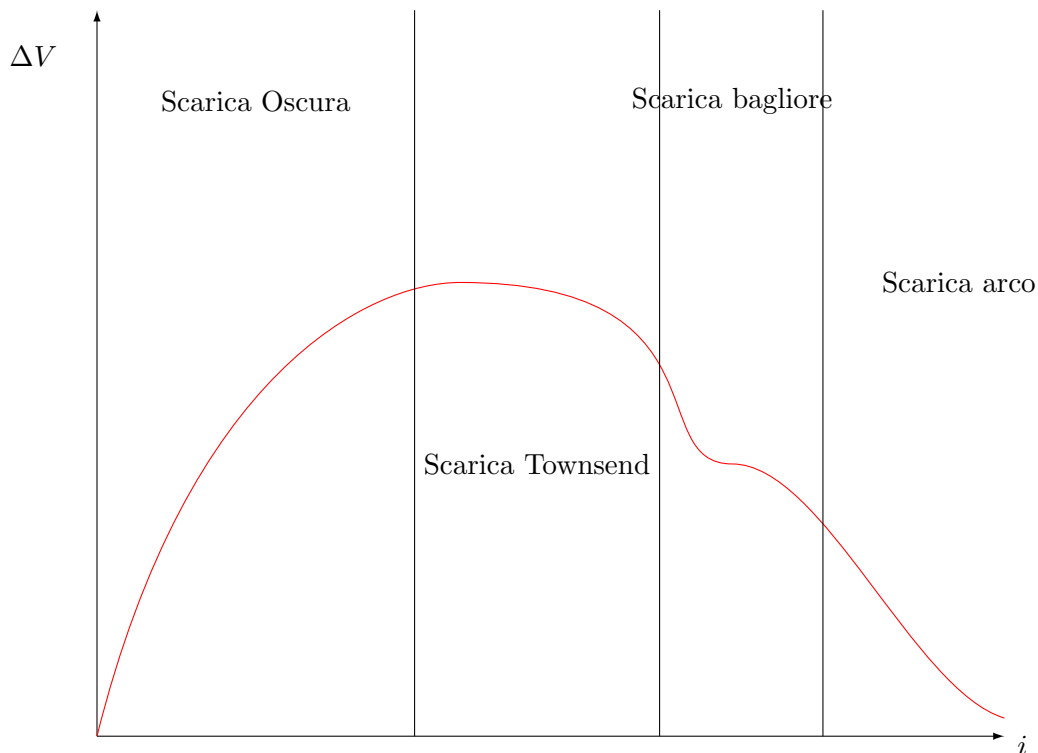


Figura 5.8: Schema riassuntivo dell'andamento della differenza di potenziale con la corrente per i gas a neon. Si vedono distinti i vari regimi di conduzione.

5.7 Regime quasi-stazionario

È possibile estendere le leggi dell'elettrodinamica analizzate per le correnti stazionarie anche in casi alcuni casi in cui la corrente sta variando nel tempo.

Tipicamente i tempi di risposta di un circuito dipende dalla velocità con cui i segnali elettrici si muovono lungo tutto il circuito. Questa velocità è pari alla velocità della luce nel mezzo, che è nell'ordine di 10^8 m/s. Se si ha a che fare con circuiti le cui sollecitazioni elettriche sono molto più lente di

questa velocità si può trascurare la variazione delle grandezze fondamentali (corrente, differenza di potenziale) nel tempo rispetto al tempo di risposta del circuito.

In queste ipotesi continuano a valere tutte le ipotesi fatte nel caso del regime stazionario, con l'unica accortezza che le grandezze che compaiono nelle leggi sono correnti istantanee e differenze di potenziale istantanee.

In questa condizione si trascurano tutti gli effetti di emissione energetica sotto forma di radiazione. L'energia fornita dal generatore viene quindi dissipata tutta per effetto Joule.

5.7.1 Circuito RC

Un esempio di circuito che funziona in regime quasi-stazionario è una resistenza e un condensatore collegate con una differenza di potenziale (Figura 5.9).

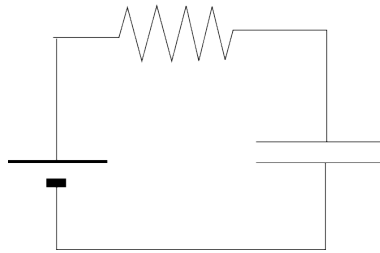


Figura 5.9: Circuito RC.

Partiamo dal caso del condensatore scarico, e accendiamo il generatore. In questo caso si genera una corrente i che tende a caricare il condensatore. La carica che si accumula in un tempo dt è pari a

$$dQ = idt$$

Ma sappiamo che in un condensatore vale:

$$C = \frac{Q}{V} \quad Q = CV$$

$$dQ = CdV$$

$$CdV = idt$$

Sfruttiamo la legge di Ohm:

$$i = \frac{V_R}{R}$$

Ma la differenza di potenziale ai capi della resistenza è pari a $f - V$ dove V è la differenza di potenziale ai capi del condensatore (secondo principio di Kirchhoff).

$$CdV = \frac{f - V}{R} dt$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{RC} = \frac{f}{RC}$$

Notiamo che dimensionalmente la grandezza è una differenza di potenziale diviso un tempo (dalla derivata temporale). Questo significa che RC ha le dimensioni di un tempo, lo chiameremo da ora τ . Cerchiamo le soluzioni di questa equazione quelle dell'omogenea associata:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau} = 0$$

Che ha soluzione per

$$V(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Troviamo la soluzione particolare tra le costanti:

$$V^*(t) = C$$

$$\frac{C}{\tau} = \frac{f}{\tau}$$

$$C = f$$

Da cui la soluzione della differenza di potenziale ai capi del condensatore è:

$$V(t) = f + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Troviamo il parametro A . Il condensatore è inizialmente scarico perciò $V(0) = 0$

$$V(0) = 0 = f + A$$

$$A = -f$$

$$V(t) = f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Vediamo che per t che va all'infinito possiamo il potenziale ai capi del condensatore diventa proprio la forza elettromotrice, e cessa di scorrere corrente.

Scarica del condensatore

Analizziamo ora la scarica. Partiamo dal caso del condensatore carico con carica iniziale V_0 e spegnamo il generatore cortocircuitando il circuito.

A questo punto la carica presente sulle armature diminuisce generando una corrente elettrica i

$$dQ = idt$$

$$dQ = CdV$$

$$CdV = idt$$

Rivediamo ancora una volta i con la differenza di potenziale ai capi della resistenza

$$i = \frac{V_R}{R}$$

Questa volta non c'è il generatore, quindi la differenza di potenziale ai capi della resistenza è la stessa di quella ai capi del condensatore, cambiata di segno:

$$i = -\frac{V}{R}$$
$$CdV = -\frac{V}{R}dt$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{RC}dt$$
$$\int_{V_0}^{V(t)} \frac{dV}{V} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

Anche in questo caso chiamiamo $\tau = RC$

$$\log \frac{V(t)}{V_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Che tende per $t \rightarrow \infty$ a 0.

Capitolo 6

Magnetismo

Se si considerano particolari materiali presenti in natura, si osserva che tra di loro possono esercitarsi delle forze che risultano essere di gran lunga più intense di quelle elettrostatiche, ma di simile forma. Queste forze possono essere di natura attrattiva o repulsiva, risulta quindi naturale cercare di assegnare loro un segno proprio come per le cariche elettriche.

I segni di queste *cariche* sono detti poli Nord e Sud¹.

Per esplorare le linee di forza di questo campo si può far ricorso ad un ago magnetico che si allinea al campo di forze in ogni punto dello spazio.

Fino alla fine dell'800 lo studio dei fenomeni magnetici era scollegato da quello dei fenomeni elettrici. A priori infatti si direbbe che si trattano di fenomeni distinti seppur simili. Entrambe sono forze che agiscono a distanza, ma nel caso dell'elettricità posso generare cariche isolate, per i poli magnetici no.

Per quanto infatti si provino a separare due poli si otterranno sempre nuovi poli del segno opposto. Ogni materiale è quindi costituito da una coppia di poli N e S indivisibili.

Tuttavia alla fine dell'800 ci si accorse che lo scorrere di una corrente elettrica attraverso un circuito altera il campo magnetico intorno al circuito.

Furono fatti una serie di esperimenti molto importanti per cercare di determinare come il passaggio di corrente modificasse il campo magnetico nello spazio circostante. La conclusione di questi esperimenti fu in fatto che il moto delle cariche elettriche genera un campo magnetico.

Sorge subito una questione molto spinosa: come può un fenomeno fisico dipendere dal movimento delle cariche? Se così fosse non sarebbe invariante per sistemi non inerziali, quindi la fisica dipenderebbe dal sistema dal quale osserviamo i fenomeni. Torneremo su questo problema alla fine del corso.

¹In analogia con la magnetizzazione terrestre.

6.1 Effetti del campo magnetico su un circuito

Possiamo subito notare quali sono gli effetti che ha un campo magnetico su un circuito percorso da corrente. Per descrivere quantitativamente l'effetto che un campo magnetico ha su un circuito è possibile costruire un semplice sistema per osservare la forza con cui interagisce un circuito percorso da corrente i (Figura 6.1).

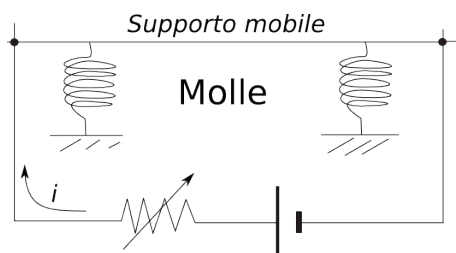


Figura 6.1: Circuito per studiare l'interazione tra circuito e campo magnetico, uno dei bracci del circuito è mobile. Attraverso due molle viene studiata la forza per unità di lunghezza esercitata sul filo. Un potenziometro (Resistenza variabile) serve per far variare in maniera controllata la corrente i che scorre nel circuito, per studiare la dipendenza della forza da i .

Attraverso questo sistema possiamo studiare la compressione delle molle (e quindi la forza per unità di lunghezza esercitata sul filo percorso da corrente) in funzione della corrente i che scorre lungo il filo.

Definiamo ora

\vec{B}_0 (Campo di induzione magnetica)

\vec{l} (lunghezza del filo)

\vec{F} (Forza di interazione)

Le osservazioni empiriche hanno mostrato che la legge che regola queste tre grandezze è:

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}_0$$

Possiamo iniziare con le nostre astrazioni matematiche e considerare un pezzetto infinitesimo di filo di lunghezza $d\vec{l}$. Su questo filo si eserciterà una forza $d\vec{F}$ che sarà pari a:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}_0 \quad (6.1)$$

Questa formula è molto utile ed è nota come **seconda formula di Laplace**, consente facilmente di calcolare l'interazione del campo magnetico con un generico circuito di qualunque forma attraverso l'integrale:

$$\vec{F} = \oint d\vec{F} = \oint (i d\vec{l} \times \vec{B}_0) = i \oint d\vec{l} \times \vec{B}_0$$

Definizione 6.1 (Campo di induzione magnetica) Si definisce il campo di induzione magnetica \vec{B}_0 come quel campo tale che:

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}_0$$

Si misura in Tesla:

$$[B_0] = \frac{F}{il} = \left[\frac{N}{A \cdot m} \right] = [T]$$

Un'altra unità di misura molto utile è il *Weber*

Definizione 6.2 (Weber) Il Weber è un'unità di misura che serve per misurare il flusso del campo magnetico:

$$[\Phi_S(\vec{B}_0)] = [B_0 S] = \left[\frac{N \cdot m}{A} \right] = \left[\frac{J}{A} \right] = [Vs] = Wb$$

E vale la relazione:

$$[T] = \left[\frac{Wb}{m^2} \right]$$

Il campo di induzione magnetica \vec{B}_0 appena definito gode di una proprietà molto importante. Abbiamo detto che non si riesce mai ad isolare un polo magnetico. Quindi questo campo non è mai generato da poli isolati, ma da dipoli magnetici. Siccome come vedremo questo campo ha una struttura molto simile a quello elettrostatico, la caratteristica che non si possono separare poli di un segno dall'altro fa sì che qualunque superficie chiusa prendiamo, il flusso del campo magnetico su quella superficie deve essere nullo.

Dimostreremo questa proprietà rigorosamente in seguito, per il momento notiamo questo risultato molto importante, così importante da meritare di essere indicato come la *seconda equazione di Maxwell*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

Questa proprietà discende direttamente dalla non esistenza di monopoli magnetici.

Proviamo ora a vedere qual è la forza che si esercita con un circuito la cui sezione è non trascurabile (che occupa un volume) Per farlo analizziamo meglio la 6.1. Come si vede c'è una dipendenza diretta della forza dalla corrente elettrica. Proviamo a scrivere la corrente puntuale:

$$di = \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Poiché i vettori \vec{J} e $d\vec{l}$ sono tra loro paralleli posso usare \vec{J} nel prodotto vettoriale:

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}_0 dS dl$$

Ma il prodotto tra superficie infinitesima e spostamento infinitesimo dà il volume infinitesimo:

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}_0 d\tau \quad (6.2)$$

Da cui integrando su tutto il volume occupato dal circuito otteniamo

$$\vec{F} = \int_{\tau} \vec{J} \times \vec{B}_0 d\tau$$

6.2 Forza di Lorentz

Riprendiamo la (6.2) e proviamo ad esplicitare la relazione di \vec{J} per vedere come reagiscono le singole cariche alla presenza di un campo magnetico \vec{B}_0 .

Ricordiamo come è definito \vec{J} :

$$\vec{J} = n\vec{v}_d q \quad n = \frac{dN}{d\tau}$$

Sostituiamolo nella (6.2):

$$d\vec{F} = nd\tau \cdot q\vec{v}_d \times \vec{B}_0$$

$$d\vec{F} = dN \cdot (q\vec{v}_d \times \vec{B}_0)$$

Questa è la forza che si esercita su un numero dN di cariche. Per capire qual è la forza che si esercita sulla singola carica basta dividere per dN , e otteniamo la seguente relazione:

$$F = q\vec{v} \times \vec{B}_0 \quad (6.3)$$

Questa forza è nota come forza **forza di Lorentz**

Questa forza ha una proprietà molto particolare, oltre ad essere proporzionale alla velocità è una forza che è sempre diretta perpendicolarmente alla direzione dello spostamento (indicata da \vec{v}), per cui è una forza che non compie lavoro.

Se immergiamo una particella carica in un campo \vec{B}_0 uniforme, e la spariamo con velocità \vec{v} . Anche la forza di Lorentz rimane di modulo costante, ma non fa accelerare la particella, la devia costantemente, facendole fare un moto circolare uniforme (Figura 6.2)

Cerchiamo di calcolare qual è il raggio di questo moto circolare. Sapendo dalle relazioni di meccanica che la forza centripeta è proprio la forza di Lorentz, e che la velocità è ortogonale al campo magnetico, possiamo scrivere che:

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = F_L = qvB_0$$

$$r = \frac{mv}{qB_0} \quad (6.4)$$

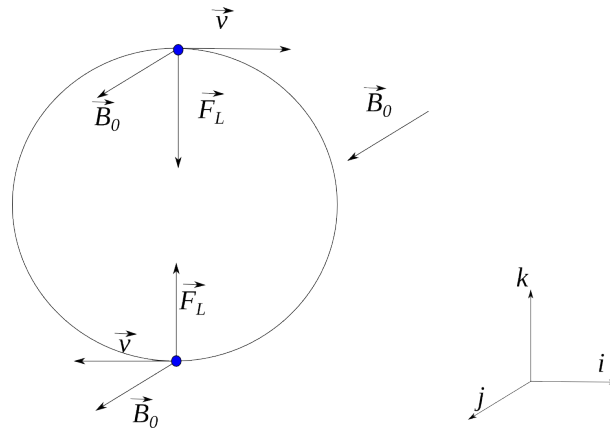


Figura 6.2: Traiettoria di una particella carica positivamente immersa in un campo magnetico omogeneo che si muove con velocità di modulo costante.

Dalla relazione del raggio possiamo ricavare due quantità interessanti, il periodo di rotazione e la frequenza:

$$\begin{aligned}
 m\omega_0^2 r &= q\omega r B_0 \\
 \omega_0 &= \frac{q}{m} B_0 \\
 T &= \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi m}{qB_0} \\
 \nu_0 &= \frac{qB_0}{2\pi m} \tag{6.5}
 \end{aligned}$$

Il valore ν_0 è detto **frequenza di ciclotrone** ed il fatto che **non** dipende dal raggio la rende particolarmente interessante, infatti questa caratteristica è sfruttata dai *ciclotroni*, i primi acceleratori di particelle.

6.2.1 Spettrometro di massa

Un esempio di impiego della forza di Lorentz riguarda lo spettrometro di massa, un particolare strumento in grado di sfruttare questo principio per separare da un unico fascio diverse particelle, selezionandole in base alla loro massa e alla loro carica.

Le particelle cariche vengono accelerate attraverso un condensatore, poi sparate in una zona in cui è presente campo magnetico uniforme e, in base alla velocità che hanno raggiunto, deviate dalla forza di Lorentz con raggi diversi a seconda del rapporto $\frac{m}{q}$. La Figura 6.3 spiega bene il funzionamento.

La velocità che raggiungono dopo aver attraversato il condensatore è:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = q\Delta V$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

Sostituiamo questa espressione dentro la 6.4 per ottenere il valore corretto del raggio:

$$r = \frac{1}{B_0} \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

$$r = \frac{1}{B_0} \sqrt{2\Delta V \frac{m}{q}}$$

Come si vede il raggio dipende solo dal rapporto tra massa e carica della particella, particolarmente utile per distinguere tra loro ioni di differenti molecole, che in genere possiedono la stessa carica, ma masse molto differenti.

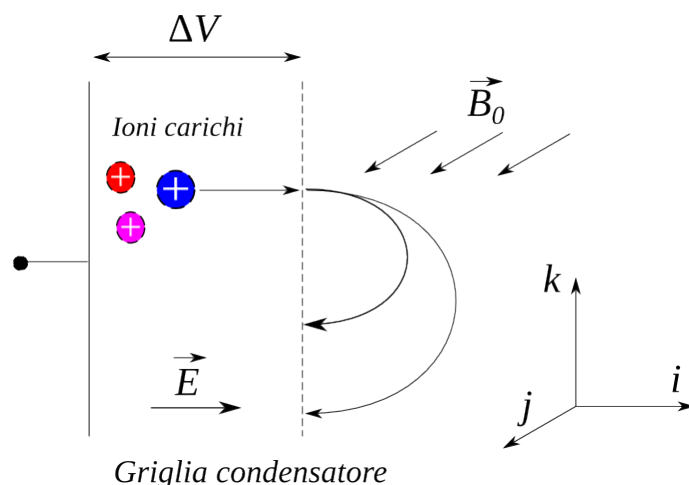


Figura 6.3: Funzionamento dello spettrometro di massa, gli ioni carichi attraversano un condensatore a cui è applicata una differenza di potenziale ΔV , acquistando energia cinetica e velocità. Escono dall'armatura del condensatore attraverso una griglia e vengono immerse in una zona di spazio in cui è presente un campo magnetico \vec{B}_0 uniforme e ortogonale alla loro velocità. La forza di Lorentz (6.3) curva le traiettorie con raggi differenti in base al rapporto carica/massa degli ioni, permettendo di distinguerli e classificarli.

Lo spettrometro di massa viene utilizzato anche nella tecnica del gas tracciante, per rilevare eventuali perdite di gas da un sistema. Il sistema viene pressurizzato con un gas tracciante, generalmente elio, e viene ispezionato attraverso una sonda collegata ad uno spettrometro di massa, lo spettrometro di massa riesce ad individuare precisamente il gas che fuoriesce dalla sonda, e isolarne l'elio ionizzato. In base alle percentuali di elio rilevato si ha una stima estremamente precisa della perdita del materiale.

6.2.2 Ciclotrone

Un altro interessante sistema che sfrutta la forza di Lorentz è il **ciclotrone**. Questo particolare sistema è la prima forma di acceleratore di particelle ad essere stato realizzato.

Il funzionamento è semplice. Un condensatore fatto da due griglie che lasciano passare le particelle è collegato ad un generatore che è in grado di invertire la polarità con una certa frequenza ν_0 . All'esterno di questo condensatore sono applicati due campi magnetici uniformi, e le particelle vengono poste nell'intercapedine.

Queste vengono accelerate dal campo elettrico e guadagnano una certa velocità v_0 una volta che giungono alla griglia, entrano nella zona con il campo magnetico e vengono deviate di un certo raggio r , fin quando rientrano all'interno del condensatore, in un'altra posizione, a questo punto il generatore ha invertito la polarità e le particelle sono accelerate verso l'altra griglia, e poi curvate nuovamente con raggio $r' > r$, quando rientrano il generatore ha invertito la polarità, e le particelle sono accelerate nuovamente.

Il funzionamento semplice del ciclotrone è garantito da una proprietà che avevamo discusso qualche paragrafo prima, in particolare dettato dalla frequenza di ciclotrone ν_0 data proprio dalla formula 6.5.

$$\nu_0 = \frac{qB_0}{2\pi m}$$

Che come si vede non dipende dalla velocità della particella e quindi non cambia durante il moto, questo ci assicura che il fascio di particelle rientra all'interno del condensatore sempre con la stessa frequenza e dopo lo stesso tempo, anche se ha percorso tratti più lunghi (r e v invece aumentano).

Il suo funzionamento è chiarito dalla Figura 6.4

6.2.3 Altri effetti della forza di Lorentz

Fino ad ora abbiamo visto tutti casi in cui la particella si muove perpendicolarmente alla direzione di un campo magnetico uniforme.

Che succede se la velocità ha anche una componente diretta lungo il campo?

Possiamo in questo caso scomporre il moto della particella, proiettandolo sul piano ortogonale a \vec{B}_0 . In questo piano quindi la particella compirà moto circolare uniforme, seguendo tutte le relazioni che abbiamo ricavato precedentemente con l'accortezza di sostituire a v_0 la proiezione di v sul piano ortogonale a \vec{B}_0 , ossia:

$$v_0 = v \sin \alpha$$

Dove α è l'angolo che formano tra loro i vettori \vec{v} e \vec{B}_0 . Sulla direzione di \vec{B}_0 invece abbiamo moto rettilineo uniforme. La composizione di questi due moti forma un elica.

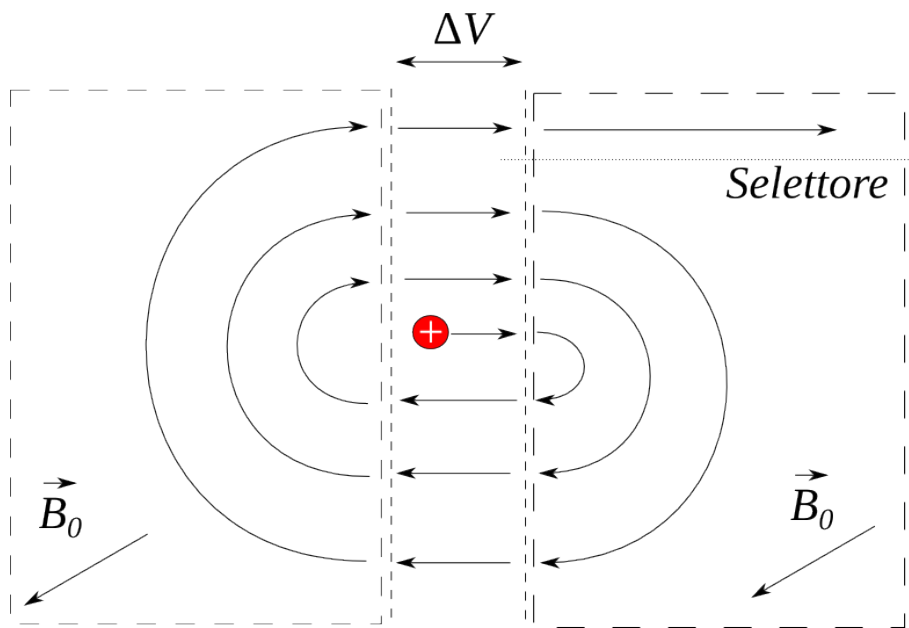


Figura 6.4: Funzionamento del sincrotrone, il condensatore centrale (le cui armature sono due griglie per far passare le particelle) è collegato ad un generatore che scambia la polarità con frequenza ν_0 , all'esterno c'è un campo magnetico \vec{B}_0 . Le particelle cariche sono poste al centro del condensatore, e vengono mano mano accelerate dal campo elettrico interno al condensatore (che scambiando le polarità è sempre concorde alla velocità delle cariche), mentre la velocità delle particelle aumenta, aumenta di conseguenza il loro raggio di curvatura della forza, raggiunta una certa velocità v (a cui corrisponde un raggio) le particelle vengono raccolte da un selettore.

Un caso interessante è quando \vec{B}_0 varia nello spazio e non è uniforme. Lo studio del moto della particella in questi casi può essere alquanto complesso, in particolare si osserva che la particella cerca di muoversi a elica seguendo le linee di campo di \vec{B}_0 .

Per spiegare questo fenomeno basta osservare che punto per punto la particella segue un movimento a elica attorno a \vec{B}_0 , in un istante successivo \vec{B}_0 sarà ruotato, per cui il moto circolare la particella lo compie sul nuovo piano perpendicolare a \vec{B}_0 muovendosi di moto rettilineo uniforme nella nuova direzione di \vec{B}_0 .

Ancora più interessante è il caso in cui anche il modulo di \vec{B}_0 è variabile, in questo caso se cresce di intensità lungo la linea di forza l'elica si restringerà di raggio. Possono avvenire fenomeni curiosi, come il cosiddetto *effetto bottiglia*, in cui le particelle cariche rimangono intrappolate in una regione di spazio dal campo magnetico, questo avviene ad esempio nel campo magnetico terrestre quando le particelle cariche della ionosfera si avvicinano velocemente ai poli, formano delle eliche che ruotano sempre più velocemente stringendosi. Il campo magnetico nei pressi dei poli diventa talmente intenso che è in grado di ribaltare la velocità di queste molecole che rimangono intrappolate nelle linee di campo non giungendo mai a terra.

Questo meccanismo ci protegge dal pericolosissimo vento solare.

6.3 Forza di interazione tra circuito e campo magnetico

Abbiamo visto che la presenza di un campo magnetico fa sì che le cariche in moto interagiscano con questo subendo una forza che le fa deviare dal loro moto naturale. Cosa succede se calcoliamo come agisce questa forza su di un circuito percorso da corrente?

Facciamo ora un semplice conto, nel caso di campo magnetico costante e per circuito una spira quadrata percorsa da corrente stazionaria i (vedi Figura 6.5).

Su due tratti del circuito si esercita una forza uguale e opposta, che se il circuito è indeformabile non produce effetti di coppia e si annulla, si produce una coppia che fa ruotare il circuito (vedi Figura 6.6).

Il momento della coppia può essere scritto come:

$$|\vec{M}| = l_2 |F| \sin \theta$$

Dove definiamo l'angolo θ come quello che formano tra loro il versore \hat{n} e il campo magnetico \vec{B} .

Il versore \hat{n} normale alla superficie della spira ha per verso quello tale che, guardando la spira dalla parte del vettore la corrente percorre la spira in verso antiorario.

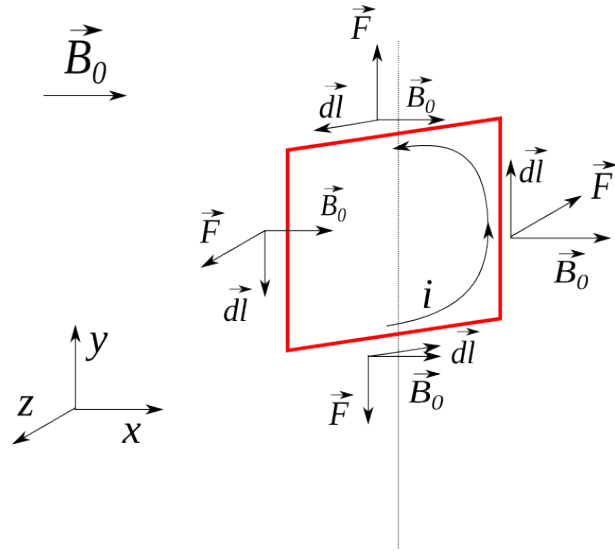


Figura 6.5: Schema di come agisce la forza di Lorentz sui vari tratti percorsi da corrente in una spira quadrata.

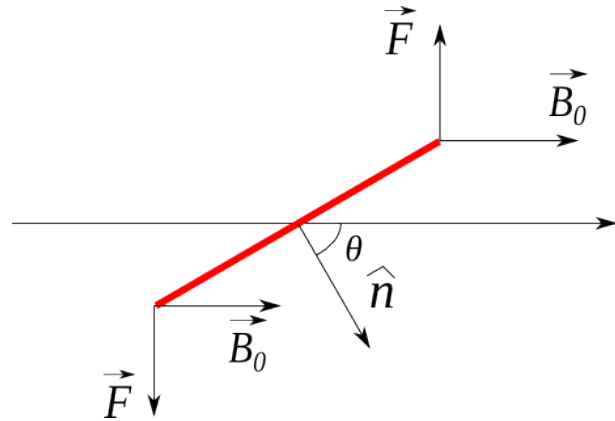


Figura 6.6: Vista del sistema in Figura 6.5 dall'alto, sulla spira si esercita una coppia che la fa posizionare perpendicolarmente al campo magnetico. Ossia fa allineare il vettore \hat{n} normale alla superficie del circuito con il campo magnetico \vec{B}_0 .

Con queste convenzioni possiamo trovare una forma migliore per esprimere il momento della coppia:

$$\vec{F} = i \oint \vec{dl} \times \vec{B}_0$$

Nei tratti di interesse il filo percorso da corrente è ortogonale a \vec{B}_0 per cui risulta che

$$|\vec{F}| = il_1 B_0$$

$$|\vec{M}| = l_1 l_2 i B_0 \sin \theta$$

Sia S la superficie che ha per bordo il circuito

$$|\vec{M}| = Si B_0 \sin \theta$$

Definizione 6.3 (Momento magnetico equivalente della spira) *Si definisce momento magnetico della spira:*

$$\vec{m} = iS\hat{n}$$

A questo punto possiamo riscrivere il momento magnetico della spira in questo modo

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

La spira percorsa da corrente si comporta esattamente come un ago magnetico a cui è associato un momento magnetico \vec{m} , definito come per il momento del dipolo elettrico.

Stiamo iniziando a vedere l'analogia tra correnti e dipoli magnetici. Un circuito percorso da corrente elettrica reagisce al campo magnetico come se fosse un dipolo magnetico.

Sarà mica vero che genera un campo magnetico pari a quello del dipolo? Per rispondere a questa domanda dovremo affrontare il problema di capire come genera un campo magnetico un filo percorso da corrente.

Iniziamo però a notare come in un materiale composto da atomi sono presenti sempre delle cariche in movimento, gli elettroni che ruotano intorno al nucleo, potremmo provare a spiegare il magnetismo dei materiali come se ci fosse una forza (o meglio una coppia) che agisce su questi atomi in modo da allineare tutte le orbite degli elettroni e far avere al materiale un momento magnetico non nullo, proprio come se fosse composto da tante spire percorse da corrente... questa spiegazione giustificherebbe anche l'impossibilità di separare i monopoli magnetici, poiché ad ogni atomo del materiale è legato un momento magnetico equivalente \vec{m} che identifica un dipolo magnetico.

Questa spiegazione qualitativa che abbiamo fornito ora costituisce la prima parte della dimostrazione di un teorema di fondamentale importanza per il corso, il teorema di **equivalenza di Ampere**²

²L'equivalenza di Ampere sostiene che i materiali magnetici possono essere pensati come formati da tante spire percorse da corrente allineate tra loro.

6.4 Campo magnetico generato da un circuito

Abbiamo analizzato gli effetti su di un circuito del campo magnetico, descritti dalla **seconda legge di Laplace**, occupiamoci ora invece di cercare di capire come viene generato il campo magnetico dal moto delle cariche.

Per arrivare a questo risultato e riassumere tutto in un'equazione finale ci sono voluti tantissimi esperimenti, il cui risultato comune è riassunto dalla **prima legge di Laplace**

Un elemento di filo conduttore $d\vec{l}$ situato in posizione \vec{r}' produce in campo magnetico $d\vec{B}_0$ in una posizione \vec{r} secondo questa legge:

$$d\vec{B}_0 = C \frac{i d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.6)$$

Possiamo integrare su tutta la lunghezza del filo la 6.6 per ottenere il campo magnetico generato da un circuito percorso da corrente:

$$\vec{B}_0 = Ci \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.7)$$

La costante C è definita dal sistema delle unità di misura, per il sistema internazionale si usa un altro valore:

$$C = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Definizione 6.4 (Permeabilità magnetica del vuoto) *Si definisce permeabilità magnetica del vuoto la costante μ_0 ed ha il valore di:*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

6.4.1 Legge di Biot-Savart

Sfruttiamo la prima legge di Laplace per calcolare il campo magnetico generato da un filo infinito percorso da corrente:

Iniziamo facendo delle considerazioni geometriche, il sistema è a simmetria cilindrica, quindi tutto ciò che avviene a distanza δ dal filo è invariante per rotazione.

facciamo riferimento alla Figura 6.7.

$$\vec{B}_0(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_l \frac{dl \cos \theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

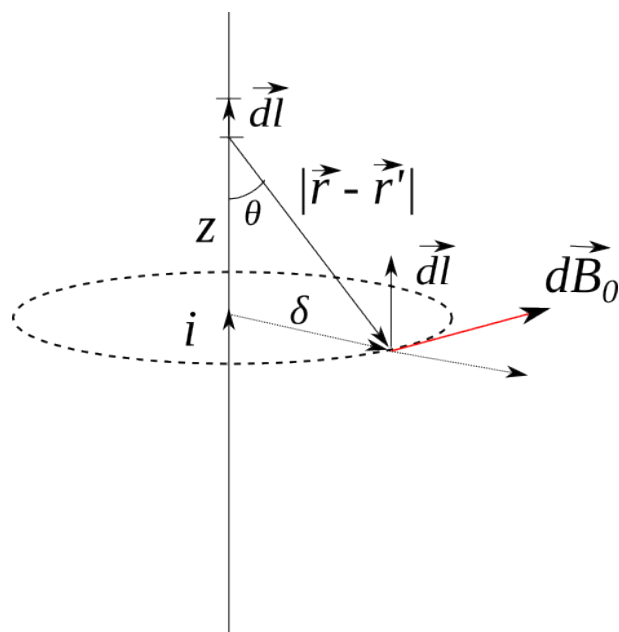


Figura 6.7: Calcolo del campo magnetico generato da un filo infinito, qui in figura viene messo in evidenza il contributo al campo magnetico fatto da un elementino di filo lungo $d\vec{l}$ posto ad un'altezza z dalla proiezione sul filo del punto in cui si vuole calcolare \vec{B}_0 . Questo punto è ad una distanza δ dal filo.

Cambiamo variabili per poter integrare sull'angolo³ θ :

$$l = \delta \tan \theta \quad dl = \delta \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{\delta}{\cos \theta}$$

$$B_0(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta d\theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\delta^2}$$

$$B_0(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi \delta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

Da cui otteniamo il valore finale del modulo del campo magnetico:

$$B_0(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi \delta} \quad (6.8)$$

La direzione invece la si capisce molto bene dalla Figura 6.7, infatti le linee di campo sono chiuse come delle circonferenze concentriche al filo, e sono dirette in senso antiorario se osserviamo il sistema dall'alto, intendendo per alto il verso in cui scorre la corrente.

L'equazione 6.8 è nota come **legge di Biot-Savar**, perché fu ricavata sperimentalmente da loro due prima che fosse nota la prima legge di Laplace.

Adesso si usa indicare come legge di Biot-Savar generalizzata l'ingegrale generale espresso nella 6.7.

6.4.2 Proprietà del campo magnetico (seconda equazione di Maxwell)

Nel primo paragrafo di questo capitolo avevamo dedotto qualitativamente una proprietà fondamentale del campo magnetico, così importante da rientrare in pieno merito tra le equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

Che esprime la non esistenza in natura dei monopoli magnetici, il campo magnetico è di natura **solenoidale**⁴.

Passiamo ora alla dimostrazione di questa affermazione in maniera più formale usando la legge di Biot-Savar.

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \times \vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|^3}$$

³L'angolo θ non è lo stesso usato in figura, ma il suo complementare.

⁴Vedi la definizione 1.6

Calcoliamo la divergenza:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \times \vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|^3}$$

Ricordiamo che l'operatore $\vec{\nabla}$ agisce sulle coordinate x, y, z , che rappresentano le coordinate del punto P in cui vogliamo calcolare il campo magnetico con la legge di Biot-Savar. Il vettore $d\vec{l}'$ è espresso invece nelle coordinate primarie x', y' e z' che identificano la posizione del vettore $d\vec{l}'$ nel circuito. Siccome l'integrale è fatto sulla lunghezza del circuito le variabili di integrazione sono proprio le coordinate primarie, quindi l'operatore di derivazione $\vec{\nabla}$ non agisce sulle variabili di integrazione, possiamo portarlo dentro l'integrale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{d\vec{l}' \times \vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|^3} \right)$$

Sfruttiamo ora la proprietà della divergenza del teorema 1.1.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\oint \frac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|^3} \cdot \vec{\nabla} \times d\vec{l}' - \oint d\vec{l}' \cdot \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|^3} \right) \right]$$

Poiché l'operatore divergenza non opera sulle coordinate primarie, il vettore $d\vec{l}'$ è costante rispetto alle derivazioni, quindi il primo pezzo dell'integrale è nullo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint d\vec{l}' \cdot \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|^3}$$

Ma abbiamo visto molte volte che:

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint d\vec{l}' \cdot \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{\Delta r}|} \right) \right]$$

Ma in questa espressione compare il rotore di un gradiente! Un gradiente genera per definizione un campo conservativo, e ogni campo conservativo è irrotazionale, ossia ha rotore nullo! Abbiamo quindi dimostrato che il campo di induzione magnetica è un campo solenoidale.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

6.4.3 Campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente

Calcoliamo come esercizio il campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente i , su di un punto P lungo il suo asse.

Facciamo riferimento alla simbologia usata in Figura 6.8

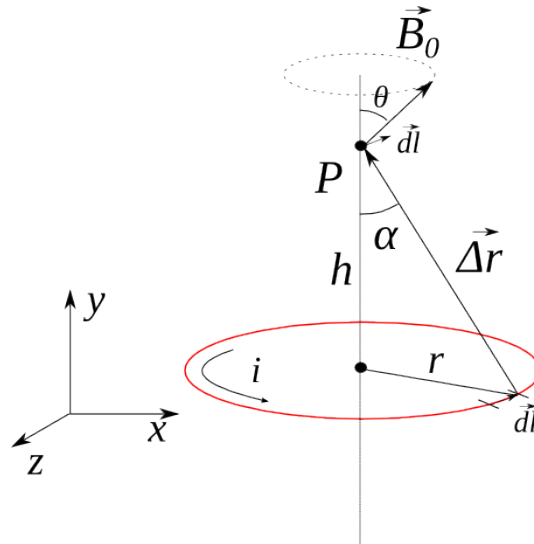


Figura 6.8: Calcolo del campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente. Questo schema mette in mostra la simmetria cilindrica del problema, infatti si nota che integrando sulla spira equivale a sommare tutti i contributi al vettore \vec{B}_0 che ruotano attorno ad una circonferenza. Quindi sopravvive solo la componente y del campo magnetico.

Come si nota dalla figura, il problema presenta una simmetria cilindrica, tutti i contributi del campo magnetico che non sono diretti lungo l'asse della spira si annullano (il problema deve essere invariante per rotazione), rimane solo la componente del campo parallela all'asse. basterà quindi moltiplicare per il coseno dell'angolo θ il termine sotto l'integrale per tirar fuori la componente assiale di $d\vec{B}$

$$|d\vec{B}_0| = \frac{dl \cos \theta}{|\Delta r|^2}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint |d\vec{B}_0|$$

Vediamo subito che sia α che θ sono costanti su tutto il cammino di integrazione:

$$\cos \theta = \sin \alpha = \frac{r}{\Delta r} \quad \Delta r = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_l \frac{dlr}{\Delta r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{r}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \oint_l dl$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{r}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi r$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} i \frac{r^2}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Al centro della spira, per $h = 0$:

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} i \frac{1}{r}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per π :

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i\pi r^2}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ma ricordiamoci come abbiamo definito il momento magnetico equivalente \vec{m} di una spira (6.3), possiamo scrivere che:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

In particolare mettiamoci nel caso di analizzare il campo magnetico a grande distanza dalla spira per notare un'analogia incredibile con il dipolo elettrico:

$$h \gg r$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{h^3}$$

Questa è la stessa formula del dipolo elettrico, cambiando la costante davanti e presenta il momento magnetico \vec{m} al posto del momento del dipolo elettrico \vec{p} , ma per il resto coincidono! La spira percorsa da corrente genera un campo magnetico che corrisponde a quello di un dipolo se ci poniamo a grandi distanze, quindi i materiali magnetici permanenti si comportano proprio come se al loro interno avessero spire percorse da corrente!

6.4.4 Campo magnetico generato da un solenoide percorso da corrente

Un sistema molto interessante è il solenoide, un sistema che ha la forma simile ad una molla, che si avvita molte volte attorno ad un asse. Se gli avvitamenti sono sufficientemente fitti, il sistema può essere schematizzato semplicemente come un insieme di tante spire messe l'una dopo l'altra,

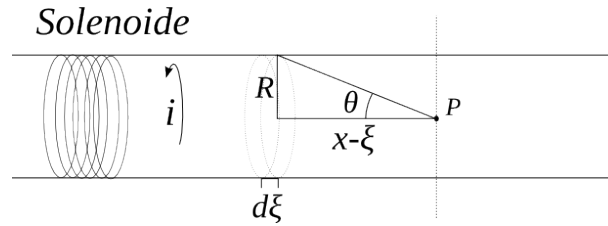


Figura 6.9: Schema del campo magnetico in un solenoide.

ma mantenute isolate tra di loro per evitare che la corrente scorri trasversalmente al solenoide. Può essere utile in questo caso calcolare il campo magnetico che si genera all'interno del solenoide (facciamo riferimento all'immagine di Figura 6.9).

Definiamo con n la densità di spire, ossia come il numero di spire totali N per la lunghezza del solenoide:

$$n = \frac{N}{L}$$

Sia x la posizione del punto P all'interno del solenoide, e sia ξ la variabile che identifica il tratto di solenoide che stiamo considerando. Il numero di spire in un tratto $d\xi$ sarà dunque pari a:

$$dN = nd\xi$$

Il contributo al campo magnetico dato quindi da delle spire che distano da P $x - \xi$ vale:

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2 nd\xi}{\left[R^2 + (x - \xi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando su tutta la lunghezza del solenoide otteniamo:

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} i \int_L \frac{R^2 nd\xi}{\left[R^2 + (x - \xi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Tuttavia questa grandezza può essere molto dura da integrare con questo metodo, è preferibile sfruttare un semplice cambio di variabili: Si nota da semplici considerazioni trigonometriche che:

$$x - \xi = \frac{R}{\tan \theta} \quad d\xi = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\sqrt{R^2 + (x - \xi)^2} = \frac{R}{\sin \theta}$$

Con questo possiamo passare all'integrale in θ

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R^2 n R d\theta}{\frac{R^3}{\sin^3 \theta} \sin^2 \theta}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} n i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} i n (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Dove θ_1 e θ_2 sono gli angoli con cui P vede gli estremi del solenoide, nel caso particolare in cui il solenoide tende ad essere di lunghezza molto maggiore del raggio, possiamo idealizzarlo come un solenoide infinito, e far tendere a 0 e π i due angoli di vista.

$$B_0 = \mu_0 i n$$

Questo caso è di particolare interesse, poiché si riesce a dimostrare che per un solenoide infinito il campo magnetico all'interno è costante, e quello esterno è nullo. Troveremo il solenoide in svariati esempi in futuro.

Concentriamoci un attimo sul campo magnetico all'esterno di un solenoide infinito. Questo sistema ha un'apparente contraddizione: le linee di forza del campo magnetico sembrano non chiudersi. In realtà possiamo schematizzare un solenoide infinito come una porzione di un toro. In un toro le linee di forza del campo magnetico si chiudono su se stesse, nel solenoide quindi le linee si chiudono all'infinito.

Nonostante questo, anche all'esterno del solenoide infinito un piccolo campo magnetico c'è: infatti nel solenoide la corrente non circola compiendo circonferenze esatte, ma si avvita spostandosi longitudinalmente. Questo moto di corrente lungo l'asse del solenoide genera a sua volta un campo magnetico all'esterno del tubo, proprio come se fosse un filo percorso da corrente i' il cui valore dipende dalla larghezza del solenoide e dal *passo* delle spire (distanza tra una spira e la successiva, dx)

$$i' = \frac{dx}{2\pi r} i$$

Il campo magnetico generato segue ovviamente la legge di Biot-Savart.

6.4.5 Campo magnetico generato da una singola carica in moto

Possiamo scrivere la formula del campo magnetico nel caso di una corrente che percorre un filo di sezione non trascurabile attraverso il vettore \vec{J} , riprendiamo la prima equazione di Laplace (6.6)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3} dS dl$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3} d\tau \quad (6.9)$$

Da cui possiamo ricavare il campo magnetico anche attraverso un integrale di volume:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3} d\tau$$

Dall'equazione (6.9) del campo magnetico si può provare a dedurre qual è il campo magnetico generato dal moto di una singola carica.

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{nq\vec{v} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3} \right) d\tau$$

Ma $nd\tau = N$ poiché n è la densità volumica di portatori di carica, quindi per ottenere il contributo al campo della singola carica elettrica basta dividere per $nd\tau$

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3}$$

6.5 Teorema della circuitazione di Ampere

Vogliamo adesso dimostrare nel caso della magnetostatica una importantissima relazione sul campo magnetico, nota come teorema di Ampere:

Teorema 6.1 (Circuitazione di Ampere (correnti stazionarie)) *La circuitazione del campo di induzione magnetica \vec{B}_0 è proporzionale alle correnti concatenate al percorso (siano n in numero):*

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^n \mu_0 i_n$$

Dove sono contate più volte le correnti attorno a cui il cammino di integrazione fa più giri completi.

In forma vettoriale questo corrisponde a

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} \quad (6.10)$$

La dimostrazione di questo teorema nel caso più generale (sempre però rimanendo nell'ipotesi di correnti stazionarie) è di per se molto semplice, e richiede solo lunghi calcoli tediosi, indichiamo al lettore la via per farla, basta dimostrare la relazione vettoriale e calcolare il rotore del campo magnetico definito come integrale di volume a partire dalla (6.9).

Noi mostreremo una dimostrazione alternativa a questa, meno generale, ma di più interesse fisico. Supponiamo di avere a che fare solo con fili rettilinei infinitamente lunghi percorsi da corrente⁵, e scegliamo un arbitrario cammino di integrazione chiuso, che si avvolge una volta intorno al nostro filo (percorso da corrente i)

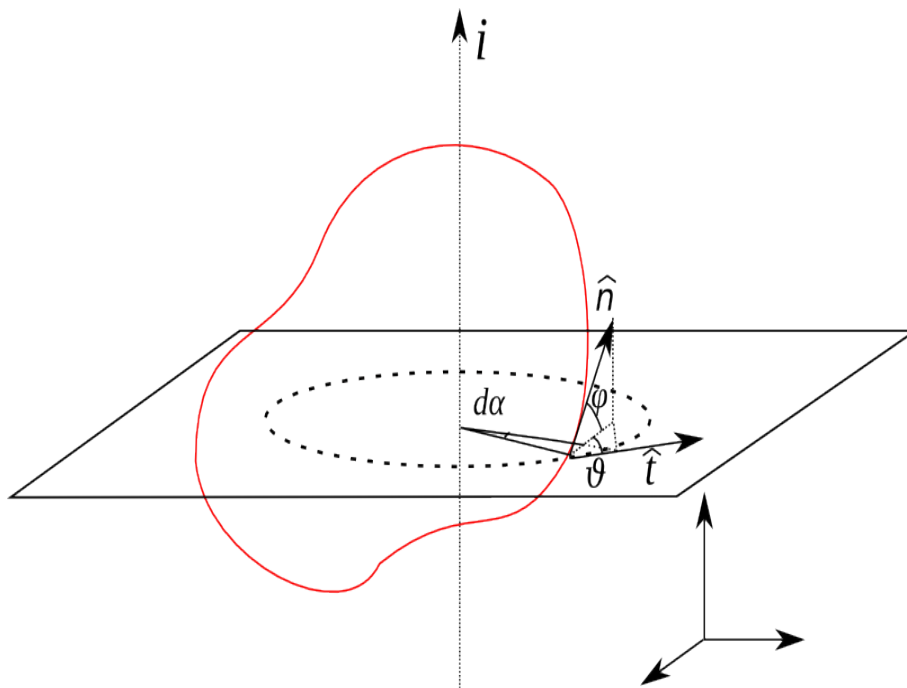


Figura 6.10: Schema del calcolo della circuitazione del campo magnetico. In rosso il percorso \mathcal{L} di integrazione, abbiamo preso qui un piano ortogonale al filo percorso da corrente i , il vettore \hat{n} rappresenta il vettore del percorso di integrazione, il vettore \hat{t} rappresenta il vettore del campo magnetico, tangente alle circonferenze concentriche del filo, e l'angolo $d\alpha$ è la vista angolare del segmento $d\vec{l}$ dal filo.

Facciamo riferimento alla Figura 6.10 per vedere un generico cammino tridimensionale che si avvolge intorno al nostro filo percorso da corrente. Vogliamo calcolare la quantità:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}_0 \cdot \hat{n} dl$$

⁵La perdita di generalità di questa dimostrazione dipende proprio da questa premessa, tuttavia ci si può convincere facilmente svolgendo qualche tedioso calcolo (il Jackson ad esempio li riporta tutti) che la relazione (6.10) discende direttamente dalle proprietà del campo magnetico, e quindi il teorema ha validità del tutto generale.

Poiché il campo magnetico è diretto sempre lungo i piani perpendicolari al filo proiettiamo lo spostamento su questo piano proprio come si vede in Figura 6.10

Il campo magnetico è diretto come il versore \hat{t} mostrato in figura, per cui il nostro integrale diventa:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{L}} B_0(r) \hat{t} \cdot \hat{n} dl$$

Possiamo scomporre il termine $\hat{n} dl$ in tre componenti, una parallela al filo, una parallela al raggio della circonferenza attorno al filo, ed una parallela a \hat{t} . Di queste l'unica che non si annulla nel prodotto scalare è quella parallela al versore \hat{t} . Chiamiamo questa componente del versore ds

$$\oint_{\mathcal{L}} B_0(r) \hat{t} \cdot \hat{n} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{\mathcal{L}} \frac{ds}{r}$$

Dove abbiamo sostituito all'espressione di $B_0(r)$ la legge di Biot-Savart (6.8), i più svegli avranno già riconosciuto il termine dentro l'integrale, miei lettori, questo è l'elemento infinitesimo di circonferenza ds diviso il raggio r della circonferenza, altri non è che l'elemento di angolo della circonferenza $d\alpha$.

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}_0 \cdot \hat{n} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{2\pi n} d\alpha$$

A questo punto il dominio di integrazione non è più il percorso, ma l'angolo che il filo vede nei punti del percorso, questo vale 2π per ogni giro che il percorso compie attorno al filo:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi n = \mu_0 i n$$

Ovviamente se la linea non si concatena mai, $n = 0$ e quindi l'integrale è nullo. Questo può essere visto anche come conseguenza della definizione puntuale del teorema di ampere (che dimostreremo a breve) (6.10), in cui se il cammino chiuso (e il suo interno) è definito in una zona dello spazio in cui \vec{J} è nullo (non passano correnti), il campo magnetico risulta avere rotore nullo in un dominio semplicemente connesso, quindi in questo caso si comporta proprio come un campo conservativo e la sua circuitazione è nulla!

Vediamo adesso di dimostrare la 6.10, prendiamo un percorso chiuso semplice, con un solo avvolgimento:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 i = \mu_0 \int_{S_{\mathcal{L}}} \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Usiamo sulla circuitazione il teorema della divergenza:

$$\int_{S_{\mathcal{L}}} \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 dS = \mu_0 \int_{S_{\mathcal{L}}} \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Poiché sia il cammino di integrazione che la superficie interna è arbitraria possiamo scegliere per entrambi gli integrali la stessa superficie di integrazione

$$\int_{S_c} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 - \mu_0 \vec{J}) dS = 0$$

Vista l'arbitrarietà della superficie scelta, deve essere nulla la funzione integranda:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 - \mu_0 \vec{J} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

Queste relazioni valgono solo nel caso di correnti stazionarie, ecco che abbiamo terminato la dimostrazione del teorema di Ampere!

6.6 Potenziale Magnetico Scalare

Abbiamo visto come per il campo elettrico sia possibile definire una grandezza chiamata potenziale elettrostatico. La possibilità di introdurre questa grandezza è data dalla proprietà del campo elettrico di essere irrotazionale:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

Questa condizione non si verifica sempre per i campi magnetici, infatti il teorema della circuitazione di Ampere ci assicura che:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Ora se ci mettiamo in una regione dello spazio in cui non scorrono correnti rimane verificata comunque la condizione per cui \vec{B} è un campo irrotazionale.

Sotto quali ipotesi l'irrotazionalità di un campo è condizione sufficiente alla sua conservatività? Basta avere un dominio semplicemente connesso.

Da queste proprietà vettoriali del campo \vec{B} deduciamo che è possibile definire analogamente a quanto fatto per il campo elettrico, un potenziale anche per il campo di induzione magnetica in regioni dello spazio semplicemente connesse in cui non scorra corrente.

Definiamo dunque il potenziale magnetico scalare φ tale che sia soddisfatta questa condizione

$$-\vec{\nabla}\varphi = \vec{B}$$

Troviamo l'espressione per φ . Supponiamo di compiere uno spostamento infinitesimo \vec{dl} e calcolare la circuitazione di \vec{B} in quel percorso:

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{dl} = \vec{B} \cdot \vec{dl}$$

Il primo termine è però proprio la variazione di φ lungo la direzione \vec{dl}

$$-d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{\vec{dl}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{dl}$$

Dove abbiamo sostituito al campo magnetico la sua espressione data dalla prima legge di Laplace (6.6). Il termine nell'integrale è il campo magnetico generato dall'elemento di circuito per lo spostamento \vec{dl} del punto P in cui stiamo calcolando il campo magnetico. Mettiamoci nel sistema di riferimento del punto in cui vogliamo calcolare il campo magnetico, e immaginiamo che sia il circuito a compiere uno spostamento \vec{ds} contrario a \vec{dl} :

$$\vec{ds} = -\vec{dl}$$

$$d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{\vec{dl}' \wedge \Delta\vec{r}}{|\Delta r|^3} \cdot \vec{ds}$$

Il vettore \vec{ds} è costante rispetto all'integrale, possiamo portarlo all'interno, e sviluppare il prodotto misto:

$$d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{\vec{ds} \wedge \vec{dl}'}{|\Delta r|^3} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{\vec{dl}' \wedge \vec{ds}}{|\Delta r|^3} \cdot (-\Delta\vec{r})$$

Il prodotto vettoriale tra \vec{ds} e \vec{dl}' è la superficie dS che spazza un elemento di circuito durante lo spostamento \vec{ds} a cui è sottoposto⁶. Abbiamo scambiato il prodotto vettoriale per indicare con $-\Delta\vec{r}$ il vettore che da P indica il circuito

$$\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_S \frac{dS \hat{n} \cdot (-\Delta\vec{r})}{|\Delta r|^3}$$

Ma il prodotto scalare tra $dS \hat{n}$ e $\Delta\vec{r}$ è pari alla proiezione di dS sulla sfera che ha per centro P e raggio Δr , chiamiamola dS_n :

$$\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_S \frac{dS_n}{|\Delta r|^2}$$

Riconosciamo però nell'integrando l'espressione della porzione di angolo solido che dal punto P identifica la superficie dS_n di circuito (ancora una volta questo è l'angolo $-d\Omega$).

$$\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\Omega} d\Omega$$

$$\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \Omega$$

Da cui otteniamo la generica espressione per il vettore \vec{B} :

$$-\vec{\nabla}\varphi = \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega$$

⁶Estendiamo automaticamente l'integrale anche a tutta la superficie, eliminando il differenziale in φ

Se proviamo a ricavare l'espressione del potenziale magnetostatico scalare di una spira percorsa da corrente otteniamo che

$$\varphi = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \Omega \simeq \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{S \hat{n} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Notiamo che il cambio di segno è dovuto al fatto che abbiamo preferito indicare con \vec{r} il vettore che dal centro della spira identifica il punto P , e non il contrario come invece implicherebbe la definizione di Ω . Da cui si ottiene:

$$\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Che è esattamente analoga al potenziale elettrostatico generato da un dipolo!

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Questo completa la dimostrazione del teorema di equivalenza di Ampere, a grande distanza una qualunque spira con momento magnetico \vec{m} si comporta esattamente come un dipolo magnetico, generando un campo pari a quello del dipolo!

Possiamo fare un ultimo commento per quel che riguarda le regioni di spazio che non sono semplicemente connesse. In queste zone (dette *moltepiamente connesse*) non è vero che \vec{B} è conservativo, tuttavia rimane irrotazionale, è quindi possibile definire una nuova funzione di potenziale scalare φ perdendo la sua monodromia. Sarà in generale una funzione a più valori, infatti la circuitazione fatta di \vec{B} non sarà 0 a priori, ma potrebbe differire di un fatto $\mu_0 n i$ dove n è pari al numero di avvolgimenti del percorso attorno ai punti in cui \vec{J} è non nullo.

Da cui φ sarà:

$$\varphi = -\frac{\mu i}{4\pi} (\Omega + 4\pi n)$$

Poiché $4\pi n$ è però una costante rispetto allo spazio, il campo \vec{B} , gradiente del potenziale polidromo, risulta ugualmente univocamente determinato.

6.7 Problema generale della magnetostatica

Una volta introdotto il campo di induzione magnetica \vec{B} , vogliamo associarvi, come sempre, un potenziale; in questo caso non sarà una funzione scalare, bensì vettoriale, infatti se teniamo conto della seconda equazione di Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, che vale sempre, e della relazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, vediamo che un potenziale, che chiamiamo \vec{A}_0 , deve essere legato a \vec{B} come:

$$\vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0$$

In questo modo, l'equazione di Maxwell rimane soddisfatta. Ora dato \vec{A}_0 possiamo definire $\vec{A}'_0 = \vec{A}_0 + \vec{\nabla}f$ arbitrariamente⁷, dove la f è una funzione scalare, e anche in questo caso, il potenziale soddisfa la richiesta che la divergenza di \vec{B} sia nulla. Fra tutte le scelte di \vec{A}_0 possibili conviene prendere \vec{A} tale che $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'_0 = 0$, cosicché si ha:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot f$$

$$\nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0$$

In questo modo, per quanto possa essere difficile a livello matematico, posso ricavarci la f ; tuttavia scegliamo di lavorare in quella che si dice Gauge a $\vec{\nabla}f = 0$ (gauge di **Coulomb**), e quindi non ci rimane che determinare l'espressione del potenziale, per farlo prendiamo la quarta equazione di Maxwell in regime stazionario e sostituiamo \vec{B} con la divergenza di \vec{A} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_0) = \mu_0 \vec{J}$$

Ricordando la relazione vettoriale $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ otteniamo:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_0) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0)}_{=0} - \underbrace{\vec{A}_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})}_{=\nabla^2 \vec{A}_0}$$

Se ora sostituisco ottengo:

$$\nabla^2 \vec{A}_0 = -\mu_0 \vec{J}$$

Le tre componenti di questa equazione vettoriale sono formalmente identiche all'equazione di Poisson $\nabla^2 V_0 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, equazione la cui soluzione è nella forma:

$$V(\vec{r})_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' + C$$

Di conseguenza le tre componenti avranno forma analoga, con le dovute sostituzioni, e la versione vettoriale sarà:

$$\vec{A}(\vec{r})_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' + C$$

dove come nel caso elettrico $C = 0$ se $r \rightarrow \infty$, a condizione che il circuito sia finito!

6.8 Effetto Hall

Consideriamo ora, un conduttore parallelepipedale, di sezione $S = a \cdot b$ e lunghezza infinita, percorso da corrente costante I ed immerso in un campo magnetico costante \vec{B} perpendicolare alla corrente (vedi figura 6.8).

⁷La relazione prende il nome di trasformata di Gauge

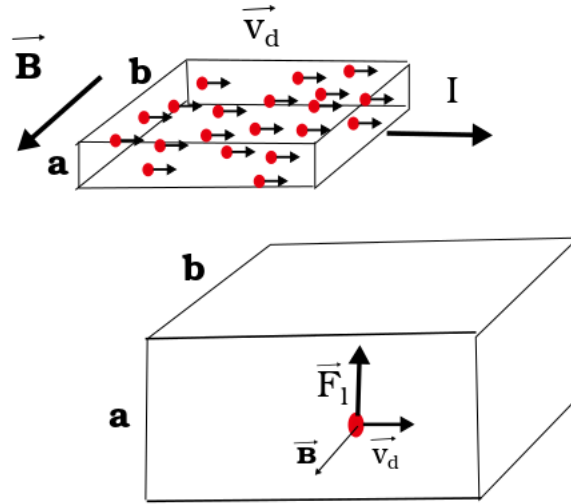


Figura 6.11: Effetto Hall

Per effetto del campo magnetico i portatori di corrente vengono deviati verso la superficie del conduttore di lato b , con riferimento alla figura, e poichè non possono uscire dal conduttore si ammassano sulla superficie, creando una distribuzione di carica. Questa distribuzione genera a sua volta un campo elettrico E_s , che man mano che cresce respinge le cariche. Nel momento in cui si raggiunge l'equilibrio fra la forza generata dal campo $F_s = qE_s$ e la forza di Lorentz $F_l = qv_d B$ ⁸, le cariche sentono una forza totale nulla e continuano a scorrere. Da questo fenomeno si possono ricavare utili relazioni che legano le grandezze in gioco, infatti il campo elettrico E_s crea una differenza di potenziale, la tensione di Hall, che è facilmente misurabile; vediamo a cosa si può legare! Abbiamo dall'uguaglianza delle forze che:

$$F_s = F_l \implies E_s = v_d B$$

l'accumulo di cariche opposte sulle pareti del conduttore è schematizzabile come un condensatore piano, quindi la differenza di potenziale è semplicemente $V_H = aE_s$ e ricordando che $I = S \cdot J = ab \cdot nqv_d$, possiamo scrivere:

$$V_H = av_d B = \frac{1}{nq} I \frac{B}{b} = R_H \frac{IB}{b}$$

dove la quantità $R_H = \frac{1}{nq}$ prende il nome di coefficiente di Hall.

Sfruttando questa relazione si può costruire una sonda di Hall, che permette di determinare il numero di portatori di carica ed eventualmente

⁸ v_d e B sono perpendicolari

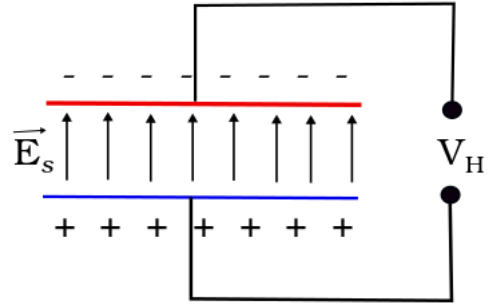


Figura 6.12: Schematizzazione dell'accumulo di cariche

anche il tipo, infatti tutte le quantità che compaiono nella formula sono facilmente misurabili.

Capitolo 7

Magnetismo nella materia

Analogamente a quanto fatto per l'elettricità, dopo aver analizzato il campo magnetico nel vuoto vediamo come si propaga il campo magnetico nella materia e come reagiscono gli oggetti immersi in esso. Innanzitutto si osserva che in presenza di campo magnetico la materia si può comportare in tre modi diversi. Se prendiamo un solenoide in cui scorre corrente e mettiamo vari cilindri di materiali diversi vicino al solenoide, vediamo che cilindri di ferro (Fe), cobalto (Co) e nichel (Ni) vengono risucchiati con forza dal solenoide, mentre sostanze come il cloruro di sodio (NaCl), vengono attratte debolmente ed infine altre come il rame (Cu) vengono respinte. Chiameremo **ferromagnetiche** le sostanze che si comportano come il ferro, **paramagnetiche**, quelle che si comportano come il sale da cucina e **diamagnetiche** le sostanze come il rame. Ora riprendendo i risultati trovati nel vuoto osserviamo che la seconda equazione di Maxwell deve continuare a valere in quanto poli semplici non ci sono nel vuoto e tantomeno nella materia, quindi $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ è ancora valida, per la quarta invece bisogna aggiungere le correnti microscopiche dovute al momento magnetico generato dal movimento degli elettroni, avremo quindi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_m) \quad (7.1)$$

Imitando quanto fatto per la polarizzazione dobbiamo trovare un analogo per il vettore \vec{P} dal quale ricavare le correnti microscopiche come da P abbiamo ricavato le cariche di polarizzazione. Cominciamo con lo stimare la corrente microscopica associata ad un atomo di idrogeno (il più semplice da schematizzare), avremo che $i = \frac{e}{T}$, quindi dobbiamo ricavarci il periodo di rotazione dell'elettrone. Semplificando al massimo il modello atomico possiamo dire che l'elettrone compie un'orbita circolare attorno al nucleo positivo, quindi ci dovrà essere equilibrio fra la forza centrifuga e quella coulombiana, cioè:

$$\frac{m_e v_0^2}{r_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

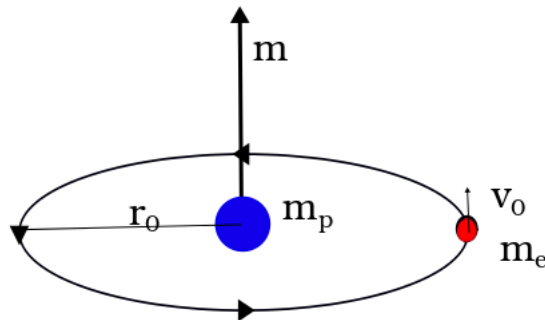


Figura 7.1: Schematizzazione dell'atomo di idrogeno

da questa relazione possiamo ricavare sia il periodo (funzione del raggio) sia l'energia cinetica. Se sostituiamo $\frac{v}{r} = \omega = \frac{2\pi}{T}$ e svolgiamo i semplici passaggi otteniamo:

$$m_e \omega^2 r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \rightarrow T = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi\epsilon_0 r_0^3 m_e}$$

mentre se sempre dall'equazione di partenza semplifichiamo il raggio e moltiplichiamo ambedue i membri per un mezzo abbiamo:

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Ora l'energia totale dell'atomo (supponendo in quiete il suo baricentro) vale:

$$E = E_p + E_e + E_c + E_u = m_p c^2 + m_e c^2 + \frac{1}{2} m_e v_0^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} > 0$$

dove i primi due termini sono propri del protone e dell'elettrone mentre gli ultimi due sono l'energia meccanica del sistema; se sostituiamo l'energia cinetica con la quantità trovata in precedenza abbiamo:

$$E_{meccanica} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}$$

Per rompere l'atomo è necessario fornirgli una quantità di energia, chiamata di ionizzazione, $L_i = -E_m$; questa quantità è misurabile sperimentalmente e da questa possiamo ricavare il raggio dell'atomo di idrogeno e da questo il periodo!

$$r_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 L_i} = 0.5 \text{ \AA} \rightarrow T = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r_0^3} \approx 1.5 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

Finalmente possiamo calcolare la corrente microscopica:

$$i = \frac{e}{T} \approx 10^{-3} \text{ A}$$

essendoci una corrente ci sarà un momento magnetico perpendicolare al piano di rivoluzione dell'elettrone $m = i\pi r_0 = 1.35 \cdot 10^{-24} Am^2$, orientato in modo da 'vedere' la corrente scorrere in senso antiorario.

7.1 Intensità di magnetizzazione

In generale atomi e molecole che formano i vari materiali sono di gran lunga più complessi rispetto all'atomo di idrogeno, ma per capire come vanno le cose possiamo proseguire usando questa schematizzazione, ossia considerare gli atomi come spire microscopiche percorse da corrente a cui si associa un momento magnetico. Se prendiamo un volume piccolo di sostanza, piccolo quanto basta per avere comunque un numero sufficiente di atomi per una buona media, possiamo definire il vettore intensità magnetica come:

$$\vec{M} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\tau} \quad [A/m]$$

Normalmente, in assenza di campo magnetico, e in analogia con quanto detto per i dipoli elettrici in assenza di campo elettrico, i momenti magnetici sono disposti uniformemente in tutte le direzioni e l'intensità è nulla. Tuttavia in presenza di un campo \vec{B} i momenti tendono ad orientarsi nella direzione del campo (ostacolati dall'agitazione termica). Come si può vedere in figura

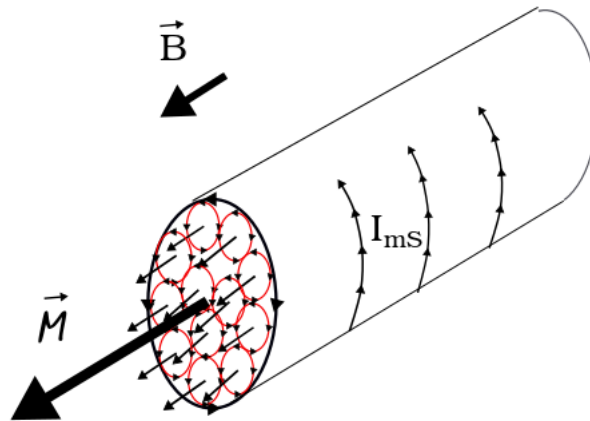


Figura 7.2: Cilindro immerso in un campo magnetico

7.1, se B e il materiale sono omogenei tutti i momenti sono orientati nello stesso modo e quindi la corrente scorre nello stesso verso, nei punti interni al materiale allora c'è la sovrapposizione di correnti con verso opposto e quindi la densità di corrente microscopica di volume è nulla, $\vec{J}_{mV} = 0$, al contrario sulla superficie avremo tante correnti che scorrono nello stesso

verso in ogni spira, ovvero è come se ci fosse una corrente che gira attorno a tutta la superficie, avremo una densità superficiale $\vec{J}_{mS} \neq 0$, che genererà una corrente, chiamata corrente amperiana di superficie:

$$dI_s = J_{mS} \cdot \hat{n} dh$$

All'interno del materiale se questo non è omogeneo, si definisce una corrente amperiana di volume:

$$dI_v = \vec{J}_{mV} \cdot \hat{n} * dS$$

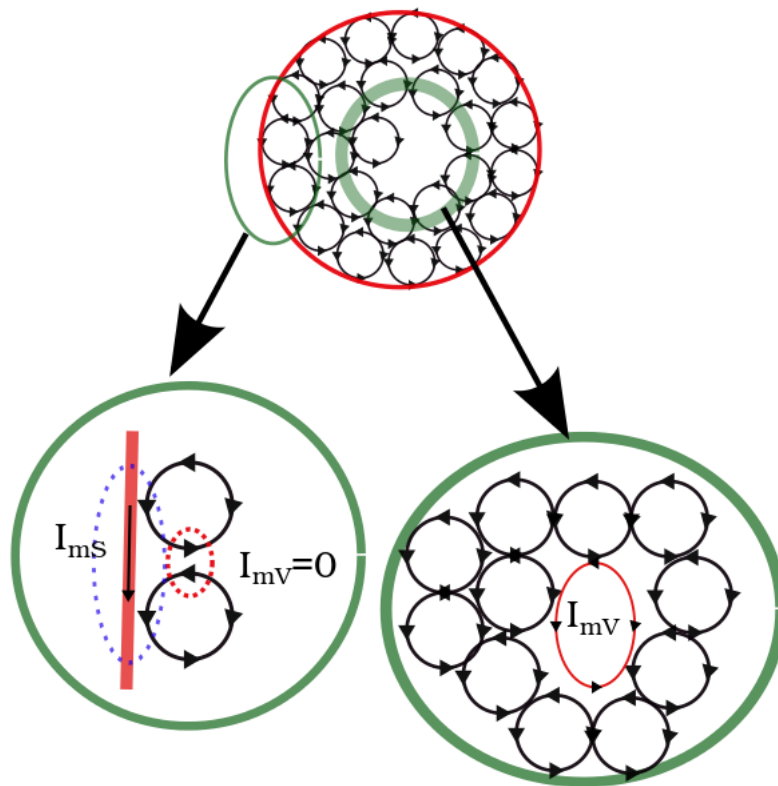


Figura 7.3: Correnti microscopiche

7.2 Potenziale vettore e correnti amperiane

Non rimane che collegare le correnti microscopiche all'intensità di magnetizzazione così come si sono legate le densità di polarizzazione al vettore P. Come prima cosa dobbiamo esprimere il potenziale vettore generato da una spira quando la distanza è molto maggiore del raggio della spira (così da

potercene servire per stimare il potenziale generato dalle correnti atomiche). Se consideriamo una spira con centro nell'origine (vedi fig. 7.2) percorsa

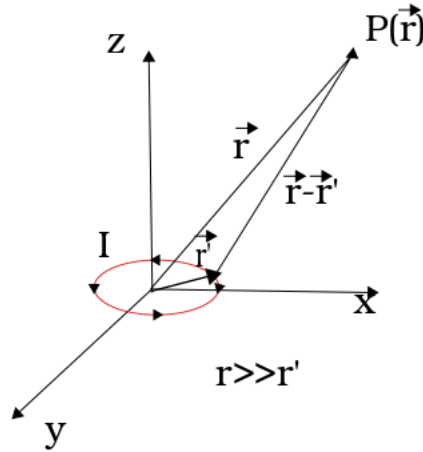


Figura 7.4: Potenziale vettore di una spira

dalla corrente I in senso antiorario il potenziale vettore sarà:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \hat{n} dS'$$

¹ Ora ricordando che $\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ e supponendo che $r \gg r'$ possiamo scrivere:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\hat{n} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \underbrace{\int_S dS'}_{=S_{spira}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\widehat{IS\hat{n}} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

^{2 3} Armati del risultato appena ottenuto possiamo procedere a collegare le correnti microscopiche con il vettore M, infatti se consideriamo un volume τ di materiale magnetizzato, come in figura 7.2, $d\vec{m} = \vec{M} d\tau'$ e quindi possiamo scrivere:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau'$$

A questo punto sfruttiamo la relazione vettoriale sui rotori:

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f\vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla} f \times \vec{v}$$

¹ Dove si è usata l'uguaglianza $\int_S \vec{\nabla} f \times \hat{n} dS = -\int_l f d\vec{l}$

² Dove il meno scompare in quanto $a \times b = -b \times a$

³ Dal potenziale si può facilmente ricavare il campo magnetico come $B_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0$

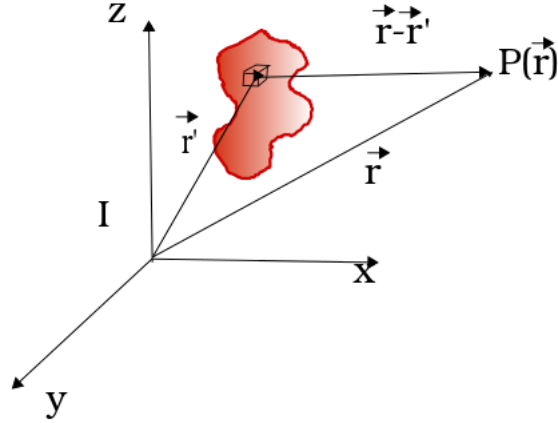


Figura 7.5: Potenziale generato dalle correnti microscopiche

Da cui:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau'$$

Se adesso applichiamo la formula di Green⁴ al secondo integrale il potenziale diventa:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left(\frac{\vec{M}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \hat{n} dS'$$

Ma il potenziale vettore è definito come:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

Quindi, se immaginiamo di dividere il volume del materiale in un volume interno più un volume superficiale $V = \delta S$, con delta spessore infinitesimo, A vale:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}_m V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\overbrace{\vec{J}' \cdot \delta}^{J_{mS}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

Per confronto delle due formule si ottengono le relazioni:

- $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_m V$
- $\vec{M} \times \hat{n} = \vec{J}_m S$

⁴ $\int_{\tau} \vec{\nabla} \times \vec{v} d\tau = - \int_S \vec{v} \times \hat{n} dS$

7.3 Il campo magnetico \mathbf{H}

Possiamo a questo punto descrivere il problema generale della magnetostatica con queste due formule:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m)\end{aligned}$$

Dove J_m sono le correnti di superficie e di volume presenti nel mezzo materiale. Tuttavia è ancora scomodo lavorare con campi che dipendono dalle correnti microscopiche, sarebbe molto più conveniente introdurre un campo vettoriale nuovo, tale che le proprietà di questo campo non dipendano più da \vec{J}_m ⁵.

Prendiamo ancora la 7.1, sostituiamo \vec{J}_m con le correnti di volume:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 (\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \right) &= \vec{J}\end{aligned}$$

Definizione 7.1 (Campo magnetico) *Definiamo il vettore di campo magnetico \vec{H} in questo modo:*

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}$$

Grazie all'introduzione del vettore di campo magnetico \vec{H} possiamo riscrivere la 7.1 In questo modo molto più elegante:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (7.2)$$

Come si vede la 7.2 non dipende più dal vettore \vec{J}_m delle correnti microscopiche, e la coppia di equazioni:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}\end{aligned} \quad (7.3)$$

Contiene solo grandezze che non dipendono dal materiale, il lettore noti la somiglianza con le equazioni analoghe del campo elettrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

⁵Abbiamo fatto analogamente nel caso dei dielettrici introducendo il vettore di spostamento \vec{D} .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Chiaramente come nel caso dei dielettrici le proprietà del materiale si nascondono dentro la relazione che lega il campo di induzione magnetica \vec{B} al campo \vec{H} . Dalla definizione di \vec{H} (7.1) possiamo ricavare semplicemente:

$$\vec{B}(H) = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}(H))$$

Dove il vettore di magnetizzazione \vec{M} sarà una generica funzione del campo magnetico \vec{H} che indagheremo in seguito.

A partire dalla 7.3 possiamo ricavare il comportamento macroscopico di \vec{H} ottenendo una relazione integrale.

Per il teorema di Stokes (Equazione 1.3) la circuitazione di \vec{H} fatta su una qualunque linea chiusa, è pari all'integrale su una superficie generica che ha per bordo il percorso di circuitazione del rotore di \vec{H} :

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Ma l'ultimo integrale è il flusso del vettore \vec{J} lungo una superficie con bordo la linea chiusa della circuitazione, Quell'integrale rappresenta proprio le correnti concatenate al percorso di integrazione:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^n i_k$$

Questo che abbiamo appena dimostrato è il **teorema della circuitazione di Ampere** per il campo magnetico \vec{H} .

A questo punto siamo in grado di analizzare le condizioni al contorno per i vettori \vec{H} e \vec{B} nel passaggio da un mezzo materiale ad un altro. Come abbiamo sempre fatto in passato calcoliamo ad esempio la circuitazione del campo \vec{H} in un percorso infinitesimo nel passaggio tra un mezzo e l'altro (Figura 7.6). Poiché non sono presenti correnti macroscopiche concatenate al cammino di integrazione per il teorema della circuitazione di Ampere abbiamo:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^n i_k = 0$$

Ma poiché i tratti che attraversano il materiale sono infinitesimi di ordine superiore possiamo trascurare il loro contributo e dire che:

$$\vec{H} \cdot \hat{t}_1 + \vec{H} \cdot \hat{t}_2 = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

Dove abbiamo considerato solo le componenti tangenti al vettore, poiché i cammini di integrazione sono antiparalleli $\hat{t}_1 = -\hat{t}_2$, abbiamo dimostrato che

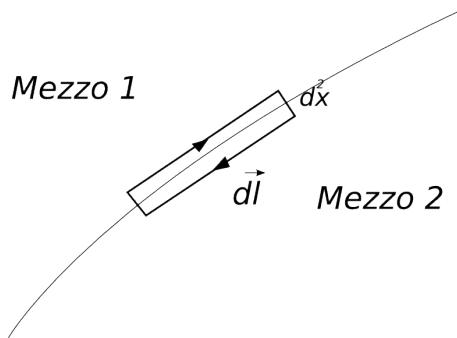


Figura 7.6: Ciruitazione in un percorso infinitesimo del vettore \vec{H} attraverso la superficie di separazione del mezzo.

la componente tangente alla superficie di separazione del campo magnetico \vec{H} si conserva sempre:

$$H_{t_1} = H_{t_2}$$

Allo stesso modo possiamo fare un ragionamento analogo per il vettore \vec{B} , costruiamo una superficie cilindrica di spessore infinitesimo di ordine superiore, che attraversa il mezzo, per la solenoidalità di \vec{B} il suo flusso attraverso questa superficie deve essere nullo, quindi tanto campo \vec{B} attraversa normalmente la superficie interna, tanto deve uscirne da quella esterna, abbiamo quindi dedotto che il campo \vec{B} conserva le componenti normali (vedi Figura 7.7)

$$B_{n_1} = B_{n_2}$$

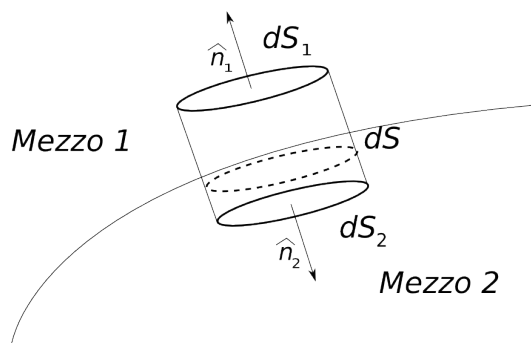


Figura 7.7: Flusso del campo \vec{B} attraverso una superficie cilindrica che taglia la superficie di separazione del mezzo.

7.4 Materiali omogenei isotropi

Fino ad ora abbiamo fatto considerazioni del tutto generiche, che vanno bene per tutti i materiali, in particolare la formula più generale è:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Dove genericamente \vec{M} è un vettore che dipende strettamente dal tipo di materiale che usiamo. Possiamo però come per il caso dei dielettrici considerare dei casi particolarmente semplici, ossia i materiali omogenei isotropi. In questi materiali osserviamo che \vec{M} si dispone parallelamente a \vec{H} .

In queste condizioni \vec{B} e \vec{H} sono due campi paralleli tra loro, e possiamo considerare la relazione tra loro come:

$$\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$$

Dove la costante di proporzionalità μ non è detto che sia fissata per tutti gli \vec{H} . μ è una costante particolare, detta **permeabilità magnetica** del mezzo, e dipende strettamente dal mezzo materiale che stiamo considerando. In generale possiamo riscrivere μ in funzione della permeabilità magnetica del vuoto:

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

Dove abbiamo introdotto la grandezza μ_r , la **permeabilità magnetica relativa**, un numero puro.

Come per il caso dei dielettrici possiamo trovare immediatamente la relazione che lega \vec{M} a \vec{H} in questo caso semplice:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{H} + \vec{M} = \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

Definizione 7.2 (Susciettività magnetica) *Definiamo la suscietività magnetica di un materiale (omogeneo isotropo) la grandezza*

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

Che rappresenta la proporzionalità tra il campo magnetico \vec{H} e il momento magnetico indotto nel mezzo per unità di volume \vec{M}

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Anche in questo caso si può generalizzare la suscietività magnetica introducendo il tensore di suscietività magnetica per descrivere i materiali non omogenei.

La suscietività è una caratteristica molto importante, tanto che le varie sostanze vengono classificate in base ai valori di χ_m .

- Diamagneti: $\chi_m < 0$
- Paramagneti: $\chi_m > 0$
- Ferromagneti: $\chi_m \gg 1$

7.4.1 Diamagneti

Nelle sostanze diamagnetiche si riscontra una suscettività magnetica negativa. Questo implica che il vettore di magnetizzazione \vec{M} è diretto in direzione opposta al campo che attraversa il materiale.

Generalmente per i materiali diamagneti i valori della costante χ_m sono molto piccoli, nell'ordine di 10^{-5} , e questo implica che spesso possono essere approssimate con il vuoto.

Si osserva che per queste sostanze generalmente la suscettività sia una costante che non dipenda dalla temperatura, né dall'intensità dei campi magnetici a cui i materiali possono essere sottoposti.

7.4.2 Paramagneti

Nelle sostanze paramagnetiche la suscettività magnetica è positiva, il che implica che i momenti magnetici degli atomi tendono in parte ad allinearsi con il campo magnetico, aumentandone l'intensità.

Queste sostanze presentano una suscettività magnetica variabile con la temperatura secondo la legge di Curie:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T} \quad (7.4)$$

Dove C è una costante che dipende dal materiale, ρ la densità per unità di volume e T la temperatura in Kelvin.

Quando ci avviciniamo allo zero assoluto la magnetizzazione del materiale va quasi in saturazione, consentendo di amplificare notevolmente i campi magnetici. Tuttavia per temperature ordinarie il loro contributo è quasi sempre trascurabile.

7.4.3 Ferromagneti

Il comportamento dei materiali ferromagneti è decisamente il più interessante.

Questi materiali hanno la caratteristica che la relazione tra \vec{B} e \vec{H} non è lineare, né univoca. Questi materiali infatti hanno una fenomenologia molto vasta, spesso difficile da prevedere con modelli teorici affidabili. Per questo si fa massiccio uso dello studio delle curve sperimentali che seguono questi materiali.

Si parte da una situazione di materiale smagnetizzato ($H = B = 0$) e si accende il campo \vec{H} . Inizialmente \vec{B} aumenta all'aumentare di \vec{H} , fino ad un valore limite detto H_m (*curva di prima magnetizzazione*).

Se a questo punto si diminuisce H di nuovo, B segue l'andamento iniziale per un primo tratto (fino a H_s) per poi rimanere sopra alla curva di prima magnetizzazione, e quando H arriva nuovamente a 0, B assume un valore positivo detto B_r (induzione magnetica residua) a cui è associato un momento magnetico $M_r = \frac{B_r}{\mu_0}$ (magnetizzazione **residua**).

Invertendo il segno di \vec{H} il campo B continua a diminuire fin quando raggiunge lo 0. Questo valore di H negativo è detto H_c (campo magnetico di **coercizione**) Continuando a diminuire H il campo magnetico va in saturazione, e il ciclo riprende.

Questa curva, riassunta in Figura 7.8 è detta **ciclo di isteresi**

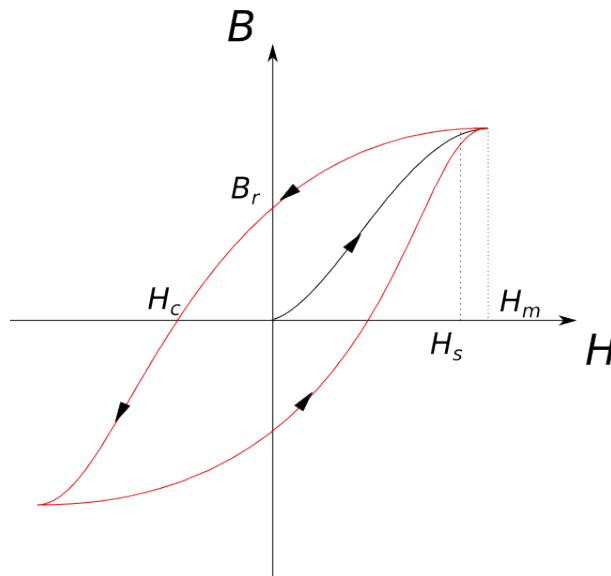


Figura 7.8: Rappresentazione del ciclo di isteresi. In nero la curva di prima magnetizzazione in rosso il resto del ciclo di isteresi completo. Dal grafico si evince chiaramente come la curva di isteresi non sia ad un sol valore, in quanto per medesimi valori del campo H abbiamo diverse possibili configurazioni di B . Per questo si dice che in un ferromagnete conta la sua *storia*, poiché non basta l'informazione sul campo H per ricavare automaticamente quella di B , ma occorre anche sapere in quale regione del ciclo di isteresi ci troviamo.

Il coefficiente μ_r perde quasi del tutto significato nel caso di ferromagneti, tuttavia se ci limitiamo ad analizzare casi in cui i campi non variano troppo possiamo ridefinire la permeabilità magnetica relativa come la pendenza del

ciclo di isteresi:

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$

Generalmente μ_r è a sua volta una funzione di H , e con questa definizione si chiama **permeabilità magnetica differenziale**.

Un'altra fenomenologia interessante legata ai materiali ferromagnetici riguarda il loro comportamento in funzione della temperatura. Esiste una temperatura critica T_c al di sopra della quale la sostanza ferromagnetica cessa di comportarsi in questo modo e assume tutte le caratteristiche di un paramagnete.

Questa temperatura critica è detta temperatura di **Curie**, e la legge che regola il comportamento della suscettività magnetica per la sostanza paramagnetica ottenuta è molto simile alla 7.4, ed è detta legge di **Weiss-Curie**:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_c} \quad (7.5)$$

Come se lo zero fosse traslato di T_c per questa sostanza.

Il passaggio tra paramagneti e ferromagneti è studiato bene in struttura della materia, ed è una vera e propria transizione di fase, che presenta discontinuità nel comportamento della sostanza.

7.5 Modelli microscopici

Abbiamo visto come diverse sostanze possono reagire alla presenza di campo di induzione magnetica diversamente. Cerchiamo ora di chiarire questo comportamento alla luce di un modellino che schematizzi il comportamento delle molecole delle varie sostanze sottoposte all'azione del campo magnetico.

Nei ferromagneti è presente addirittura il fenomeno dell'isteresi,

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{M}(H) + \vec{H} \right)$$

Dove il grosso della funzione è determinata dalla magnetizzazione \vec{M} non trascurabile in questi materiali. La curva $M(H)$ risulta essere quindi la più interessante da studiare poiché è dominante nell'isteresi.

Cerchiamo di capire come il campo magnetico microscopico, che agisce sulla singola molecola del materiale (H_{mic}) sia legato al campo macroscopico esercitato dall'esterno (H) attraverso il vettore di magnetizzazione \vec{M} .

Possiamo fare considerazioni analoghe a quelle fatte per i dielettri. Consideriamo una sfera attorno al dipolo magnetico, e cerchiamo di schematizzare come risponde il campo H generato dai dipoli circostanti sul nostro dipolo:

$$\vec{H}_{mic} = \vec{H} + \frac{1}{3} \vec{M}$$

Questa relazione è l'analogo risultato a quanto trovato già nel caso dei dielettrici nella sezione 4.8, equazione (4.8)⁶.

In realtà questa relazione vale soltanto per i materiali diamagneti e paramagneti, i materiali ferromagnetici risentono di un effetto difficile da schematizzare per via del loro particolare modo di magnetizzarsi a regioni⁷.

Per via di questa caratteristica occorre scrivere per i ferromagneti un'altra relazione:

$$\vec{H}_{mic} = \vec{H} + \gamma \vec{M}$$

Dove γ è detto **parametro di Weiss**, dipende dal particolare materiale ferromagnete, e in generale

$$\gamma \gg \frac{1}{3}$$

7.5.1 Correnti di Larmor - Diamagneti

Vediamo ora di spiegare perché i diamagneti hanno una costante χ_m negativa.

Cerchiamo di capire che succede agli atomi di gas semplici come l'elio o l'idrogeno.

In un atomo di idrogeno ad esempio c'è un solo elettrone che orbita attorno al nucleo. Possiamo quindi provare a schematizzare l'atomo come una spira percorsa da corrente i con

$$i = \frac{e}{T} \quad e = \text{Carica dell'elettrone} \quad T = \text{Periodo di rivoluzione}$$

Sia ω la velocità angolare dell'elettrone, possiamo riscrivere la corrente nella forma:

$$i = \frac{e\omega}{2\pi}$$

Per il teorema di equivalenza di Ampere una spira percorsa da corrente i si comporta a tutti gli effetti a media distanza come un dipolo magnetico \vec{m}

$$\vec{m} = iS\hat{n}$$

$$|\vec{m}| = \frac{e\omega}{2\pi}\pi r_0^2 = \frac{e\omega r_0^2}{2}$$

Possiamo pensare l'elettrone come un punto materiale di massa m_e che ruota attorno al nucleo, a questo oggetto è associato un momento angolare \vec{L}

$$\vec{L} = m_e\omega r_0^2$$

⁶Il ragionamento consiste nel considerare una sfera attorno al dipolo, che presenta una densità di corrente superficiale dovuta alla magnetizzazione delle molecole vicine. Queste correnti generano un campo magnetico al centro pari proprio ad $\frac{1}{3}\vec{M}$.

⁷I ferromagneti presentano al loro interno regioni separate in cui tutte le molecole sono magnetizzate nello stesso modo, queste zone vengono chiamate **domini di Weiss**.

Possiamo riscrivere \vec{m} in funzione di \vec{L} (sono diretti nella stessa direzione):

$$\vec{m} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} = - \left(\frac{|e|}{2m_e} \right) \vec{L} \quad (7.6)$$

In realtà il modello che abbiamo studiato non è molto raffinato, si dovrebbe sapere infatti dai corsi di chimica che l'elettrone possiede un orbitale sferico, e che non è localizzato, ma ha una probabilità di trovarsi in questo orbitale. Per fortuna anche nel caso della sfera riusciamo a trovare una relazione tra \vec{m} e \vec{L} molto simile alla 7.6. Qualunque forma per l'orbita dell'elettrone scegliamo otteniamo sempre una proporzionalità diretta tra \vec{L} e \vec{m} .

$$\vec{m} \propto -\vec{L}$$

Questo rimane vero anche in meccanica quantistica, dove il momento angolare delle particelle è una quantità quantizzata e discreta (questa relazione ci dice quindi che anche \vec{m} è quantizzato). Anche il protone possiede un momento angolare \vec{L}_p , ma il momento magnetico associato risulta essere molto inferiore, poiché $m_e \ll m_p$ e nella 7.6 la massa compare al denominatore. Quindi possiamo trascurare il momento magnetico del protone.

Cosa succede a questo punto se generiamo un campo di induzione magnetica sull'atomo? Si forma un momento meccanico che fa ruotare l'elettrone⁸:

$$\vec{\mathcal{M}} = \underbrace{\vec{m} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{m} \times \vec{H}_{mic}}_{\text{Momento meccanico}}$$

Ricordando che nel vuoto $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$.

Prendiamo la seconda equazione della dinamica dei corpi rigidi:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Riscriviamola per il caso del nostro atomo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} = \mu_0 \vec{m} \times \vec{H}_{mic} = -\vec{L} \times \vec{H}_{mic} \cdot \left(\frac{\mu_0 |e|}{2m_e} \right)$$

Definiamo la grandezza $\vec{\omega}_L$ **precessione di Larmor** come la quantità

$$\vec{\omega}_L = \vec{H}_{mic} \left(\frac{\mu_0 |e|}{2m_e} \right) \quad (7.7)$$

Dove chiaramente il coefficiente che moltiplica \vec{H}_{mic} dipende strettamente dal modello che si considera per schematizzare l'elettrone, pur restando sempre dello stesso ordine di grandezza⁹.

⁸Analogamente al caso elettrico dove $\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \times \vec{E}$, per i dipoli magnetici vale la relazione $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \times \vec{B}_0$.

⁹Si noti come ω_L abbia per dimensioni l'inverso di un tempo.

Giungiamo quindi all'equazione:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= -\vec{L} \times \vec{\omega}_L \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{\omega}_L \times \vec{L}\end{aligned}\quad (7.8)$$

Questa è l'equazione della trottola! Questo vuol dire che al moto caotico e disordinato di tutti gli elettroni attorno al nucleo (il momento magnetico che abbiamo considerato ha direzione del tutto casuale, quindi la somma di tutte le molecole da una magnetizzazione nulla) se ne sovrappone uno ordinato, che è diretto sempre verso $\vec{\omega}_L$!

Si vede dalla definizione di $\vec{\omega}_L$ (7.7) che questa è diretta nello stesso verso di \vec{H}_{mic} , risulta quindi comune a tutti gli atomi del materiale, generando un effetto macroscopico (Figura 7.9)

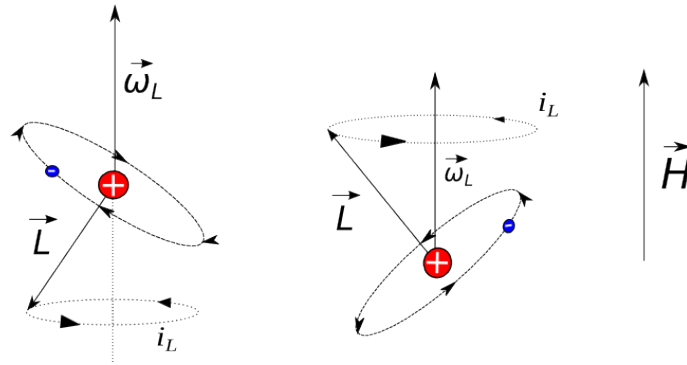


Figura 7.9: Schema in cui viene mostrata la precessione di Larmor per due atomi di idrogeno, come si vede $\vec{\omega}_L$ è diretta sempre nello stesso verso di \vec{H} (in questo caso coincidente con \vec{H}_{mic}), quindi il momento angolare dell'atomo (schematizzato come un sistema orbitale) compie una precessione attorno a $\vec{\omega}_L$. Questo genera una corrente di Larmor i_L , che è diretta nello stesso verso per tutti gli atomi.

A questa precessione del momento angolare è associata una corrente di Larmor, i_L , facilmente calcolabile:

$$i_L = -\frac{\omega_L |e|}{2\pi}$$

Il segno meno viene dal fatto che l'elettrone è carico negativamente. A questa corrente è associato un nuovo momento magnetico, stavolta comune a tutte le molecole, paria a \vec{m}_L

$$\vec{m}_L = i_L S$$

Dove S è la porzione della sfera orbitale sui piani perpendicolari a $\vec{\omega}_L$. Cerchiamo il valor medio di questa sezione, a partire dal raggio:

$$r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Poiché siamo in condizioni di simmetria, prendiamo i valori quadratici medi¹⁰:

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3}r_0^2$$

Poiché stiamo proiettando la sfera su un semipiano ortogonale ad uno degli assi il valor quadratico medio del raggio vale:

$$\overline{r^2} = \overline{x^2 + y^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} = \frac{2}{3}r_0^2$$

Da cui la sezione media risulta:

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \pi\overline{r^2} = \frac{2}{3}\pi r_0^2 \\ \vec{m}_L &= i_L S = i_L \frac{2}{3}\pi r_0^2 = -\frac{\vec{\omega}_L |e| 2\pi}{2\pi} \frac{r_0^2}{3} \\ \vec{m}_L &= -\vec{\omega}_L \left(\frac{|e|r_0^2}{3} \right) \\ \vec{m}_L &= -\mu_0 \frac{e^2 r_0^2}{6m_e} \vec{H}_{mic}\end{aligned}$$

Quindi \vec{m}_L è diretto in verso opposto a \vec{H}_{mic} ed è comune per tutte le molecole! Otteniamo facilmente \vec{M} come:

$$\vec{M} = Zn\vec{m}_L$$

Dove Z è il numero di elettroni, e n è il numero di molecole per unità di volume. Poiché \vec{M} è proporzionale \vec{m}_L che si oppone al vettore \vec{H} questo spiega perché la suscettività magnetica dei dielettrici è negativa, si ha infatti che:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Ma abbiamo appena mostrato che \vec{H} e \vec{M} sono diretti in versi opposti!

L'effetto delle correnti di Larmor è molto debole, quindi questo discorso che abbiamo affrontato vale solo nel caso non siano presenti altri effetti più significativi, come quello che mostreremo nella prossima sezione, in particolare questo discorso vale per tutti gli atomi e le molecole non dotate di momento magnetico proprio¹¹, in questi casi dominano gli effetti delle correnti di Larmor, che spiegano molto bene il diamagnetismo di molte sostanze.

¹⁰Con il simbolo \bar{x} si intende valore medio della grandezza x , analogamente $\overline{x^2}$ intende il valore quadratico medio di x .

¹¹Questi atomi sono ad esempio l'elio, in cui il momento magnetico associato ai due singoli elettroni sono uguali ma opposti, e quindi la molecola ha momento magnetico nullo, nonostante questo le correnti di Larmor si manifestano ugualmente, basta osservare lo schema in Figura 7.10 per convincersene.

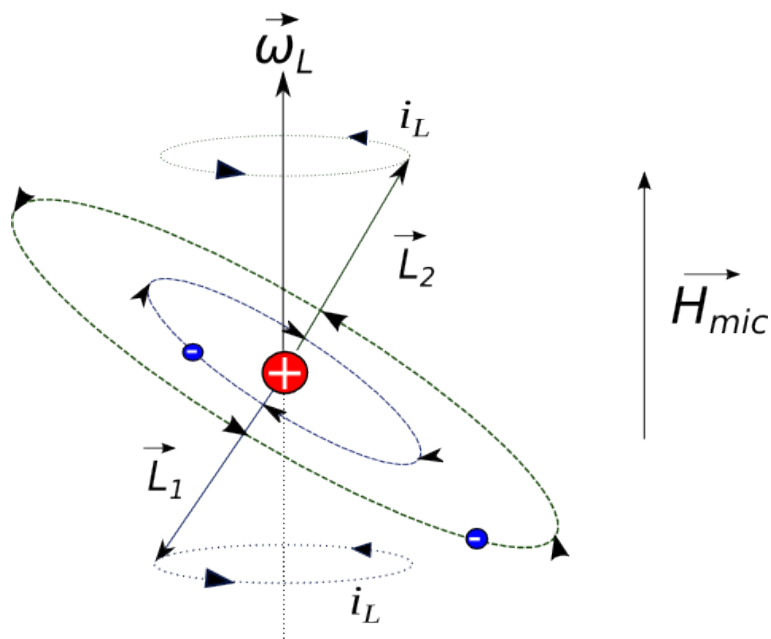


Figura 7.10: In questa figura si capisce come possono delle molecole aver momento magnetico nullo pur manifestando le correnti di Larmor, ad esempio l'atomo di Elio, in cui i due elettroni su orbitale sferico hanno spin opposto, si annullano il momento magnetico a vicenda, mentre l'effetto delle correnti di Larmor, si somma (sono infatti dirette nello stesso verso).

7.5.2 Distribuzione di Langevin - Paramagneti

Abbiamo visto come l'effetto dovuto alle correnti di Larmor giustifica il comportamento dei materiali diamagnetici, ossia quei materiali che non sono dotati di momento magnetico proprio. Andiamo adesso ad osservare nel dettaglio come reagiscono le molecole di quei materiali che possiedono un certo momento magnetico \vec{m} non trascurabile.

Questo momento magnetico ha associata una energia potenziale pari a:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{mic} = -\mu_0 \vec{m} \cdot \vec{H}_{mic}$$

Sottoposti all'azione del campo magnetico \vec{H} i dipoli avranno la tendenza ad allinearsi con il campo \vec{H}_{mic} , mentre l'effetto caotico della temperatura tenderà a disallinearli. Possiamo studiare la probabilità di trovare allineati \vec{m} e \vec{H} proprio come avevamo fatto per i dielettrici polari (Vedi sezione 4.2).

Il ragionamento che seguiremo sarà del tutto analogo: Qual è la probabilità di trovare una molecola con momento magnetico \vec{m} che forma un angolo θ con il vettore \vec{H}_{mic} ?

Occupiamoci ora di cercare il valore medio del coseno di θ visto che è la grandezza che avrà poi interesse ai fini del comportamento paramagnetico dei materiali.

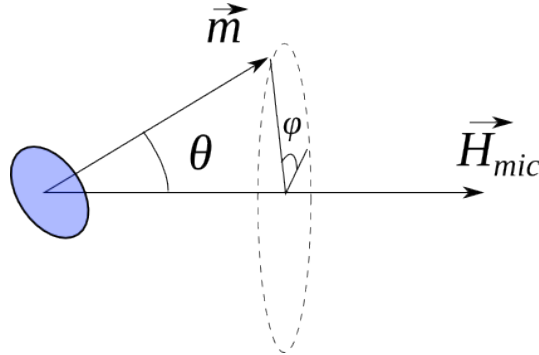


Figura 7.11: Schema dell'effetto del campo magnetico su una molecola dotata di dipolo magnetico proprio.

Sia $f(\theta, \varphi)$ la funzione di distribuzione di probabilità che mi indica la probabilità di trovare molecole con momento magnetico rivolto nella direzione $\theta + d\theta$ (angolo con \vec{H}_{mic}) e $\varphi + d\varphi$ (Angolo con una direzione perpendicolare a \vec{H}_{mic} scelta) come in Figura 7.11.

f è ovviamente data dalla funzione di probabilità di Boltzmann scritta per l'energia:

$$f(U) = A \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$$

Dove U possiamo scriverla in funzione del $\cos\theta$:

$$U = -\mu_0 m H_{mic} \cos \theta$$

Ed è chiaramente indipendente dall'angolo φ .

$$f(\theta, \varphi) = A \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right)$$

Da cui il valore aspettato per il coseno dell'angolo θ diventa:

$$\langle \cos \theta \rangle = \int_{4\pi} A \cos \theta \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right) d\Omega$$

Dove la variabile di integrazione è l'angolo solido $d\Omega$, integrato su tutto lo spazio. Riscriviamo Ω in funzione di θ e φ :

$$d\Omega = d\theta \sin \theta d\varphi$$

Poiché non ci sono altre dipendenze da φ possiamo subito integrare su tutto l'angolo φ :

$$d\Omega = d\theta \sin \theta 2\pi$$

Riscriviamo l'integrale, questa volta solo in θ :

$$\langle \cos \theta \rangle = 2\pi A \int_0^\pi \cos \theta \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta \quad (7.9)$$

Ricordiamo che la funzione di Boltzmann deve essere normalizzata, imponiamo la condizione di normalizzazione per cercare il parametro A :

$$1 = 2\pi A \int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta$$

$$A = \frac{1}{2\pi \int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta}$$

Sostituendo nella 7.9

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle &= \frac{\int_0^\pi \cos \theta \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta} \\ \langle \cos \theta \rangle &= \frac{\int_0^\pi \cos \theta \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right) d(\cos \theta)}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu_0 m H_{mic} \cos \theta}{kT}\right) d(\cos \theta)} \end{aligned}$$

Integriamo con una sostituzione

$$t = \cos \theta \quad a = \frac{\mu_0 m H_{mic}}{kT}$$

$$\langle t \rangle = \frac{\int_{-1}^1 t e^{at} dt}{\int_{-1}^1 e^{at} dt}$$

Il risultato di questo integrale è semplice da calcolare¹², e viene fuori la già nota funzione di Langevin:

$$\mathcal{L}(a) = \coth(a) - \frac{1}{a}$$

Questo ci dice che le molecole hanno in generale un momento magnetico diretto in maniera del tutto casuale radialmente ad H_{mic} , non fornendo dunque alcun contributo in quella direzione, ma hanno una componente diretta proprio concorde ad \vec{H}_{mic} che mediamente vale:

$$\bar{m} = m \langle \cos \theta \rangle = m\mathcal{L}(a)$$

In Figura 7.12 è riportato l'andamento in funzione del parametro a della funzione di Langevin.

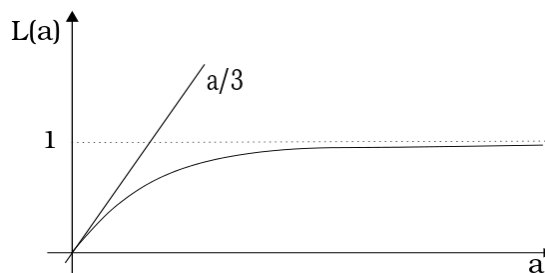


Figura 7.12: Grafico della curva di Langevin.

In particolare per i materiali paramagnetici è interessante studiare cosa accade quando a è prossimo allo 0. Questi materiali infatti dispongono di un momento magnetico delle molecole molto basso.

$$|\vec{M}| = n\bar{m} \approx nm \frac{a}{3}$$

Dove abbiamo approssimato la funzione di Langevin con il suo sviluppo di Taylor al primo ordine intorno a 0 (n è il numero di molecole per unità di volume).

$$\vec{M} = \frac{nm}{3} \frac{\mu_0 m \vec{H}_{mic}}{kT}$$

¹²Basta applicare una volta l'integrazione per parti al numeratore, mentre il denominatore si fa semplicemente.

$$\vec{M} = \underbrace{\left(\frac{\mu_0 n m^2}{3k} \cdot \frac{1}{T} \right)}_{\chi_m} \vec{H}_{mic}$$

Se la densità del materiale è molto bassa \vec{H}_{mic} è circa coincidente con \vec{H} , per cui abbiamo trovato un'espressione della suscettività magnetica! Questa risulta essere molto piccola (dipende da m^2 con m piccolo per ipotesi), ma positiva. Inoltre vale proprio la relazione di Curie per la dipendenza di χ_m dalla temperatura:

$$\chi_m \propto \frac{1}{T} \quad (7.10)$$

Se la densità non è trascurabile dobbiamo ricorrere al modello di Clausius-Bosotti per ricavare nuovamente χ_m :

$$\begin{aligned} \vec{H}_{mic} &= \vec{H} + \frac{1}{3} \vec{M} \\ \vec{M} &= n \alpha_m \left(\vec{H} + \frac{1}{3} \vec{M} \right) \end{aligned}$$

Dove abbiamo chiamato α_m il valore ricavato prima per χ_m diviso la densità molecolare n .

$$\begin{aligned} \vec{M} \left(1 - \frac{n \alpha_m}{3} \right) &= n \alpha_m \vec{H} \\ \vec{M} &= \frac{n \alpha_m}{1 - \frac{n \alpha_m}{3}} \vec{H} \end{aligned}$$

Questa equazione apparentemente non ci fornisce di nuovo una relazione simile a quella di Curie (7.10), ma se ricordiamo che il valore $n \alpha_m$ è molto piccolo per ipotesi, possiamo provare a fare uno sviluppo di Taylor.

$$\begin{aligned} \vec{M} &= n \alpha_m \left(1 + \frac{n \alpha_m}{3} + \dots \right) \vec{H} \\ \vec{M} &= n \alpha_m \vec{H} = \chi_m \vec{H} \end{aligned}$$

Anche in questo caso abbiamo ritrovato lo stesso valore di χ_m precedenti:

$$\chi_m \propto \frac{1}{T}$$

7.5.3 Interpretazione di Langevin - Ferromagneti

Abbiamo spiegato con successo i motivi microscopici dietro il comportamento dei materiali diamagnetici e ferromagnetici, vediamo ora di provare a dare una giustificazione al comportamento dell'isteresi nei ferromagneti. Per farlo dobbiamo indagare la funzione di Langevin allontanandoci dall'origine. In queste condizioni l'approssimazione fatta per i materiali paramagnetici non vale più, dobbiamo considerare l'intera formula di Langevin.

Scriviamo quindi le due equazioni che conosciamo per i materiali ferromagnetici:

$$\begin{cases} \vec{H}_{mic} = \vec{H} + \gamma \vec{M} \\ \vec{M} = nm\mathcal{L}(a) \end{cases}$$

Dove la prima delle due equazioni è l'analogo ferromagnetico della relazione di Clausius Bosotti, dove γ è il parametro di Weiss.

Ricordiamo inoltre come avevamo definito il parametro a

$$a = \frac{\mu_0 m H_{mic}}{kT}$$

$$H_{mic} = a \frac{kT}{\mu_0 m}$$

Sostituiamo nella relazione di Weiss:

$$a \frac{kT}{\mu_0 m} = H + \gamma M$$

$$\begin{cases} M = \frac{kT a}{\mu_0 m \gamma} - \frac{H}{\gamma} \\ M = nm\mathcal{L}(a) \end{cases} \quad (7.11)$$

La risoluzione matematica di questo sistema è molto complessa, proviamo un approccio qualitativo per via grafica.

La prima equazione è l'equazione di una retta nel piano a - M . La seconda è l'equazione di Langevin. La soluzione di questo sistema saranno i punti in cui questi grafici si incontrano.

In Figura 7.13 è mostrato bene come più si aumenta H più il valore corrispondente del campo di magnetizzazione \vec{M} tende asintoticamente ad un valore. Stiamo quindi spiegando bene l'ultima parte del ciclo di isteresi (La saturazione).

Vediamo che più abbassiamo il valore di H più iniziamo ad avvicinarci al centro del grafico. Possono succedere due cose: la pendenza della retta della seconda equazione è maggiore della retta tangente alla funzione di Langevin nell'origine o vice versa.

Nel primo caso avremo una sola soluzione sempre, nel secondo caso invece la cosa si fa più interessante, ad un certo valore di H la retta intersecherà anche una parte negativa della funzione di Langevin, per avere tre intersezioni per una serie di valori di H (Figura 7.14)

Come si vede bene questo modello descrive il fatto che i ferromagneti possono avere una curva di magnetizzazione a più valori, facendo l'intero grafico delle soluzioni al variare di H otteniamo il risultato riportato in Figura 7.15.

Non solo il nostro modello è riuscito a spiegare qualitativamente l'esistenza dell'isteresi, ma ci fornisce anche una condizione cruciale per la sua

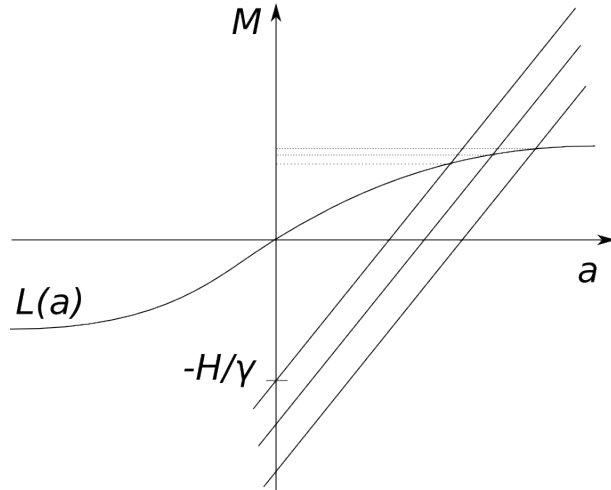


Figura 7.13: Ricerca delle soluzioni grafiche per i ferromagneti studiando l'intersezione tra la funzione di Langevin e la retta di equazione: $M = \frac{kT a}{\mu_0 m \gamma} - \frac{H}{\gamma}$

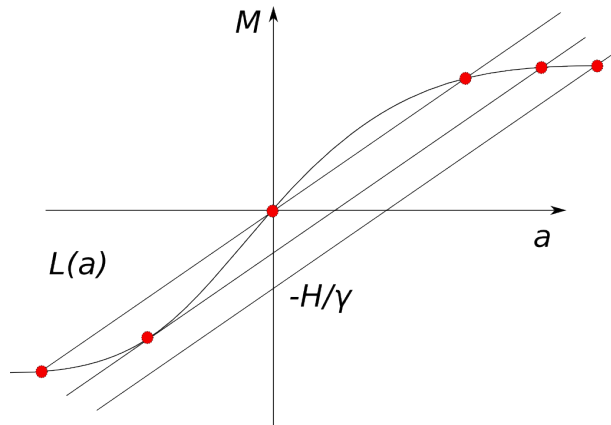


Figura 7.14: Ricerca delle soluzioni grafiche per i ferromagneti studiando l'intersezione tra la funzione di Langevin e la retta di equazione: $M = \frac{kT a}{\mu_0 m \gamma} - \frac{H}{\gamma}$

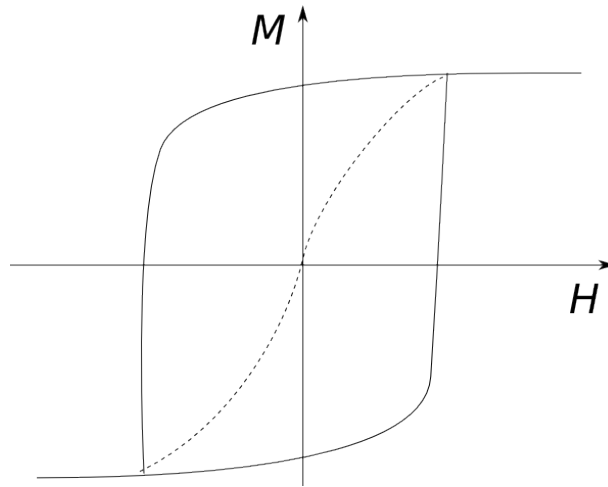


Figura 7.15: Grafico di M in funzione di H ottenuto con l'analisi della funzione di Langevin. Il risultato tratteggiato rappresenta la curva di prima magnetizzazione (anche questa ottenuta come soluzione grafica del sistema 7.11).

esistenza. Abbiamo visto infatti che si possono avere diverse soluzioni solo se la pendenza della retta presa in esame è minore della tangente alla funzione di Langevin nell'origine. Il coefficiente angolare della nostra retta vale:

$$b = \frac{kT}{\mu_0 m \gamma}$$

Giocando sulla temperatura si può far variare questo parametro passando da uno stato isterico ad uno non isterico. La temperatura limite T_c è proprio la temperatura di Curie!

Sia b^* la tangente alla funzione di Langevin nell'origine:

$$b^* = mn \frac{1}{3}$$

Cerchiamo la temperatura critica:

$$\frac{kT_c}{\mu_0 m \gamma} = mn \frac{1}{3}$$

$$T_c = \frac{nm^2 \gamma \mu_0}{3k}$$

Portiamoci a temperature alte, superiori alla temperatura critica, e studiamo il comportamento dei ferromagneti a queste temperature (ora stiamo studiando il sistema per a piccolo):

$$M = mn \mathcal{L}(a) \approx \frac{nm}{3} a$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{3M}{nm} \\
 M &= \frac{kT}{\mu_0 m \gamma} \cdot \frac{3M}{mn} - \frac{H}{\gamma} \\
 M \left(1 - \underbrace{\frac{3k}{\mu_0 n m^2 \gamma}}_{\frac{1}{T_c}} T \right) &= -\frac{H}{\gamma} \\
 M \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) &= -\frac{H}{\gamma} \\
 M (T - T_c) &= \frac{HT_c}{\gamma} \\
 M &= \frac{1}{\gamma} \frac{T_c}{T - T_c} H
 \end{aligned}$$

Per $T > T_c$ Il ferromagnete si comporta come un paramagnete con la suscettività magnetica che dipende direttamente da

$$\chi_m \propto \frac{1}{T - T_c}$$

Sopra la temperatura di Curie scompare l'isteresi. Nella realtà quello che accade nei materiali ferromagneti è la formazione di regioni in cui i momenti magnetici sono ordinati tutti nello stesso verso, queste regioni sono detti domini di Weiss. L'accensione di un campo magnetico fa aumentare le dimensioni del dominio in cui è presente un campo magnetico diretto in quella stessa direzione a scapito dei domini vicini.

Sopra alla temperatura T_c c'è la rottura di questi domini, e il materiale si comporta proprio come un paramagnete. Questa è una vera e propria **transizione di fase** del secondo ordine.

Capitolo 8

Induzione elettromagnetica

8.1 Legge di Faraday-Neumann-Lenz

Ora lasciamo l'ipotesi in cui ci eravamo messi all'inizio del capitolo sull'elettrodinamica (Capitolo 5) di stazionarietà delle correnti per studiare i fenomeni legati all'induzione elettromagnetica. Cosa succede ad un circuito se viene immerso in un campo magnetico variabile nel tempo?

Supponiamo di avere un circuito elettrico (ad esempio una spira) all'interno del quale non scorre corrente, a cui abbiamo collegato un amperometro per registrare la corrente che vi scorre. Accendiamo un campo magnetico uniforme su questo circuito, notiamo che per un istante l'ago dell'amperometro schizza in alto registrando un picco di corrente per poi tornare a 0.

Sorpresi di questo risultato ripetiamo l'esperimento, accendendo piano il campo magnetico in modo da far aumentare la sua intensità linearmente con il tempo. Notiamo che l'amperometro registra durante questo processo lo scorrere di una corrente costante nel nostro circuito.

Proviamo adesso a ripetere lo stesso esperimento cambiando l'angolo tra la normale al piano su cui giace il circuito con il campo magnetico uniforme che stiamo applicando. Notiamo che l'effetto misurato prima si indebolisce con l'aumentare dell'angolo fino a diventare nullo quando la spira è parallela al campo magnetico.

Proviamo infine a compiere un esperimento finale, supponiamo di avere un circuito rettangolare di cui un lato sia libero di scorrere sugli altri, immergiamo il circuito in un campo magnetico uniforme e facciamo variare la superficie del nostro circuito spostando il lato mobile. Notiamo ancora una volta che questa operazione crea una corrente che scorre nel circuito.

I primi esperimenti ci hanno fatto vedere come la presenza di un campo magnetico variabile nel tempo generi delle correnti *indotte* nel nostro circuito, tuttavia nell'ultimo esperimento il campo magnetico è rimasto costante, quello che invece è cambiata nel tempo è la sezione della spira.

Tutto ci fa pensare che questo effetto sia legato contemporaneamente alla variazione della sezione vista dal campo magnetico del circuito, e dalla variazione del campo elettromagnetico.

In altre parole la grandezza che sembra essere strettamente legata al fenomeno dell'induzione è proprio il **flusso** del campo magnetico attraverso la sezione del circuito.

Ulteriori esperimenti di questo tipo hanno portato i due fisici Faraday e Noimann a formulare la legge che governa l'induzione.

Teorema 8.1 (Faraday-Noimann) *La forza elettromotrice che si sviluppa in tutto il circuito dovuta all'induzione magnetica è pari alla variazione di flusso del campo magnetico nel tempo:*

$$f_{em} = \frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t}$$

L'aspetto interessante di questa legge riguarda il fatto che la forza elettromotrice che si sviluppa non è situata in un punto particolare del circuito, ma sull'intero circuito!

Questo vuol dire che è presente un campo elettromotore in ogni punto del circuito e che la circuitazione del campo elettrico sul circuito non è più nulla!

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

Questo ci porta a vedere come in elettrodinamica non sia più vera la generica relazione

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

ricavata per l'elettrostatica, ma che questa equazione dovrà essere opportunamente modificata per tener conto dell'effetto delle eventuali variazioni di \vec{B} nel tempo.

L'altra importante questione legata all'induzione elettromagnetica riguarda il segno di questa forza elettromotrice che si sviluppa all'interno del circuito.

Immaginiamo di creare un campo elettromagnetico che aumenta linearmente nel tempo e di sottoporvi un circuito elettrico. Questo campo induce una corrente nel nostro circuito, la quale a sua volta induce un campo magnetico. Se il campo magnetico indotto dal nostro circuito fosse concorde con quello esterno questo a sua volta genererebbe corrente che potenzierebbe il campo. In altre parole basterebbe semplicemente azionare il meccanismo per avere una corrente che si alimenta da sola.

Basta che sia presente un po' di resistenza in questo circuito per arrivare all'assurdo di aver generato energia infinita. Dobbiamo quindi concludere che la corrente che viene indotta nel circuito ha un verso fatto in maniera tale da creare un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso!

Questo effetto che abbiamo discusso teoricamente in questi termini è stato suffragato da tantissimi esperimenti e prende il nome della legge di Lenz.

Teorema 8.2 (Faraday - Neumann - Lenz) *La legge di Faraday Neumann Lenz può essere formulata nuovamente in questo modo:*

$$f_{em} = -\frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t}$$

Dove il segno meno è stato introdotto da Lenz, è una convenzione, e serve proprio per formalizzare quanto discusso sopra.

Supponiamo ora di avere un circuito rigido, e riscriviamo la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Applichiamo il teorema del rotore

$$\int_{S'} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Dove S' e S sono due superfici qualunque che hanno per bordo il circuito.

A questo punto sfruttiamo l'ipotesi del circuito rigido, ossia che S e S' non dipendano dal tempo, possiamo invertire la derivata con l'integrale:

$$\int_{S'} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS$$

Scegliamo le due superfici uguali:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS = 0$$

Poiché questo vale indipendentemente dalla superficie S che abbiamo scelto possiamo ricostruire un'espressione per la rotazione di \vec{E} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{8.1}$$

La 8.1 è nota come terza equazione di Maxwell. La ridimostreremo tra breve anche nel caso in cui la spira non sia rigida ma libera di muoversi, prima di far questo dobbiamo studiare l'effetto dell'induzione magnetica dovuta alla variazione nella geometria della spira.

8.2 Induzione attraverso la forza di Lorentz

8.2.1 Deformazione del circuito

Vediamo di approfondire la legge di Faraday-Neumann-Lenz (Teorema 8.2) per studiare con particolare interesse quello che accade quando sottoponiamo il circuito ad un campo magnetico costante, ma facciamo variare la forma del nostro circuito.

In pratica consideriamo il seguente esperimento virtuale: supponiamo di avere due binari cortocircuitati, di materiale conduttore, sopra un asticella, anche questa conduttrice, vincolata ai binari ma libera di scorrere su di essa (Figura 8.1).

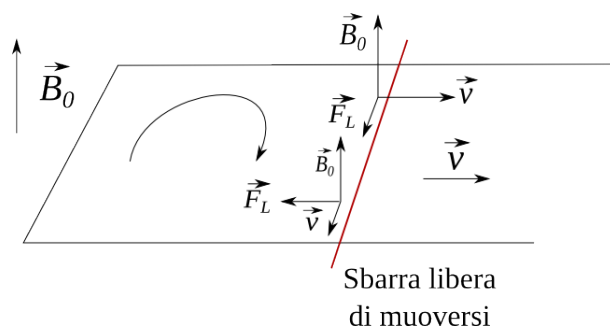


Figura 8.1: Schema di come agisce la forza di Lorentz per generare la corrente (in alto) e di come questa corrente generata attraverso la forza di Lorentz di nuovo eserciti una forza che contrasta il moto della sbarretta (in basso). Questo effetto è la manifestazione meccanica della legge di Lenz.

Se mettiamo in moto la sbarra, tutte le cariche presenti in essa subiscono l'effetto della forza di Lorentz, e sono messe in moto a loro volta. Questo fa sì che si generi una corrente elettrica.

Ora però le cariche si muovono anche lungo la direzione del circuito, quindi subiscono un altro effetto dovuto alla forza di Lorentz, diretta questa volta nel senso opposto a quello della velocità della sbarretta.

$$\begin{aligned}
 F_L &= q\vec{v} \times \vec{B}_0 \\
 \vec{E} &= \frac{\vec{F}_L}{q} = \vec{v} \times \vec{B} \\
 |\vec{E}| &= vB \\
 f_{em} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = vBl
 \end{aligned}$$

Sulla sbarretta mobile si esercita una forza dovuta alla presenza del campo magnetico \vec{B} e della corrente i che vi scorre dentro:

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

Si nota nuovamente dalla Figura 8.1 che questa forza è diretta in verso opposto alla velocità della sbarretta. Questa è la manifestazione meccanica della legge di Lenz! Infatti il fenomeno di induzione genera sempre una corrente che tende a riportare il circuito in quiete. Questa è una forza di tipo viscoso, infatti supponendo che il nostro circuito abbia una resistenza totale R risulta che:

$$f_{em} = Ri \quad i = \frac{f_{em}}{R} = \frac{vBl}{R}$$

$$\vec{F} = \frac{vBl}{R} \vec{l} \times \vec{B}_0$$

$$\vec{F} = -\frac{B^2 l^2}{R} \vec{v}$$

$$F = -\beta v \quad \beta = \frac{B^2 l^2}{R}$$

Dove β è esattamente il termine dissipativo.

8.2.2 Traslazione

Supponiamo di avere una spira immersa in un campo magnetico non uniforme, ma costante nel tempo. Possiamo chiederci se, spostando la spira, l'effetto di induzione dovuto alla variazione di flusso del campo magnetico sia ancora spiegabile per mezzo della forza di Lorentz.

Spostiamo la spira di un tratto infinitesimo $d\vec{s}$

$$d\vec{s} = \vec{v} dt$$

Consideriamo adesso un tronco di cilindro che ha per faccie la spira nella posizione iniziale, la spira nella posizione finale, e la superficie spazzata dal bordo della spira durante lo spostamento.

Per la nota proprietà del campo magnetico la somma del flusso uscente del campo magnetico \vec{B} attraverso una qualsiasi superficie chiusa è pari a 0 ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$).

Chiamando con Φ_i il flusso attraverso la superficie data dalla spira nella posizione iniziale, Φ_f quello per la superficie della spira nella posizione finale, Φ_{sl} quello per la superficie laterale del cilindro risulta quindi che:

$$\Phi_i + \Phi_{sl} + \Phi_f = 0 \quad (8.2)$$

Supponiamo ora che lo spostamento $d\vec{s}$ sia sufficientemente corto da evitare che il flusso lungo la superficie che ha per bordo la spira cambi segno, nella equazione 8.2 Φ_i e Φ_f hanno segni opposti.

La possiamo riscrivere quindi in questo modo:

$$-\Phi_i + \Phi_f + \Phi_{sl} = 0$$

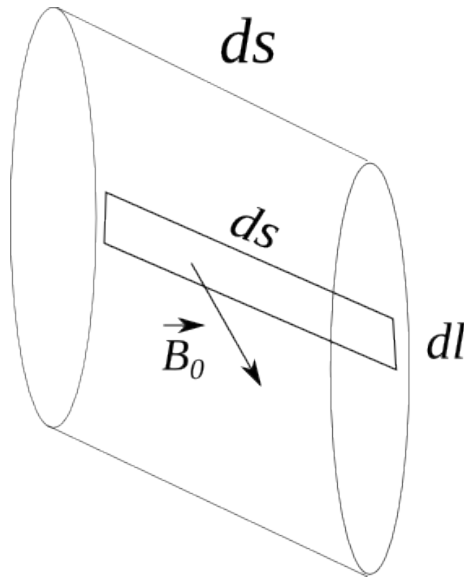


Figura 8.2: Calcolo del flusso di \vec{B} nella superficie laterale del cilindro.

$$\Phi_{sl} = \Phi_i - \Phi_f = -d\Phi$$

Calcoliamo Φ_{sl} , suddividendo la spira in tanti tratti dl (Figura 8.2)

$$\Phi_{sl} = \int_l |\vec{B}| dl ds$$

Ora se come verso per $d\vec{l}$ scegliamo quello della corrente che si sviluppa nella spira otteniamo

$$\Phi_{sl} = \int_l \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) dt = -d\Phi$$

Scegliendo il verso di $d\vec{l}$ in modo che i segni siano giusti.

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) = - \int d\vec{l} \cdot (\vec{B} \times \vec{v})$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}$$

Ma il termine $(\vec{B} \times \vec{v})$ è proprio la forza di Lorentz! Abbiamo quindi fatto vedere che la forza elettromotrice indotta nella spira è dovuta ancora una volta alla forza di Lorentz.

8.3 Terza equazione di Maxwell

Abbiamo studiato a come sia possibile dimostrare la legge di Faraday-Neumann-Lenz quando il campo magnetico non varia nel tempo, siamo ora nella

condizione per poter ripetere la dimostrazione che ci ha portato alla terza equazione di Maxwell in maniera più rigorosa:

$$f_{em} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Esplicitiamo il flusso Φ :

$$f_{em} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS$$

$$d\Phi = \int_{S(t+dt)} \vec{B}(t+dt) \cdot \hat{n} dS - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS$$

Sviluppiamo il termine $B(t+dt)$

$$B(t+dt) = B(t) + \frac{\partial B(t)}{\partial t} dt$$

$$f_{em} = -\frac{d}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS + \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot \hat{n} dS dt - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS \right]$$

$$f_{em} = -\frac{d}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS \right] - \frac{d}{dt} \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot \hat{n} dS dt$$

Il primo termine (dentro le parentesi quadre) riguarda la componente della forza elettromotrice dovuta alla deformazione, infatti tiene conto della variazione del dominio di integrazione, da $S(t)$ a $S(t+dt)$, mentre l'ultimo termine tiene conto della variazione di \vec{B} in funzione del tempo.

Abbiamo già studiato gli effetti dovuti alla variazione della forma o della posizione del circuito, che sono dovuti alla forza di Lorentz. Pur avendo presentato un esempio pratico per la deformazione, si può estendere quella dimostrazione in maniera del tutto generica. Rimane quindi da capire l'origine dell'ultimo termine.

Il termine non spiegabile con la forza di Lorentz è proprio:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

$$f_{em} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Da cui si ricava la terza equazione di Maxwell usando il teorema del rotore:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = - \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Da cui data l'arbitrarietà della scelta di S è proprio:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Questo risultato è molto importante, infatti ci dice che la legge di Faraday-Neumann-Lenz è data in parte da una caratteristica intrinseca del campo elettromagnetico descritta dalla terza equazione di Maxwell, e una dalla forza di Lorentz.

8.3.1 Sintesi sulle equazioni di Maxwell

Riscriviamo tutte le equazioni a cui siamo giunti fino ad ora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

Considerando l'equazione fondamentale della continuità della carica elettrica per \vec{J}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Dai rudimenti di analisi vettoriale dovremo ricordarci che la divergenza di un campo rotore è nulla:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$$

Per ogni campo vettoriale \vec{a} . Applichiamo questo alla quarta equazione del nostro sistema (che ricordo viene dal teorema di Ampere), calcolando la divergenza:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

Se il campo elettrico è variabile nel tempo, cambia la concentrazione di carica, e quindi questo risultato è una contraddizione logica! La quarta equazione che abbiamo scritto l'avevamo ricavata solo in caso quasistazionario e sotto l'ipotesi di campi elettrici costanti. Dovremo modificarla opportunamente in seguito per trovare la vera quarta equazione di Maxwell, che sia in grado di descrivere correttamente anche questo comportamento.

8.4 Autoinduzione

È arrivato il momento di studiare un comportamento particolarmente interessante dei circuiti elettrici. Abbiamo visto che se in un circuito scorre una corrente, questa genera un campo magnetico nello spazio, ma abbiamo anche visto che se un circuito è immerso in un campo magnetico, questo può indurre una corrente nel circuito.

Che corrente viene indotta in un circuito da parte del campo magnetico generato dal circuito stesso? Questo problema è detto **autoinduzione**.

Per studiarlo nel dettaglio supponiamo per il momento di considerare il circuito perfettamente isolato, e soggetto solo ed esclusivamente al campo magnetico che esso stesso genera.

Il flusso che taglia \vec{B} sarà pari a:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B}_{auto} \cdot \hat{n} dS$$

Dove \vec{B}_{auto} lo ricaviamo dalla prima legge di Laplace (6.7)

$$\vec{B}_{auto} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta r|^3}$$
$$\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_s \left(\oint \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta r|^3} \right) \cdot \hat{n} dS \right] i$$
$$\Phi(\vec{B}) = Li$$

Definizione 8.1 (Induttanza) Si definisce **induttanza** la variabile L caratteristica di ogni circuito, che dipende dalla geometria del circuito, la costante di proporzionalità tra il flusso del campo magnetico autoindotto e la corrente che scorre nel circuito:

$$\Phi(\vec{B}) = Li$$

L'espressione intera per L vale:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \left(\oint \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta r|^3} \right) \cdot \hat{n} dS$$

L'induttanza si misura in **Henry** (simbolo H):

$$H = \frac{Wb}{A}$$

Questo fa sì che il mio circuito sia soggetto ad una nuova forza elettromotrice autoindotta:

$$f_{a.i.} = -\frac{\partial\Phi(\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial(Li)}{\partial t}$$

Se supponiamo che il circuito sia indeformabile¹ L risulta costante e può essere portata fuori l'operazione di derivazione:

$$f_{a.i.} = -L\frac{\partial i}{\partial t}$$

8.4.1 Esempio - Circuito RL in continua

Studiamo un esempio di circuito molto semplice. Supponiamo di avere un circuito dotato di una certa resistenza R e con coefficiente di autoinduzione L (induttanza), come riportato in Figura 8.3.

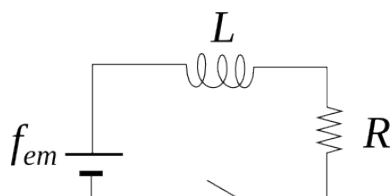


Figura 8.3: Schema del circuito RL . Il termine autoinduttivo è rappresentato dalla *molla*.

È necessario porre un interruttore nel circuito poiché se studiamo il circuito quando sta già scorrendo una corrente i costante non si verificano effetti di autoinduzione in quanto i campi magnetici generati dal circuito sono costanti nel tempo.

Quindi è opportuno studiare il *transiente* che occorre per arrivare alla situazione di regime che sappiamo già essere valida per

$$i_{\infty} = \frac{f_{em}}{R}$$

L'equazione di Kirchoff del circuito risulta pertanto:

$$\begin{aligned} f_{em} + f_{a.i.} &= Ri \\ f_{em} - \frac{\partial\Phi(B)}{\partial t} &= Ri \\ f_{em} - L\frac{\partial i}{\partial t} &= Ri \end{aligned}$$

¹Se ci troviamo di fronte a circuiti in cui la geometria cambia nel tempo ovviamente bisogna tenere conto del fatto che anche la grandezza L cambia nel tempo.

$$f_{em} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri$$

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{f_{em}}{R} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Sappiamo che al momento della chiusura dell'interruttore la corrente deve essere nulla (per continuità)

$$i(0) = 0 = A + \frac{f_{em}}{R} \quad A = -\frac{f_{em}}{R}$$

$$i(t) = \frac{f_{em}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

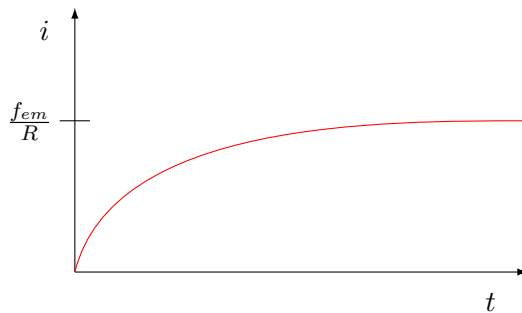


Figura 8.4: Grafico che mostra l'andamento nel tempo di i dopo la chiusura dell'interruttore.

8.4.2 Energia Magnetica autoindotta

Adesso possiamo affrontare con facilità un altro discorso che avevamo abbandonato quando parlavamo di magnetismo. Così come abbiamo visto che ai campi elettrici è associata una densità di energia u pari a :

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

È lecito chiedersi se anche ai campi magnetici sia associabile una simile energia.

Partiamo dal circuito RL risolto nel precedente paragrafo. Abbiamo scritto l'equazione di Kirchoff per quel circuito:

$$f_{em} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri$$

Moltiplichiamo tutto per la carica infinitesima dq

$$f_{em} dq = L \frac{\partial i}{\partial t} dq + Ridq$$

Ma $dq = idt$

$$f_{em}dq = L \frac{\partial i}{\partial t} idt + Ri^2 dt \quad (8.3)$$

Se la corrente è funzione solo del tempo posso scrivere i in questo modo:

$$di = di(t) = \frac{\partial i}{\partial t} dt$$

Sostituisco nella 8.3

$$f_{em}dq = Lidi + Ri^2 dt$$

Dove riconosciamo immediatamente due dei termini

$$dL_{gen} = f_{em}dq \quad dL_{joule} = Ri^2 dt$$

come l'energia erogata dal generatore e l'energia dissipata per effetto Joule. L'ultimo termine mancante è proprio l'energia associata al campo magnetico

$$dU_M = Lidi$$

Integrando su tutto il dominio del tempo (o meglio della corrente):

$$U_M = \frac{1}{2} Li^2$$

Come nel caso del condensatore, anche qui è possibile scrivere l'energia magnetica sotto diversi modi, sfruttando la relazione:

$$\Phi(B) = Li$$

$$U_M = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \Phi(B)i = \frac{1}{2} \frac{\Phi(B)^2}{L}$$

Può essere interessante studiare l'energia magnetica associata ad un solenoide infinito. Il flusso di campo elettromagnetico è dato da:

$$\Phi(B) = NSB$$

Dove N sono il numero di spire, S è la sezione.

$$L \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(B)}{\partial t}$$

$$L \frac{di}{dt} = SN \frac{dB}{dt}$$

Moltiplico ambo i membri per idt :

$$Lidi = SN \frac{dB}{dt} idt$$

$$Lidi = SNi dB$$

$$dU_M = Sni dB$$

Introducendo la grandezza n come numero di spire per unità di lunghezza e l la lunghezza del solenoide:

$$dU_M = Snil dB$$

Ma il volume del solenoide $\tau = S \cdot l$

$$dU_M = ni\tau dB$$

Dentro un solenoide il campo magnetico H è facile da calcolare² e vale proprio:

$$H = ni$$

Da cui otteniamo:

$$dU_M = \tau H dB$$

Da questo risultato possiamo definire anche per il campo magnetico una densità di energia magnetica du_m semplicemente pari a:

$$du_m = H dB$$

L'energia magnetica associabile ai ferromagneti è quindi proprio l'area all'interno della curva sul piano $H - B$, che è il piano dell'isteresi!

Possiamo scrivere anche questa in modo più agevole:

$$u_m = \int H dB$$

Nel caso in cui il materiale sia paramagnetico (o diamagnetico) siamo autorizzati a sfruttare la linearità della relazione tra H e B :

$$B = \mu_0\mu_r H \quad dB = \mu_0\mu_r dH$$

$$u_m = \mu_0\mu_r \int H dH = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} BH$$

Ricordiamoci che quest'ultima equazione rimane valida se e solo se il materiale non è isterico!

8.5 Mutua induzione

A questo punto possiamo toglierci dalla restringente ipotesi in cui ci eravamo messi per valutare gli effetti della autoinduzione, ossia di isolare il circuito dalla presenza di altri circuiti.

²Si fa facilmente con il teorema di circuitazione di Ampere.

Supponiamo di avere n circuiti diversi, ognuno di questi circuiti svilupperà un campo magnetico che induce delle correnti in tutti gli altri, così sul singolo circuito che dobbiamo verificare saranno presenti degli elementi dovuti all'induzione di tutti gli altri circuiti oltre quella del proprio.

Per semplicità consideriamo solo due circuiti³, circuito 1 e circuito 2.

Siamo interessati a studiare le correnti indotte sul circuito 1, per farlo consideriamo il flusso attraverso la sua superficie:

$$\Phi_1(\vec{B}) = \int_{S_1} \vec{B}_{tot} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS + \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot \hat{n} dS$$

Ma i contributi \vec{B}_1 e \vec{B}_2 sono proporzionali alle correnti che circolano in quel circuito: Il primo termine è semplicemente l'autoinduzione, studiamo il secondo termine:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \oint \frac{d\vec{l}_2 \times \Delta\vec{r}}{|\Delta r|^3}$$

Il termine \vec{B}_2 è direttamente proporzionale alla corrente i_2 per un coefficiente che dipende dalla posizione del circuito 2 rispetto al circuito 1. Definendo analogamente a L il coefficiente di mutua induzione M possiamo scrivere la seguente espressione:

$$\Phi_1(\vec{B}) = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

Definizione 8.2 (Coefficiente di mutua induzione) *Si definisce M_{12} il coefficiente di mutua induzione tra il circuito 1 e il circuito 2 come la costante di proporzionalità tra flusso del campo magnetico nel circuito 1 generato dal circuito 2 e la corrente che scorre sul circuito 2.*

M si misura in Henry, come l'induttanza.

Analogamente è possibile eseguire il calcolo del flusso per il circuito 2:

$$\Phi_2(\vec{B}) = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$

Dimostriamo ora una interessante proprietà dei coefficienti di mutua induzione:

$$M_{12} = M_{21}$$

Poniamo i_1 pari a 0, e consideriamo solo la componente mutua indotta sul circuito 1:

$$\Phi_1(\vec{B}) = M_{12} i_2 = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot \hat{n} dS$$

Posso esprimere il campo \vec{B}_2 grazie al potenziale vettore⁴:

$$\vec{B}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_2 \quad \nabla^2 A_2 = -\mu_0 \vec{J}_2$$

³Si può banalmente estendere il concetto ad n circuiti

⁴ \vec{B} è un campo solenoidale, è sempre possibile scriverlo come rotore di un altro campo vettoriale.

$$\Phi_1(\vec{B}_2) = \int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_2) \cdot \hat{n} dS$$

Usiamo il teorema di Stokes:

$$\Phi_1(\vec{B}_2) = \oint_{L_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\Phi_1(\vec{B}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} i_2 = M_{12} i_2$$

Ma se ripetiamo lo stesso calcolo annullando la corrente nel secondo circuito e valutando la mutua induzione del primo circuito nel secondo, otteniamo la stessa espressione con gli indici scambiati. Poiché tutte le operazioni che compaiono con gli indici sono commutative (prodotto scalare e integrali indipendenti) ne segue che:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS = \oint_{L_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} i_1 = M_{21} i_1$$

Da cui abbiamo dimostrato che:

$$M_{12} = M_{21}$$

8.5.1 Energia magnetica di mutua induzione

Riprendiamo il nostro bell'esempio di circuito LR, solo che questa volta consideriamo due circuiti siffatti che si mutuoinducono le correnti. Per via dei risultati visti prima possiamo scrivere per ciascun circuito l'equazione di Kirkchoff:

$$\begin{cases} f_1 - \frac{d\Phi_1}{dt} = R_1 i_1 \\ f_2 - \frac{d\Phi_2}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Esplicitiamo Φ_1 e Φ_2 come trovato prima:

$$\begin{cases} f_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \\ f_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Moltiplichiamo tutti i membri per la carica infinitesima $idt = dq$:

$$\begin{cases} f_1 i_1 dt - L_1 i_1 di_1 - M i_1 di_2 = R_1 i_1^2 dt \\ f_2 i_2 dt - L_2 i_2 di_2 - M i_2 di_1 = R_2 i_2^2 dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 i_1 dt = L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 + R_1 i_1^2 dt \\ f_2 i_2 dt = L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1 + R_2 i_2^2 dt \end{cases}$$

Sommiamo le due equazioni

$$(f_1 i_1 + f_2 i_2) dt = L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M (i_1 di_2 + i_2 di_1) + (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt$$

$$(f_1 i_1 + f_2 i_2) dt = d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right) + d\left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2\right) + d(M i_1 i_2) + (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt$$

Trascurando le grandezze che già conosciamo (energia del generatore ed effetto Joule) scriviamo solo gli effetti dell'energia magnetica:

$$dU_M = d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)$$

I primi due termini già li conoscevamo, rappresentano infatti le energie di autoinduzione, mentre l'ultimo termine rappresenta l'energia magnetica associata alla mutua induzione

$$U_s = M i_1 i_2$$

Questa U_s è detta **energia di scambio** e rappresenta l'energia che i due circuiti si scambiano tra loro.

Poichè L e M hanno la stessa unità di misura possiamo con abuso di notazione indicare il coefficiente L_1 come la mutua induzione del circuito 1 con se stesso:

$$L_1 = M_{11} \quad L_2 = M_{22} \quad M = M_{12} = M_{21}$$

Con questa nuova notazione possiamo riscrivere l'energia magnetica in modo più compatto ed elegante:

$$dU_M = d\left(\frac{1}{2} M_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} M_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} M_{21} i_2 i_1 + \frac{1}{2} M_{22} i_2^2\right)$$

E questa formula è facilmente estendibile ad n circuiti!

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n M_{kh} i_k i_h$$

Possiamo ottenere un risultato ancor più elegante e compatto:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k \sum_{h=1}^n M_{kh} i_h$$

$$U_M = \frac{1}{2} i_k \Phi_k$$

Dove Φ_k è il flusso totale concatenato di \vec{B} dovuto a tutti i circuiti che scorre all'interno del circuito k -esimo.

8.5.2 Effetto di risucchio o repulsione di un solenoide

Abbiamo visto che sotto molti aspetti un solenoide a cui è associato un termine autoinduttivo L si comporta in maniera molto simile ad un condensatore. Così come i materiali dielettri, se inseriti in un condensatore, subivano una forza di risucchio, vogliamo chiederci cosa succede se inseriamo dei materiali all'interno di un solenoide in cui scorre una certa corrente i_0 costante.

Supponiamo per semplicità che il solenoide sia collegato ad un generatore che si occupi di mantenere costante il livello di corrente i_0 .

Inseriamo virtualmente nel solenoide il nostro materiale (a cui è associata una permeabilità magnetica μ_r) e scriviamo il principio dei lavori virtuali.

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{l} + dU_M = dL_R + dL_G$$

dove dL_R è il lavoro dissipato per effetto Joule (e quindi negativo), dL_G è il lavoro del generatore:

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{l} + dU_M = - \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt + \sum_{k=1}^n f_k i_k dt \quad (8.4)$$

Ma ogni circuito avrà equazione di Kirkchoff pari a:

$$f_k - \frac{d\Phi_k}{dt} = R_k i_k$$

$$f_k i_k = \frac{d\Phi_k}{dt} i_k + R_k i_k^2$$

Sostituiamo nella 8.4

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{l} + dU_M = \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k$$

$$dU_M = d \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k \Phi_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k$$

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{l} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k$$

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{l} = dU_M = \vec{\nabla}U_M \cdot \delta\vec{l}$$

Poichè è arbitraria la scelta di $\delta\vec{l}$

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U_M$$

Prendiamo i riferimenti di Figura 8.5.

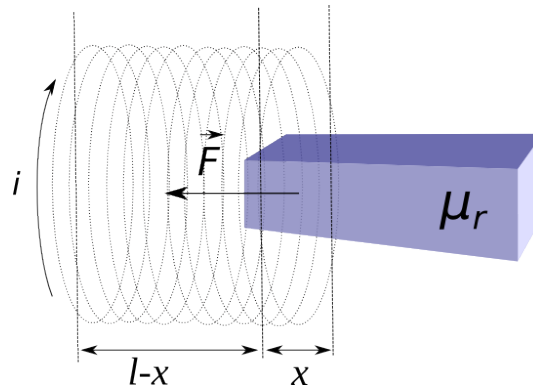


Figura 8.5: Calcolo della forza di risucchio/repulsione che esercita un solenoide percorso da corrente i .

La forza esercitata sul corpo dal campo magnetico è:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U_M$$

$$U_M = \frac{1}{2}Li^2$$

$$L = \frac{\Phi(\vec{B})}{i} = \frac{BSN}{i} \quad B = \mu_0\mu_r ni$$

Con N numero di spire, n numero di spire per unità di lunghezza, S sezione del solenoide.

$$L = \frac{\mu_0\mu_r ni}{i} Sl n$$

Posso considerare il solenoide come due induttanze in serie, l'una dopo l'altra, una riempita con il materiale di costante μ_r l'altro vuoto.

$$L = \mu_0\mu_r n^2 Sx + \mu_0 n^2 S(l-x) = \mu_0 n^2 S(\mu_r x + l-x)$$

$$L = \mu_0 n^2 S[l + (\mu_r - 1)x] = \mu_0 n^2 S(l + \chi_m x)$$

$$F_M = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}i \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}i\mu_0 n^2 S\chi_m$$

A questo punto risulta interessante vedere come è diretta questa forza, infatti il suo segno dipende dal segno di χ_m . Se χ_m è positivo la F_M è diretta nel verso delle x crescenti (Verso l'interno del solenoide), mentre se χ_m è negativo la F_M è diretta nel verso delle x decrescenti (Verso l'esterno).

Questo sistema è un modo molto semplice per distinguere i diamagneti dai paramagneti, infatti i diamagneti sono gli unici ad essere sputati via da questo sistema, mentre l'effetto di risucchio per i ferromagneti (che possono avere valori della suscettività molto elevati) può essere estremamente potente.

8.6 Generatori e motori elettrici

La legge di Faraday-Neumann-Lenz è quella che consente il funzionamento di tutti o quasi gli oggetti elettrici che abbiamo. Infatti è estremamente facile generare corrente alterata a partire da forze di natura meccanica.

Un primo esempio di generatore è mostrato schematicamente in Figura 8.6.

Una bobina avvolta attorno ad un materiale ferromagnetico⁵ viene fatta ruotare immersa in un campo magnetico costante (sviluppato da un magnete permanente)

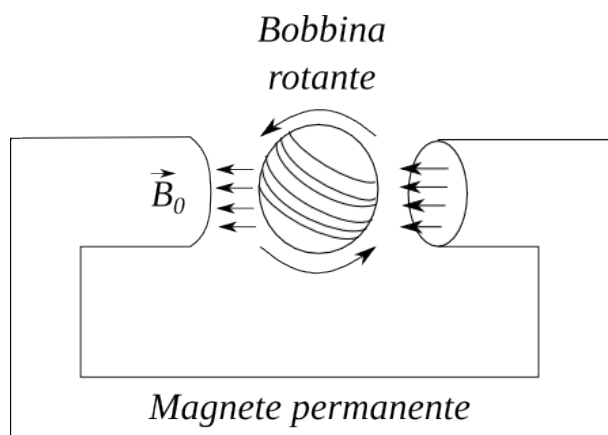


Figura 8.6: Schema di un generatore elettrico.

Il magnete permanente (combinando col ferromagnete) sviluppa un campo magnetico quasi centrale sulla bobina (\vec{B}_0), il flusso attraverso gli avvol-

⁵Il materiale ferromagnetico fa crescere l'intensità del campo magnetico all'interno della bobina, ricordiamo che se il campo è quasi costante possiamo fare l'approssimazione per i ferromagneti di usare il μ_r istantaneo dell'isteresi, che assume valori molto maggiori di 1. Questo fa sì che la **riluttanza** del traferro sia molto più piccola se vi è presente il ferromagnete (in genere un nucleo di ferro dolce).

gimenti sarà pari a:

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B}_0 \cdot \hat{n} NS = NBS \cos(\omega t)$$

Dove ω è la velocità angolare della bobina. Da cui la forza elettromotrice indotta sulla bobina diventa:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega NBS \sin(\omega t)$$

La bobina viene detto **indotto**, il magnete è detto **induttore**.

I problemi con questo tipo di generatori nascono dalla necessità di dover poi raccogliere la corrente prodotta dalla bobina rotante. Per farlo c'è la necessità di usare contatti striscianti, i quali sono nella pratica difficili da realizzare se si vogliono limitare le perdite di energia.

Per risolvere questo problema in genere i generatori sono costruiti al contrario ossia mantenendo fermo l'indotto, e facendo ruotare intorno l'induttore (Figura 8.7).

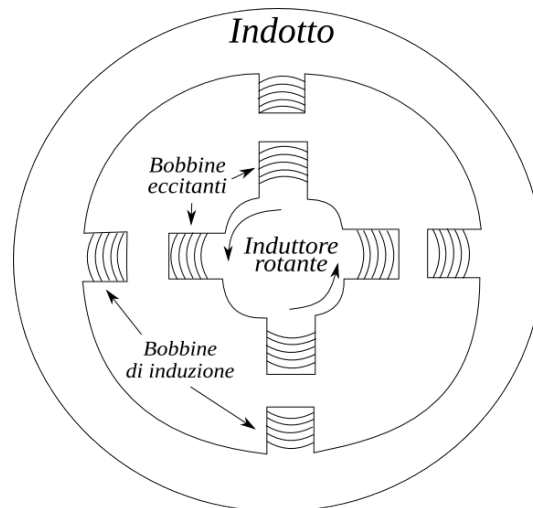


Figura 8.7: Schema di un generatore, questa volta è l'induttore ad essere fatto ruotare all'interno, e l'indotto rimane fermo all'esterno, in questo modo basta far passare una piccola corrente nelle bobine eccitanti dell'induttore rotante per ottenerne una molto più grande nell'indotto, in genere questi speciali generatori hanno più poli in modo da poter massimizzare l'effetto di induzione magnetica.

Un elemento critico per questo tipo di generatori è la dimensione del traferro tra indotto ed induttore. Infatti la riluttanza associata a questo traferro può abbattere il campo magnetico totale (ecco perché si usa materiale ferromagnetico come indotto), bisogna quindi limitare il più possibile le dimensioni del traferro.

Questa stessa geometria di Figura 8.6 è usata per generare dei motori elettrici. Dove alla bobina interna viene applicato il momento magnetico:

$$|\vec{M}| = |\vec{m} \times \vec{B}| = mB \sin \alpha$$

Posso pilotare il sistema con un campo ruotante \vec{B} . In questo modo posso far girare uniformemente la ruota.

In genere i generatori producono alte correnti e basse tensioni, mentre nelle linee di trasmissione vengono usate alte tensioni e basse correnti, per ridurre al minimo le perdite di energia dovute all'effetto Joule (Ri^2).

Per compiere queste trasformazioni sono usati i **trasformatori**.

Sono dei semplicissimi oggetti costituiti di materiale ferromagnetico, dove il circuito in ingresso compie N_1 avvolgimenti, ed entra con una corrente i_1 , mentre il circuito in uscita compie N_2 avvolgimenti e avrà corrente in uscita i_2 .

Per capirne il funzionamento basta capire che il materiale ferromagnetico trasporta il campo magnetico prodotto dal solenoide 1 al solenoide 2 (Figura 8.8).

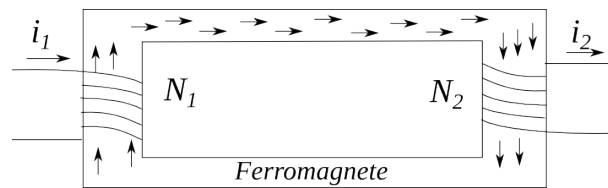


Figura 8.8: Schema del trasformatore.

Circuitazione di Ampere:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl = N_1 i_1$$

Il circuito 1 avrà la seguente relazione di Kirchhoff:

$$f_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Mentre il secondo circuito ha relazione:

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Nel solenoide abbiamo già calcolato L

$$\Phi(B_1) = N_1 S B_1 = N_1 S \mu_0 \mu_r i_1 \frac{N_1}{l} = L_1 i_1$$

$$L_1 = \frac{N_1^2 S \mu_0 \mu_r}{l} \quad L_2 = \frac{N_2^2 S \mu_0 \mu_r}{l}$$

Calcoliamo la mutua induzione:

$$M = \frac{\Phi_1(\vec{B}_2)}{i_2} = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{i_1} = \frac{N_2 S B_1}{i_1} = \frac{N_2 S N_1 i_1 \mu_0 \mu_r}{l i_1}$$

$$M = \frac{N_1 N_2 S \mu_0 \mu_r}{l}$$

Notiamo che M ha una forma molto particolare in questo caso:

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

Studiamo come si comporta il circuito 2 se aperto ai capi ($R_2 \rightarrow \infty$, $i_2 = 0$):

$$\Delta V_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

Se la resistenza ohmica del primo circuito è trascurabile, Abbiamo che:

$$\Delta V_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \approx L_1 \frac{di_1}{dt}$$

A questo punto possiamo calcolare il rapporto delle tensioni:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{L_1}{M}$$

Ma abbiamo detto che $M = \sqrt{L_1 L_2}$

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Da cui abbiamo ottenuto un modo per poter alzare o abbattere il potenziale comodamente! Chiaramente se il trasformatore è ideale, non possiamo alzare il potenziale senza avere un effetto opposto sulla corrente, poiché deve rimanere costante il termine della potenza $W = Vi$, se raddoppiamo il potenziale abbiamo dimezzato le correnti, e così via quindi semplicemente le correnti saranno date dalla relazione inversa:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Tuttavia questo meccanismo ha una grande fregatura in mezzo: i materiali ferromagnetici tendono purtroppo ad essere discreti conduttori, e poiché attraverso la sezione del ferromagnete nel trasformatore passano campi magnetici variabili nel tempo si inducono correnti anche nei ferromagneti. Queste correnti riscaldano il ferromagnete per effetto Joule causando una perdita di potenza tutt'altro che trascurabile durante il processo di trasformazione.

Queste correnti parassite che si formano sono dette correnti di Foucault. Per risolvere il problema il ferromagnete viene usato a lamine finissime separate da una colla isolante, in questo modo la resistività del materiale aumenta notevolmente abbattendo le correnti parassite e gli effetti di dispersione.

Capitolo 9

Equazioni di Maxwell

Siamo ormai giunti al termine dello studio dei fenomeni elettromagnetici, è arrivato il momento di sviluppare un formalismo che ci consenta di riassumere in 4 semplici equazioni tutto l'elettromagnetismo.

Tenendo sempre a mente che il primo principio sancito all'inizio di questo corso è la conservazione delle cariche elettriche, questo principio può essere formalizzato, come abbiamo visto nel capitolo sull'elettrodinamica, dall'equazione:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Poi abbiamo i vari teoremi che abbiamo dimostrato nel corso di questi appunti: Il teorema di Gauss per i campi elettrici (2.4), estesa poi ai dielettri diventa la (4.2):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

La seconda equazione che vogliamo scrivere riguarda invece il campo magnetico, il teorema di Gauss per il campo magnetico che abbiamo dimostrato nella sezione 6.4.2, il campo di induzione magnetica è solenoidale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

La terza equazione di Maxwell per la prima volta accoppia la sorte di campo elettrico e magnetico, è la legge di Faraday-Neumann-Lenz, in particolare il campo elettrico generato dalla variazione di campo magnetico (dimostrata nella sezione 8.3):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Manca ancora l'ultima equazione, la quale l'abbiamo già discussa in regime stazionario, essa è proprio il teorema di Ampere (modificato per tener conto dei mezzi magnetici):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \tag{9.1}$$

Tuttavia abbiamo fatto vedere come questa equazione contenga in se una implicita contraddizione nel caso non stazionario: Se calcoliamo la divergenza otteniamo che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ma la divergenza di un campo rotore è sempre nulla¹!
Dobbiamo uscire fuori da questa terribile contraddizione.

9.1 Correnti di spostamento - Quarta equazione di Maxwell

Vediamo di studiare un esempio di circuito che mette in luce molto bene il paradosso del teorema della circuitazione di Ampere.

Supponiamo di avere un circuito con un condensatore che si sta scaricando (Figura 9.1). Nel circuito sta scorrendo una certa corrente elettrica, se scelgo un percorso circolare attorno al filo ottengo:

$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dS = i$$

Dove S_1 è una qualunque superficie che ha per bordo il percorso L_1 . Ora supponiamo di prendere la superficie formata dalla superficie laterale che unisce L_1 e L_2 e da L_2 .

Questa è chiaramente una superficie che ha per bordo L_1 , ed è anche una superficie che non interseca mai il filo, per cui, secondo la 9.1, risulterebbe che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$$

Da cui:

$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ma abbiamo fatto vedere prima che questo deve essere proprio i .

Queste considerazioni ci fanno capire che dentro il condensatore sta succedendo qualcosa che noi ignoriamo, di fatto è come se anche lì passasse corrente (proprio lo stesso valore i) ma non si registra un vero spostamento di cariche.

Quello che nella realtà sta succedendo è che sta variando il campo elettrico. Vuoi vedere che, così come la terza equazione di Maxwell ci da un informazione sul rotore di \vec{E} in funzione della variazione del campo magnetico, esiste una simmetria nella quarta che ci da una informazione sul rotore di \vec{H} in funzione della variazione del campo elettrico?

Come facciamo però a trovare la giusta espressione?

¹Un campo rotore è sempre solenoidale

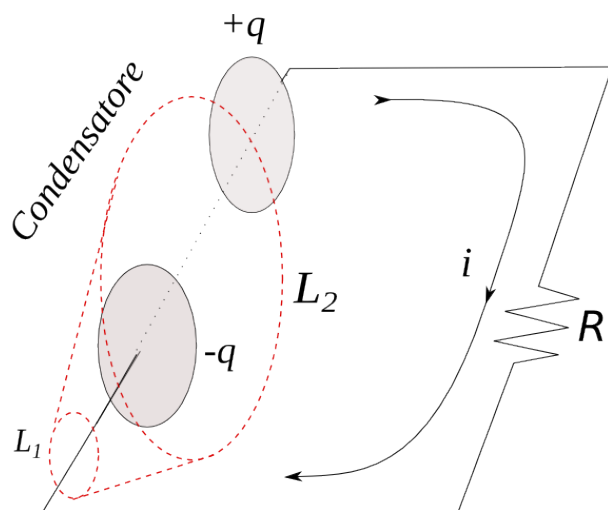


Figura 9.1: Circuito con la scarica di un condensatore. Calcolo della circuitazione di \vec{H} attraverso i due percorsi L_1 (concatenato al circuito) e L_2 (concatenato al condensatore).

Ripartiamo dalla contraddizione che avevamo trovato:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$$

Questa semplice relazione matematica deve per forza implicare che il campo $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ sia solenoidale. Cerchiamo dunque un campo solenoidale nelle altre equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Abbiamo trovato un campo solenoidale, molto simile a quello precedente che però mantiene matematicamente giusta la precedente equazione! Notiamo che se ci troviamo in casi stazionari il campo

$$\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \text{ per } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Riottenendo il teorema di Ampere nel caso stazionario

Possiamo a questo punto scrivere anche l'ultima equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.2)$$

Si vede subito dalla 9.2 che la quantità $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ha le dimensioni di una intensità di corrente, viene chiamata infatti **corrente di spostamento**, ed è proprio questa corrente a dare il nome al vettore \vec{D} che avevamo a suo tempo chiamato vettore di **spostamento**.

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_s$$

Infatti la 9.2 può anche essere scritta in questo modo può leggibile:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_s$$

Verifichiamo nell'esempio mostrato in Figura 9.1 e riprendiamo la circuitazione di \vec{H} attorno ad L_2 , che già sappiamo dover ridare la legge di Biot-Savar:

$$2\pi r H = \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dS$$

All'interno del condensatore non c'è corrente \vec{J} , r è il raggio della circonferenza L_2 :

$$2\pi r H = \int_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

$$2\pi r H = \pi R^2 \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$H = \frac{R^2}{2r} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial E}{\partial t}$$

In un condensatore:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \quad Q = C \Delta V \quad C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\pi R^2}{d}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{dC} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi R^2} i$$

$$H = \frac{R^2}{2r} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi R^2} i$$

$$H = \frac{1}{2\pi r} i$$

Ma questa è proprio la legge di Biot-Savar! Questo ci dice che per il campo magnetico a tutti gli effetti è come se ci fosse una corrente i che scorre all'interno del condensatore!

9.2 Problema generale dell'elettromagnetismo

Possiamo finalmente riscrivere l'intero elettromagnetismo in appena quattro equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (9.3)$$

A questo sistema di equazioni si accodano le condizioni al contorno, in particolare il primo principio dell'elettromagnetismo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

E le condizioni sui materiali, in particolare il legame tra \vec{B} e \vec{H} e tra \vec{D} e \vec{E} :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

In presenza di materiali tuttavia ancora le equazioni che abbiamo scritto non sono in numero sufficiente per poter risolvere il problema generale dell'elettromagnetismo, occorre conoscere sia come si magnetizzano i materiali (e quindi la funzione di isteresi $\vec{M}(\vec{H})$) sia come si polarizzano i dielettrici (e quindi la dipendenza da $\vec{P}(\vec{E})$).

Le equazioni di Maxwell (9.3) forniscono da sole sei equazioni linearmente indipendenti, in 12 incognite.

Infatti le prime due equazioni sono direttamente ricavabili dalle ultime due:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

Da cui segue la seconda equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

In realtà l'equazione ci direbbe che la divergenza di \vec{B} è costante, poiché però le condizioni al contorno impongono che all'infinito \vec{B} sia nullo, la sua

divergenza all'infinito deve essere nulla, quindi l'unica costante compatibile con questo risultato è lo 0.

Allo stesso modo possiamo ricavare la prima equazione di Maxwell facendo lo stesso procedimento dall'ultima:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \rho) = 0$$

Il che ci riporta ancora ad una volta alla prima equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Siccome però le ultime due equazioni di Maxwell sono vettoriali, ogniuna ci tira fuori tre relazioni.

Le restanti sei equazioni che servono per risolvere il sistema sono date dalle condizioni sui materiali (anche queste di tipo vettoriale).

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Le dodici incognite ovviamente sono gli andamenti spaziali dei quattro campi (di cui ognuno ha tre coordinate):

$$\vec{H} \quad \vec{B} \quad \vec{D} \quad \vec{E}$$

9.2.1 Passaggio tra materiali, nuove considerazioni

È molto interessante vedere come adesso entrano in crisi le due dimostrazioni che avevamo dato per studiare le condizioni al contorno dei mezzi dielettrici e magnetici:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad E_{t1} = E_{t2}$$

$$B_{n1} = B_{n2} \quad H_{t1} = H_{t2}$$

Avevamo supposto la conservatività di campo elettrico ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$) che ora è contraddetta dalla terza equazione di Maxwell, e la conservatività di \vec{H} in assenza di correnti \vec{J} , che è ancora una volta contraddetta dalla quarta equazione di Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ora per calcolare la conservazione di \vec{E} sulla tangente volevamo calcolare il lavoro fatto sul circuito infinitesimo:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{n} dS = - \int_{S \rightarrow 0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \rightarrow 0$$

Basta far tendere a zero lo strato di separazione che tutta la superficie di integrazione va a zero, quindi il contributo della variazione del campo magnetico alla circuitazione è un infinitesimo di ordine superiore. Con lo stesso ragionamento posso giustificare anche la circuitazione di \vec{H} .

Quindi rimangono valide queste relazioni.

9.3 Soluzione del problema generale in mezzi omogenei isotropi

Mettiamoci ora in un caso semplice, mezzi omogenei isotropi:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Riscriviamo le equazioni di Maxwell solo in funzione di \vec{B} e \vec{E} adesso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{J} + \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (9.4)$$

La terza e la quarta equazione risultano essere interessanti, in quanto accoppiano \vec{E} e \vec{B} , proviamo a disaccoppiarle, prima però supponiamo di voler risolvere il problema generale dell'elettromagnetismo in zone dello spazio in cui non sono presenti cariche elettriche o correnti:

$$\rho = 0 \quad \vec{J} = 0$$

Le equazioni di Maxwell diventano nuovamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (9.5)$$

Prendiamo la terza equazione, e calcoliamone il rotore:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Sostituiamo la quarta in questa equazione:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ricordiamo l'espressione per il doppio rotore?

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

Da cui possiamo ricavare:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ma la divergenza di \vec{E} è nulla per la prima equazione di (9.5)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

Usiamo lo stesso trucco per isolare \vec{B} , calcoliamo il rotore della quarta equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Sostituiamo al posto del rotore di \vec{E} la terza equazione di Maxwell, e sviluppiamo il doppio rotore (ricordando che la divergenza di \vec{B} è nulla):

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Da cui otteniamo l'equazione finale anche per \vec{B}

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (9.7)$$

Sia nella 9.6 che nella 9.7 riconosciamo subito l'equazione di D'Alembert delle onde!

Introduciamo l'operatore d'alambertiano in questo modo:

Definizione 9.1 (Operatore d'alambertiano) Si definisce l'operatore differenziale lineare d'alambertiano in questo:

$$\square = \left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

Alla luce della definizione 9.1 possiamo riscrivere il comportamento di campo elettrico e magnetico in modo molto più compatto:

$$\square \vec{E} = 0$$

$$\square \vec{B} = 0$$

Dove abbiamo definito la velocità v dell'operatore d'alambertiano come:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (9.8)$$

9.4 Soluzione in onde piane

Supponiamo per un momento di studiare la propagazione delle onde per quel che riguarda un solo fronte, ossia supponiamo che campo elettrico e magnetico abbiano entrambi una sola componente variabile nel tempo, chiamiamo per semplicità x questa componente e vediamo come si comportano in queste condizioni.

L'equazione

$$\square \vec{E} = 0$$

Diventa con questa premessa semplicemente:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Che è risolta da una combinazione lineare di due funzioni qualsiasi f e g del tipo:

$$\vec{E} = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Dove v è dato dalla (9.8).

Infatti sia $\xi = x - vt$ si mostra subito che $f(\xi)$ è soluzione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di D'alambert si ottiene l'identità. Il significato di v è evidente, esso rappresenta la velocità con cui si sta spostando il fronte d'onda (Figura 9.2)

Il parametro v rappresenta dunque come il campo elettrico si sta spostando nel tempo lungo l'asse delle x . Le soluzioni sono di due tipi:

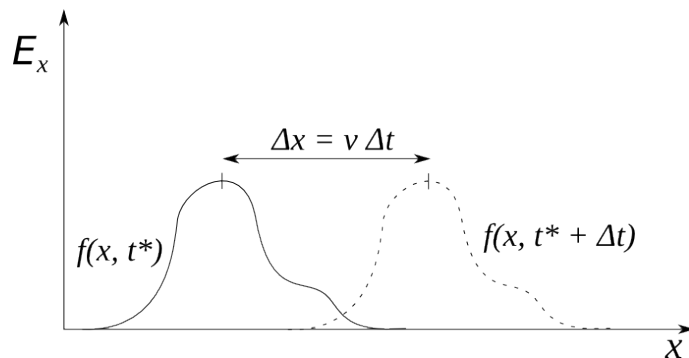


Figura 9.2: Schema di una possibile soluzione dell'equazione di D'alambert, in cui una particolare forma d'onda si sta propagando verso destra (onda progressiva).

- Onda progressiva: $f(x - vt)$
- Onda regressiva: $g(x + vt)$

Se ci troviamo nel vuoto la velocità v diventa un importantissimo valore, e si indica con la lettera c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Questa c è proprio la velocità della luce! La luce dunque è un fenomeno legato alla propagazione delle onde elettromagnetiche. Tuttavia alcuni materiali come l'acqua, hanno costanti dielettriche anche molto elevate, $\epsilon_r = 80$, o i ferromagneti hanno permeabilità magnetica altissime. In questi materiali la velocità della luce dovrebbe essere molto inferiore. In realtà la frequenza con la quale oscilla il campo magnetico per le onde visibili ($\nu \approx 10^{15}$ Hz) queste sostanze non fanno in tempo a polarizzarsi o magnetizzarsi, per cui in queste condizioni μ_r diventa molto vicini ad 1, anche nei ferromagneti. A dominare l'effetto di *rallentamento* della luce c'è ϵ_r , anche lui tuttavia viene smorzato di molto. Infatti in acqua diventa $\epsilon_r \approx 1.4$.

9.4.1 Studio di Fourier

Torniamo all'equazione di D'alambert

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

La coppia di soluzioni $f(x - vt)$ e $g(x + vt)$ ha una forma analitica. Di particolare interesse è se sono funzioni periodiche, ossia che:

$$f(x, t) = f(x, t + T)$$

Con T periodo dell'onda. In questa ipotesi è possibile sviluppare la funzione in serie di Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Dove i coefficienti a_0 , a_n e b_n sono ricavabili con i prodotti scalari della $f(t)$ con i vettori della base, diviso la norma al quadrato del vettore della base²:

$$1 \quad \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

E valgono rispettivamente:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt$$

Se $f(t)$ è soluzione, poiché f è combinazione lineare di tutte queste funzioni sinusoidali, anche ciascuna di loro è soluzione, quindi lo studio dell'onda si riduce allo studio delle sue soluzioni. In particolari sono interessanti i parametri a_n e b_n , che riguardano le ampiezze delle sinusoidi che hanno quella pulsazione ω_n

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Siccome la combinazione di un seno e un coseno che hanno lo stesso periodo produce una nuova funzione sinusoidale con ampiezza pari a

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Conviene studiare questo parametro A_n in funzione di n per ottenere informazioni su f . Poiché n è discreto sto studiando un diagramma.

Questo studio è detto lo studio dello **spettro** dell'onda!

Questa analisi, riportata graficamente in Figura 9.3 è in realtà poco usata per la luce³, per la quale si predilige un altro tipo di analisi del tutto simile.

La luce non si presenta in realtà come un'onda periodica agli strumenti, ma una funzione molto complessa. Per studiarla con più agevolezza si

²Si noti come in realtà 1 sia proprio $\cos(nx)$ per $n = 0$, ecco perché abbiamo chiamato a_0 il termine noto

³È invece usatissima in acustica ed elettronica.

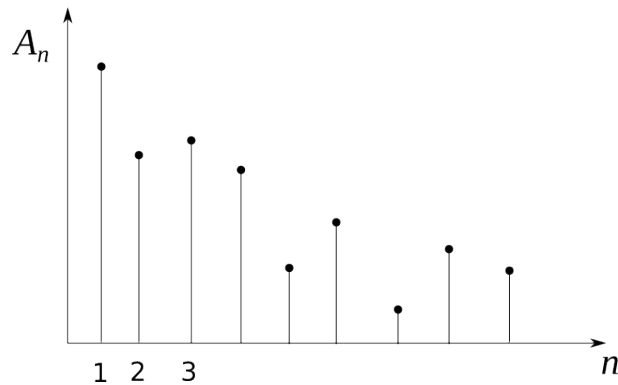


Figura 9.3: Studio dello spettro discreto di un onda elettromagnetica

prende una porzione d'onda definita in un intervallo finito e la si estende automaticamente periodicizzandola.

A questo punto è può agevole usare la trasformata di Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt$$

Di fatto questo altro non è che un passaggio al continuo della serie di Fourier, dove il periodo della funzione tende ad essere infinito, e la differenza di pulsazione tra ω_n e ω_{n+1} va a 0:

$$d\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

Da cui la $F(\omega)$ risulta essere proprio l'estensione al continuo del diagramma di Figura 9.3, è mostrato in Figura 9.4.

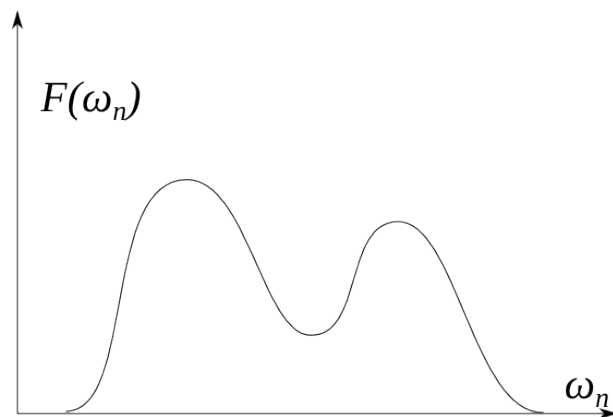


Figura 9.4: Spettro continuo della luce ottenuto con la trasformata di Fourier, i picchi della funzione sono le frequenze a cui la luce ha più intensità.

In generale gli spettri sono funzioni continue e regolari, ma sono presenti eccezioni, alcune lampade a gas emettono radiazioni quantizzate, sempre alla stessa frequenza, e lo studio di questi spettri è alla base della meccanica quantistica.

9.4.2 Onde monocromatiche

Fatta questa premessa si capisce bene l'importanza di studiare soluzioni del tipo

$$f(\xi) = A \sin \xi$$

In particolare nel caso del campo elettrico questa soluzione diventa:

$$E_x = E_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) \right]$$

Dove il termine $\frac{2\pi}{\lambda}$ è un coefficiente di normalizzazione, per rendere adimensionale l'argomento del seno.

Si capisce facilmente che λ è il valore della lunghezza d'onda. Supponiamo infatti di bloccare l'onda ad un certo periodo t^* e studiare dopo quanto si ripete spazialmente:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt^*) + 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(X + vt^*)$$

Con X lunghezza d'onda, mostriamo che è proprio uguale a λ :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda}X &= 2\pi \\ \lambda &= X \end{aligned}$$

A questo punto possiamo anche definire facilmente il periodo:

$$T = \frac{\lambda}{v}$$

Infatti questo è il tempo che impiega l'onda per percorrere una lunghezza d'onda. Definendo la frequenza dell'onda ν otteniamo

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{\nu} &= \frac{\lambda}{v} & \omega &= 2\pi\nu \\ v &= \lambda\nu \end{aligned}$$

Questa è detta l'equazione di **dispersione** delle onde monocromatiche, e ovviamente vale solo se l'onda ha una sola frequenza. Ritornando all'espressione dell'onda monocromatica.

Torniamo ancora all'equazione di partenza:

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \mp \nu t \right) \right] \\ E_x &= E_0 \sin (kx \mp \omega t) \end{aligned}$$

Dove abbiamo definito il parametro k in questo modo:

Definizione 9.2 (Vettore d'onda) Si definisce il vettore d'onda \vec{k} un vettore diretto lungo la direzione di propagazione dell'onda (come la velocità) e il cui modulo è definito dalla relazione:

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Su questa definizione torneremo in seguito, per capire il suo ruolo nella trasmissione di energia da parte dell'onda.

La velocità dell'onda monocromatica dipende dalla lunghezza d'onda e dalla frequenza, si possono avere situazioni in cui diverse componenti della luce si propagano tra loro a velocità diverse, poiché v è funzione di ε_r che a sua volta è funzione di ν . Questo comportamento è alla base del funzionamento dei prismi e dei materiali che dividono la luce nei vari colori.

9.4.3 Proprietà delle onde elettromagnetiche

Abbiamo discusso per ora solo la soluzione delle *onde piane* fino a questo punto. Il motivo di questa scelta è la loro facilità ad essere trattate. Questa caratteristica può facilmente essere dedotta dal parametro $\xi = x \mp vt$ che in questa rappresentazione, è un vettore che giace sul piano xt . Una volta descritta quindi la forma della E in questo piano, in tutti gli istanti di tempi successivi questo piano semplicemente trasla sull'asse dei tempi.

Possiamo quindi riscrivere le equazioni di Maxwell (9.5) nel caso delle onde piane:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 &\quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0\end{aligned}$$

Riscriviamo i rotori:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\hat{j} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\hat{j} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \hat{k} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Da cui vediamo che nessuno dei due ha componente sull'asse delle x :

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right)_x &= 0 = -\frac{\partial \vec{B}_x}{\partial t} \\ \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)_x &= 0 = \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial t} &= 0 \quad \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} = 0\end{aligned}$$

Questo ci dice che E_x e B_x sono costanti nel tempo e nello spazio. Nella soluzione ad onde piane pertanto, poiché all'infinito devono essere entrambi

nulli, valgono 0 entrambi! Questo implica che campo elettrico e magnetico sono sempre nulli lungo la direzione di propagazione. Già questo è un interessantissimo risultato, implica infatti che le onde elettromagnetiche sono **onde trasversali**, infatti non hanno oscillazioni nella direzione di propagazione.

Studiamo ora il comportamento sugli altri assi:

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_y = -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_z = +\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

Analogamente possiamo ripetere tutti i conti per la quarta equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

E ottenere

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_y = -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_z = +\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

Otteniamo in totale quattro equazioni che mi dicono che le componenti ortogonali di campo elettrico e magnetico si influenzano a vicenda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t} & \frac{\partial B_y}{\partial x} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} & -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned}$$

Per risolvere questo sistema di quattro equazioni incrociate tra di loro facciamo una scelta furba. Mettiamoci in un caso semplice e risolviamo il sistema sfruttando solo una coppia di queste due, e poi attraverso delle combinazioni lineari della soluzione ricostruiamo la soluzione generale.

Il caso semplice, ma di grandissimo interesse, in cui ci mettiamo è quello delle **onde con polarizzazione piana** ossia in cui il campo elettrico varia solo lungo una direzione, supponiamola senza perdere di generalità che sia E_y . Risulta subito evidente che se E_z è nullo, lo è anche B_y , da cui la nostra onda polarizzata ha campo magnetico solo lungo B_z .

$$\begin{cases} -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

Sappiamo già qual è la soluzione in E_y :

$$E_y = E_{y0}(x \mp vt)$$

Introduciamo ancora una volta il parametro $\xi = x \mp vt$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \xi} \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = \mp v \frac{\partial E_y}{\partial \xi}$$

Stessa cosa per B_z ovviamente, prendiamo quindi la prima equazione del sistema:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial \xi} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial E_y}{\partial \xi}$$

Integrando rispetto a ξ otteniamo

$$\pm v B_z = E_y$$

Non solo \vec{B} e \vec{E} sono tra loro ortogonali, ma sono anche legati da una costante di proporzionalità durante lo spostamento, che è proprio v ! Questo ci dice che possiamo riscrivere \vec{B} e \vec{E} sfruttando il vettore \vec{v} sotto forma di un prodotto vettoriale!

$$\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v} \quad (9.9)$$

La cosa interessante è che possiamo scrivere il modulo di v in funzione di \vec{E} e \vec{B} :

$$v = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Se usiamo al posto di \vec{B} il campo \vec{H} che nel vuoto vale $B = \mu_0 H$

$$\frac{E}{H} = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z$$

Dove la costante Z nel vuoto è detta **impedenza caratteristica** del vuoto!

Definizione 9.3 (Impedenza caratteristica) *Si definisce la grandezza Z l'impedenza caratteristica di un mezzo come il rapporto tra campo elettrico \vec{E} e magnetico \vec{H} delle onde elettromagnetiche in quel mezzo, ed è pari a:*

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

In Figura 9.5 è riportato un esempio di onda elettromagnetica polarizzata.

Proviamo adesso ad estrapolare da quanto detto la soluzione generale. Se prendiamo a questo punto un'onda polarizzata nell'altro modo, ossia con \vec{E} diretto solo lungo le z (e di conseguenza \vec{B} diretto solo lungo le y) otteniamo esattamente lo stesso risultato, facendo uso delle altre due equazioni. Ma poiché un'onda generica può sempre essere scomposta come sovrapposizione di due onde polarizzate, la soluzione generale altro non è che la combinazione lineare delle soluzioni per onde polarizzate!

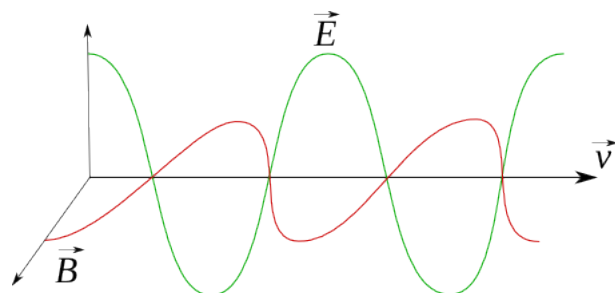


Figura 9.5: Onda elettromagnetica polarizzata.

Ne concludiamo che anche per onde non polarizzate campo elettrico e magnetico sono tra loro sempre perpendicolari, l'unica differenza è che l'oscillazione del campo elettrico (e di quello magnetico) sarà data dalla combinazione di due moti armonici tra loro ortogonali, ma già sappiamo che questa combinazione produce in generale un moto ellittico se i due moti armonici sono tra loro sfasati! Le onde polarizzate quindi presentano campi elettrici e magnetici che si involuppano come ellissi tra loro, ma restano sempre ortogonali e continuano a soddisfare la relazione 9.9.

Tuttavia genericamente le onde elettromagnetiche non sono polarizzate, queste onde hanno la caratteristica di avere una fase che varia nel tempo casualmente, per cui se le scomponiamo nelle onde polarizzate piane ortogonali, il loro sfasamento varia nel tempo casualmente, queste onde quindi hanno forme del campo elettrico e magnetico che varia nel tempo tra, in particolare campo elettrico e magnetico descrivono delle ellissi di cui ne varia casualmente l'eccentricità.

Questa loro caratteristica fa sì che le onde non polarizzate non possano fare tra loro interferenza, infatti variando la fase molto rapidamente e con casualità la sovrapposizione di due onde darà luogo ad un'onda la cui ampiezza cambia nel tempo con la fase. Poiché questo cambio è repentino, si considera come ampiezza il valore medio assunto dall'onda, ecco perché sovrapponendo le luci ordinarie non si osservano fenomeni di interferenza tra le onde.

9.4.4 Energia del campo elettromagnetico

Al campo elettrico e magnetico abbiamo visto è associata un'energia. Possiamo chiederci, quale componente del campo trasporta più energia? Quella elettrica o quella magnetica?

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

Vuoi vedere che trasportano esattamente la stessa energia? Dimostriamolo:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 & \pm vB &= E \\ \mathcal{E}_e &= \frac{1}{2}\varepsilon v^2 B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{B^2}{\varepsilon\mu} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \\ \mathcal{E}_e &= \mathcal{E}_m\end{aligned}$$

Concludiamo che l'energia viene trasportata equamente da campo elettrico e magnetico.

9.4.5 Direzione generica di propagazione

Che succede se l'onda al posto di propagarsi sull'asse delle x si propaga su un asse generico? La risposta è ovvia, basta ruotare il sistema di riferimento per far corrispondere la nuova asse delle x con la direzione di propagazione, e tutto è come l'abbiamo descritto fino ad ora nel nuovo sistema di riferimento.

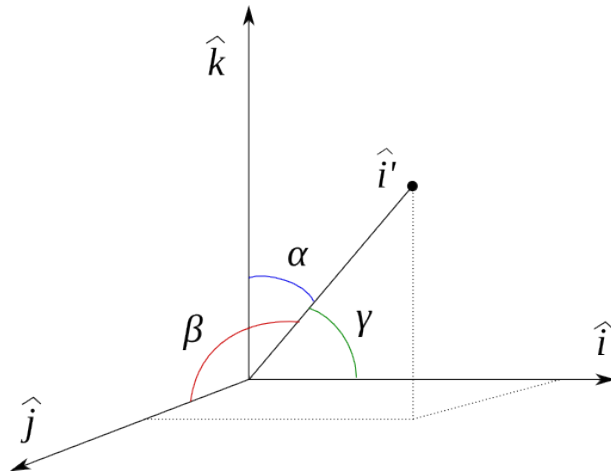


Figura 9.6: Schema del nuovo asse \hat{i}' descritto dagli angoli direttori α β e γ

Se descriviamo il nuovo asse di propagazione dell'onda \hat{i}' in funzione dei coseni direttori rispetto agli altri assi otteniamo:

$$\hat{i}' = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\hat{i} \cdot \hat{i}', \hat{j} \cdot \hat{i}', \hat{k} \cdot \hat{i}' \right)$$

Scriviamo la componente x' di un generico vettore \vec{r} nel nuovo sistema di riferimento:

$$x' = \vec{r} \cdot \hat{i}'$$

Da cui la soluzione per la generica componente trasversa del campo elettrico è formata da:

$$E_y = E_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x' - \omega t \right)$$

$$E_y = E_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \vec{r} \cdot \hat{i}' - \omega t \right)$$

Ricordiamo la definizione 9.2?

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{i}'$$

Da cui possiamo utilizzare questa definizione per riscrivere la funzione del campo elettrico:

$$E_y = E_0 \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right)$$

Questo esprime nuovamente l'onda piana in funzione di una posizione qualunque \vec{r} dello spazio!

9.4.6 Considerazioni finali sulle onde piane

Generalmente è molto difficile trovare sorgenti luminose che emettano onde piane, molto più semplice è considerare sorgenti che emettono onde sferiche. Tuttavia le onde piane rivestono un importantissimo ruolo nello studio dei fenomeni elettromagnetici, in particolare quando i rivelatori sono posti a grande distanza dalle sorgenti. È il caso questo dei rivelatori che studiano le onde elettromagnetiche che provengono dallo spazio.

Queste onde, che hanno sorgenti sferiche, a grande distanza presentano un fronte d'onda praticamente piano, che quindi si comporta come abbiamo studiato qui.

Un'altra considerazione interessante riguarda lo spettro elettromagnetico, questo è molto esteso, e può variare da frequenze molto basse (a cui corrispondono valori di λ dell'ordine del chilometro e del metro) che definiscono le *onde radio*, a valori a frequenza via via maggiore, *microonde, infrarossi, visibile, ultravioletto, raggi X e raggi γ* .

La radiazione visiva occupa una scala molto piccola nella panoramica dell'intera radiazione elettromagnetica, e il nostro occhio ha sviluppato una sensibilità che va dal rosso al violetto, con un picco di sensibilità per il colore verde, situato all'incirca al centro della banda rivelata.

9.5 Forno a microonde - onde stazionarie

Vediamo di studiare ora il funzionamento pratico di un oggetto che funziona proprio utilizzando le onde elettromagnetiche, in particolare le *microonde*. All'interno del forno si crea un fenomeno interessante, quello di onda stazionaria, in cui non vi è trasferimento di energia e la soluzione viene disaccoppiata in x e t in questo modo:

$$E = f(\vec{r})g(t)$$

Per studiare il funzionamento del forno a microonde dobbiamo fare una piccola precisazione sul comportamento dei metalli, come reagiscono all'entrata di una radiazione elettromagnetica? Lo studio del problema è lungo e complesso, ed esula dallo scopo di questi appunti, diciamo qualitativamente che l'onda elettromagnetica induce una corrente nel metallo che si oppone alla variazione del campo magnetico, tende quindi ad essere smorzata grazie alla legge di Lenz.

Nei metalli che hanno una alta conducibilità questo effetto è molto brusco, e quindi l'onda di fatto non vi penetra all'interno, ma viene *riflessa*.

Come spieghiamo il fenomeno di riflessione? Semplice, come condizioni al contorno abbiamo che l'onda deve essere nulla all'interno del conduttore, e fuori deve essere combinazione lineare di funzioni sinusoidali con argomento che va come $\xi = x - vt$.

Per far sì che l'onda sia sempre nulla all'inizio del conduttore vuol dire che all'onda entrante deve essere sovrapposta un'altra onda, costantemente in controfase rispetto a questa. Ora abbiamo due possibilità, o questa onda ha direzione concorde alla onda di partenza, o discorde. Se è concorde siamo di fronte ad un caso banale in cui l'onda risultante è tutta nulla (in ogni punto abbiamo uno sfasamento di π). Se è discorde invece la situazione diventa più interessante. La soluzione non banale è quindi che si forma un'onda retrocedente di pari ampiezza a quella avanzante:

$$E_i = E_0 e^{j(kx - \omega t)} \quad E_r = -E_0 e^{j(kx + \omega t)}$$

Dove abbiamo usato la rappresentazione complessa per comodità. L'onda totale sarà data dalla combinazione lineare delle due:

$$E_{tot} = E_0 \left[e^{j(kx - \omega t)} - e^{j(kx + \omega t)} \right]$$

$$E_{tot} = -2j E_0 e^{jkx} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$E_{tot} = -2E_0 \sin(\omega t) \cdot j e^{jkx}$$

Tiriamo fuori di nuovo la parte reale:

$$E_{tot} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx)$$

Questa è una soluzione stazionaria! Ossia in cui t e x sono disaccoppiati, e non c'è trasferimento di energia.

Andiamo adesso a studiare con attenzione questa soluzione. Vediamo che l'ampiezza dell'onda (studiata al variare del tempo) è:

$$A = 2E_0 \sin(kx)$$

Questo vuol dire che tutti i punti tali che $kx = \pi n$ Sono nodi dell'onda, in cui il campo elettrico rimane nullo nel tempo. Questa condizione è automaticamente soddisfatta per $x = 0$, ma per ipotesi deve essere soddisfatta anche

per $x = L$ con L la distanza tra gli specchi metallici del forno a microonde. Imponiamo questa condizione:

$$k = \frac{\pi n}{x}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi n}{L}$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

Questo ci dice che sono permessi solo alcuni precisi valori di λ , per tutti gli altri non esiste questa soluzione e quindi l'onda viene annullata completamente.

Per cui in un forno a microonde vengono inviate onde che hanno uno spettro con un picco in prossimità di uno dei valori di $\frac{L}{2n}$.

Andiamo ad analizzare cosa accade al campo magnetico, sfruttiamo la relazione $\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v}$. In particolare se l'onda regressiva aveva un'ampiezza pari all'opposto di quella dell'onda progressiva, otteniamo che:

$$\underbrace{E_0 = B_{0i}v}_{\text{onda progressiva}} \quad \underbrace{-E_0 = B_{0r}(-v)}_{\text{onda regressiva}}$$

Otteniamo che $B_{0i} = B_{0r}$. Ovvero che le due onde magnetiche sono invece in fase tra loro!

$$B_{tot} = B_0 e^{j(kx - \omega t)} + B_0 e^{j(kx + \omega t)}$$

$$B_{tot} = 2B_0 e^{jkx} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = 2B_0 e^{jkx} \cos(\omega t)$$

Prendo ancora una volta la parte reale e ottengo:

$$B_{tot} = 2B_0 \cos(kx) \cos(\omega t)$$

La cosa interessante è che tra campo elettrico e magnetico c'è uno sfasamento di $\pi/2$ e i nodi si trovano in zone differenti dello spazio.

9.6 Soluzione in onde sferiche

Abbandoniamo definitivamente la soluzione nel caso delle onde piane per ristudare il fenomeno quando ad emettere le onde è una sorgente puntiforme. In questa approssimazione il fronte d'onda lo supponiamo propagarsi come delle sfere concentriche con il punto di emissione.

Risolviamo nuovamente l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Passiamo alla rappresentazione in coordinate sferiche, per poter arrivare ad una equazione nella sola variabile r (infatti ci aspettiamo che le onde abbiano simmetria sferica). Per farlo dobbiamo prima scrivere noiosamente il laplaciano in coordinate sferiche. L'intera formula del laplaciano l'abbiamo già scritto nell'equazione 1.6. Poiché in questo caso il problema ha simmetria sferica, la soluzione f sarà funzione solo di r e di t , per cui possiamo trascurare tutte le derivate in φ e θ , e rimane solo:

$$\nabla^2 f(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

Con questa notazione riscriviamo la precedente equazione:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Che ovviamente non è l'equazione delle onde. Tuttavia vi somiglia molto, e possiamo usare un trucchetto per farla diventare qualcosa che sappiamo perfettamente come funziona.

Il trucco consiste nel supporre che la f abbia un andamento del tipo:

$$f(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r}$$

In linea del tutto generale quasi tutte le funzioni di cui non ci interessa sapere cosa succede nell'origine possono essere scritte in questa forma. La cosa interessante è cercare di capire cosa è la funzione χ :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\frac{\partial \chi(r, t)}{\partial r} r - \chi(r, t)}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\frac{\partial \chi(r, t)}{\partial r} r - \chi(r, t)}{r^2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} r - \chi \right) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} r + \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} = r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}$$

Ora possiamo sostituire:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

Poiché non ci interessa proprio cosa succede all'origine possiamo tranquillamente moltiplicare tutto per r

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

Ecco di nuovo l'equazione di D'Alambert! Solo che questa volta in funzione del raggio! Dunque non è f a soddisfare l'equazione delle onde, ma la funzione χ ! Questo implica che la soluzione è del tipo:

$$\chi(r, t) = \chi(r \mp vt)$$

Dove il segno \mp ha il significato di onda progressiva e onda regressiva visto nel paragrafo indietro. Allo studio della funzione χ si ripropone tutto quello che abbiamo detto per le onde piane, con la sola differenza che la direzione di propagazione stavolta è radiale e i fronti d'onda non sono piani, ma sono sfere (il vettore $\eta = r \mp vt$ individua delle sfere concentriche nello spazio).

Ora ritorniamo alla soluzione reale f :

$$f = \frac{\chi}{r} = \frac{1}{r} \chi(r \mp vt)$$

Applicando lo studio di Fourier, e scrivendo il risultato per una delle soluzioni:

$$f(r, t) = \frac{A'}{r} \sin\left(2\pi \frac{r \mp vt}{\lambda}\right)$$

$$E(r, t) = \frac{A'}{r} \sin\left(2\pi \frac{r \mp vt}{\lambda}\right)$$

Il parametro A' non rappresenta l'ampiezza dell'onda, come avveniva per le onde piane⁴. La sua ampiezza è invece data dal parametro:

$$E_0 = \frac{A'}{r}$$

Ed ha quindi una dipendenza dal raggio! L'onda sferica ha quindi una caratteristica importantissima, la sua ampiezza diminuisce all'aumentare della distanza dalla sorgente. In particolare la densità di energia, che abbiamo visto andare come il quadrato del campo elettrico e magnetico ed è quindi associata al quadrato dell'ampiezza), diminuisce con il raggio al quadrato!

$$\mathcal{E} \propto \frac{1}{r^2}$$

Se osservo quindi un'onda sferica da molto lontano ho visione di un piccolissimo spicchio dell'intera onda emessa, l'angolo di sfera che riesco a visualizzare è la cosiddetta **accettanza angolare** degli strumenti.

9.7 Intensità delle onde

Abbiamo già visto come l'energia trasportata dalle onde elettromagnetiche è suddivisa a metà tra campo elettrico e campo magnetico. L'effetto ondulatorio del campo elettrico e magnetico è dato dalla terza e dalla quarta equazione di Maxwell,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

⁴Trall'altro il parametro A' si misura anche il volt.

Sia la variazione di campo elettrico che quella di campo magnetico in genere sono enormi, basta pensare che le onde elettromagnetiche con frequenza minore (onde radio con λ dell'ordine del kilometro) $\nu \simeq 10^5$ Hz. Costruire strumenti in grado di seguire correttamente l'oscillazione dei campi elettrici e magnetici è compito difficilissimo, per questo motivo è conveniente studiare i valori quadratici medi dell'onda⁵.

$$\overline{E^2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E^2 dt = E_{eff}^2 = \frac{E_0^2}{2}$$

Questo risultato è valido per l'onda monocromatica, e discende direttamente dalle proprietà del seno. Il valore efficace dell'energia è molto interessante, poiché ci permette di calcolare facilmente l'energia media trasportata dal campo elettrico dell'onda:

$$\overline{\mathcal{E}_e} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{eff}^2$$

Nel caso semplice delle onde piane possiamo collegare il valore efficace all'ampiezza in questo modo:

$$E_0 = \sqrt{2E_{eff}^2}$$

Mentre nelle onde sferiche dobbiamo tener conto della diminuzione dell'ampiezza in funzione del raggio:

$$\frac{A'}{r} = \sqrt{2E_{eff}^2}$$

Per cui il valore di E_{eff} che misuriamo dipende strettamente dal raggio r (distanza con la sorgente).

9.7.1 Densità di energia elettromagnetica - Vettore di Poynting

Vediamo a questo punto come monitorare la densità volumica di energia per l'onda.

Prendiamo una zona limitata dello spazio τ (per esempio un parallelepipedo), vogliamo associare a questo un'energia del campo elettromagnetico.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} [(\vec{D} \cdot \vec{E}) + (\vec{H} \cdot \vec{B})] d\tau$$

Poiché campi elettrici e magnetici sono variabili, interessiamoci in particolare alla potenza.

$$P = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_{\tau} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B}) d\tau \right]$$

⁵Ovviamente non si studiano i valori medi perché sono nulli.

Ora poiché il volumetto τ è fermo possiamo scambiare l'integrale e la derivata temporale. Calcoliamo a parte la derivata delle due divergenze:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{D} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

Che limitandosi a considerare mezzi isotropi omogenei diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) = 2 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

Stessa cosa per \vec{B} ed \vec{H} (sempre in mezzi omogenei isotropi):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) = 2 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$P = \int_{\tau} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} \right) d\tau$$

Se in quel volumetto sono presenti cariche e correnti le equazioni di Maxwell ci dicono che:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

Da cui

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Usando queste espressioni possiamo ancora una volta riscrivere la potenza:

$$P = \int_{\tau} \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{E} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{H} - \vec{j} \cdot \vec{E} \right] d\tau$$

È arrivata l'ora di sfruttare un'altra proprietà della divergenza:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b})$$

Questa proprietà viene direttamente dalla rotazione del prodotto misto (dove abbiamo dovuto reinvertire il prodotto vettoriale tra $\vec{\nabla}$ e \vec{b} perché $\vec{\nabla}$ deve essere sempre applicato ad un vettore, per questo il segno davanti al secondo termine è negativo).

Ma quindi abbiamo che:

$$- (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{E} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

$$P = - \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau - \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau$$

Usiamo il teorema della divergenza

$$P = - \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau - \int_{S(\tau)} \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot \hat{n} dS \quad (9.10)$$

I lettori più perspicaci avranno da soli già capito dove andiamo a parare (sto scherzando, è ovvio che nessuno di voi l'ha capito). Si può riconoscere nel primo integrale il lavoro fatto dal campo elettrico per spostare le cariche, vediamo perché.

Il lavoro fatto da un campo elettrico per muovere la carica è pari a $\Delta V dq$, da cui la potenza sarà:

$$P_E = i \Delta V$$

Scriviamo i in funzione del vettore di corrente \vec{J} :

$$\begin{aligned} P_E &= \Delta V \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ P_E &= \int_{S \cdot L} \vec{J} \cdot \vec{E} dS dl \\ P_E &= \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau \end{aligned}$$

Potremo erroneamente pensare che quindi l'altro termine della 9.10 sia legato al campo magnetico... sbagliato, il campo magnetico agisce sulle cariche attraverso la forza di Lorentz, e la forza di Lorentz **non fa lavoro!**

Analizziamo il termine rimanente:

$$P_{\gamma} = \int_{S(\tau)} \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot \hat{n} dS$$

La grandezza $\vec{E} \wedge \vec{H}$ è una potenza per unità di superficie, è una potenza che c'è in presenza dell'onda elettromagnetica, riguarda quanta potenza sta uscendo dalle pareti del volume!

Possiamo definire un vettore \vec{s} in questo modo:

Definizione 9.4 (Vettore di Poynting) *Si definisce il vettore di **Poynting** quel vettore che indica la potenza per unità di superficie che viene trasportata dall'onda elettromagnetica*

$$\vec{s} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Notiamo subito che \vec{s} è diretto proprio come la velocità di propagazione dell'onda, infatti

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{B} \wedge \vec{v} \\ \vec{v} &= \vec{E} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

$$\vec{s} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Ma \vec{E} e \vec{B} sono tra loro perpendicolari:

$$s = EH = \frac{EB}{\mu} \quad vB = E \quad B = \frac{E}{v}$$

$$s = \frac{E^2}{\mu v} = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E^2}{Z}$$

Dove avevamo definito Z l'impedenza caratteristica del mezzo! (definizione 9.3).

Ancora una volta è più semplice misurare i valori medi di \vec{s} , e questo si può fare con l'ampiezza efficace:

$$\bar{s} = \frac{E_{eff}^2}{Z}$$

Che diventa per le onde sferiche

$$\bar{s} = \frac{A^2}{2Zr^2} \quad (9.11)$$

Ci si aspetta ovviamente che la quantità totale di energia trasferita ad una qualunque superficie chiusa dalle onde elettromagnetiche sia nulla (altrimenti l'onda produrrebbe energia dal nulla.) Vediamo di fare il calcolo esplicitamente per le onde piane e sferiche: Prendiamo prima un volume orientato nel verso della propagazione a parallelepipedo. Il flusso del vettore di Poynting sulle superfici laterali è nullo. Rimane solo quello sulle superfici perpendicolari.

Poiché queste sono uguali, e nelle onde piane il vettore di Poynting è costante, ma da una parte il flusso è entrante e dall'altra uscente risulta che il flusso totale è nullo. Questo si può estendere banalmente a volumi dalla forma qualsiasi, che posso sempre comporre come tanti parallelepipedi orientati lungo l'asse di propagazione.

Allo stesso modo facciamo la considerazione per un cono sferico di angolo solido Ω , centrato nella sorgente dell'onda sferica. Il flusso sul tronco di cono costruito inquadrate dalla sezione di due sfere sull'angolo solido (Figura 9.7)

Anche stavolta il flusso sulle superfici laterali è nullo:

$$s(r_1) \cdot 4\pi r_1^2 - s(r_2) \cdot 4\pi r_2^2$$

Applicando la 9.11

$$\frac{A^2}{2Zr_1^2} \cdot 4\pi r_1^2 - \frac{A^2}{2Zr_2^2} \cdot 4\pi r_2^2 = 0$$

Anche in questo caso il flusso attraverso le due superfici è nullo.

Il vettore di Poynting è detto **Intensità dell'onda**.

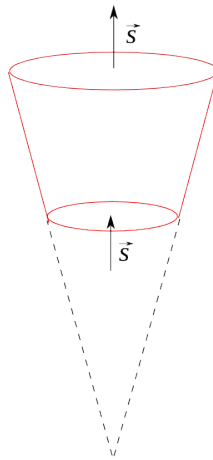


Figura 9.7: Schema di un tronco di cono su cui calcolare il flusso di \vec{s} .

9.8 Impulso del campo elettromagnetico

Affronteremo ora una questione spinosa, ebbene si lettori miei, alle onde elettromagnetiche si associa un impulso. Di certo non ci si sposta un mobile con un fascio di luce, ma un raggio laser puntato su un foglio di carta, ve lo metterà in moto.

Procediamo alla dimostrazione. La situazione è un po' complicata, ecco perché affronteremo questo calcolo per due volte, la prima più rozza, la seconda più rigorosa.

Supponiamo di avere una carica q che sta in equilibrio in un punto (si trova in un minimo del potenziale), posso scrivere sempre la sua energia, approssimando il potenziale ad una parabola attorno al minimo per piccole oscillazioni come:

$$U \simeq \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

La nostra carica si comporta proprio come se stesse oscillando su una molla. Genericamente sarà presente un termine dissipativo nel moto della carica, che supponiamo essere di tipo viscoso.

Ora immaginiamo di sparare contro questa carica un'onda elettromagnetica, ci sarà una forza che agisce sulla carica data dal contributo di forza elettrica e forza di Lorentz:

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Possiamo scrivere direttamente l'equazione del moto della carica:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f$$

Supponiamo di aver un campo elettrico di tipo sinusoidale

$$E = E_0 e^{j\omega t}$$

Anche la risposta della carica sarà una soluzione di tipo sinusoidale

$$x = x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Da cui ricaviamo la velocità

$$v = j\omega x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Ora proviamo a calcolare l'impulso che l'onda elettromagnetica trasferisce alla carica q :

$$I = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f dt$$

$$I = q \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(E_0 e^{j\omega t} + v_0 B e^{j(\omega t + \varphi)} e^{j\omega t} \right) dt$$

Le componenti dovute a campo elettrico e magnetico si sommano perché $\vec{v} \wedge \vec{B}$ è diretta lungo \vec{E} (Sia \vec{v} che \vec{B} sono ortogonali a \vec{E}).

$$I = qE_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\omega t} dt + v_0 B q e^{j\varphi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (e^{j\omega t})^2 dt$$

La prima componente è nulla, infatti:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\omega t} dt = 0$$

Poiché è la media di seno e coseno su un periodo. Questo ci dice che il campo elettrico non trasferisce nessun impulso! Rimane solo la componente magnetica. È un risultato opposto rispetto al calcolo dell'energia trasferita, che invece è dovuta solo alla componente elettrica.

9.8.1 Tensore degli sforzi

Riaffrontiamo ora il problema di trovare l'impulso associato alla radiazione elettromagnetica in modo più rigoroso.

Prendiamo il solito volumetto τ e calcoliamo la forza esercitata su questo volume. La forza esercitata dipenderà dalla carica ρ presente nel volume e dalle correnti \vec{J} , e ancora una volta sarà frutto dell'azione combinata di forza di Lorentz e forza di Coulomb:

$$F = \int_{\tau} \left(\rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B} \right) d\tau$$

Dove

$$\vec{J} d\tau \wedge \vec{B}$$

È la forza di Lorentz microscopica ($\vec{J} = nq\vec{v}_q = \rho\vec{v}_q$)

Ora sfruttiamo tutta la potenza della matematica e delle equazioni di Maxwell, è un bell'arsenale ragazzi:

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$F = \int_{\tau} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B} \right] d\tau$$

Magichiamo, aggiungiamoci un termine nullo:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{H} = 0$$

Lo posso aggiungere dentro l'integrale senza cambiare il risultato:

$$F = \int_{\tau} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{H} + \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B} \right] d\tau$$

Studiamo un po' l'ultimo termine

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \wedge \vec{B}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B} + \vec{D} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ricordiamo la terza equazione di Maxwell?

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Posso sostituirlo nell'equazione sopra:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \wedge \vec{B}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B} - \vec{D} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

Da cui tiriamo fuori il termine che ci interessa:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \wedge \vec{D}$$

In questo passaggio ho invertito l'ultimo prodotto vettoriale per cambiargli segno. Sostituiamo nella equazione gigante di prima:

$$F = \int_{\tau} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{H} + \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \wedge \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \wedge \vec{B}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \wedge \vec{D} \right] d\tau$$

Questa espressione è dotata di una sua musicalità. Possiamo vedere che compaiono tanti bei $\vec{\nabla}$, tenteremo quindi di fare qualche manipolazione matematica con quei termini. Il termine in derivata temporale però rimane

scomodo da manipolare, conviene metterlo da parte per il momento, per farlo anziché calcolarci la forza \vec{F} calcoliamo un'altra grandezza:

$$\vec{F} + \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \wedge \vec{B}) d\tau = \vec{f}$$

Dove \vec{f} per ora è una grandezza vettoriale che abbiamo matematicamente definito così che non sembra avere nessun significato fisico particolare, anche se tra poco vedremo essere molto interessante:

$$\vec{f} = \int_{\tau} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} + \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \wedge \vec{B} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \wedge \vec{D} \right] d\tau$$

Spezziamo in due integrali:

$$\vec{f} = \int_{\tau} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{D} \right] d\tau + \int_{\tau} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \wedge \vec{B} \right] d\tau \quad (9.12)$$

Matematicamente parlando i due integrali presentano integrandi che hanno esattamente la stessa forma. Limitiamoci per cui a studiare solo il primo dei due (l'altro avrà soluzione del tutto analoga). Proviamo a vedere che forma ha quello che abbiamo scritto, prendiamone la sola componente x del primo termine integrando.

Per farlo calcoliamo intanto $(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) E_x$:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) E_x = \varepsilon_0 E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

Ora studiamo il secondo termine:

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{D} = \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \wedge \vec{D}$$

Ora prendiamo del prodotto vettoriale la sola componente x :

$$\left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{D} \right]_x = \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) E_z - \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y$$

Uniamo i primi due termini insieme:

$$\varepsilon_0 E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) E_z - \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y \quad (9.13)$$

A questo punto interessiamoci a rimettere insieme tutti i termini che compaiono con la derivata in x :

$$\varepsilon_0 \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial x} E_y \right)$$

Ma notiamo che

$$\frac{\partial}{\partial x} (E_x^2) = 2E_x \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Da cui otteniamo

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) \quad (9.14)$$

Ora cerchiamo tutti i termini in cui compare la derivata rispetto a y in 9.13:

$$\varepsilon_0 \left(E_x \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Ma notiamo che:

$$\frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) = E_x \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

E otteniamo per la derivata in y :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) \quad (9.15)$$

Stessa cosa per la derivata in z :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \quad (9.16)$$

Abbiamo preso tutti i termini della 9.13 e la possiamo riscrivere in maniera molto più elegante:

$$\begin{aligned} & \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \vec{D} \right]_x = \\ & = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \end{aligned}$$

Analogamente anche le componenti y e z di questa quantità sono riconducibili a questa forma, questo termine assomiglia tanto ad una divergenza, posso per cui trasformare l'integrale di volume in un integrale di superficie! Rimaniamo a considerare il solo asse delle x , Tutto il papocchio nell'integrale sarà la divergenza di un vettore:

$$f_x = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_x d\tau$$

Dove T_x è questo vettore che siamo anche in grado di scrivere, trasformato in integrale di superficie otteniamo:

$$f_x = \int_S \vec{T}_x \cdot \hat{n} dS = \int_S (T_{xx} dS_x + T_{xy} dS_y + T_{xz} dS_z)$$

Dove dS_x dS_y dS_z sono gli elementi di superficie lungo l'asse x y e z rispettivamente, le altre sono le componenti del vettore T_x . Scriviamo T_x : La componente x (T_{xx}) è data dall'argomento che deriva la x , quindi l'espressione 9.14 (senza derivata)

$$T_{xxe} = \frac{1}{2}\varepsilon (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) = \varepsilon E_x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Dove $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$. Questa però è la sola componente elettrica, manca l'altro pezzo, dovuto al campo magnetico, la cui forma avevamo visto essere del tutto identica a quella del campo elettrico (9.12). La componente x risulta quindi definitivamente essere:

$$T_{xx} = \varepsilon E_x^2 + \frac{B_x^2}{\mu} - \frac{1}{2}\varepsilon E^2 - \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

$$T_{xx} = \varepsilon E_x^2 + \varepsilon v^2 B_x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon (E^2 + v^2 B^2)$$

Analogamente possiamo calcolare T_{xy} dalla 9.15:

$$T_{xye} = \varepsilon E_x E_y$$

Sarà presente una componente del tutto analoga a prima per il campo magnetico:

$$T_{xy} = \varepsilon E_x E_y + v^2 B_x B_y$$

E analogamente T_{xz} dalla 9.16:

$$T_{xz} = \varepsilon E_x E_z + v^2 B_x B_z$$

A questo punto ci accorgiamo che per gli altri vettori T_y e T_z le cose funzionano in maniera del tutto speculare a quanto avviene per la T_x . A questo punto ci fermiamo e notiamo la ricorsività della cosa, scriviamo la generica espressione della matrice T :

$$T_{ij} = \varepsilon E_i E_j + v^2 B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} (E^2 + v^2 B^2) \quad (9.17)$$

La matrice siffatta T è detto **tensore degli sforzi di Maxwell**.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \int_S \vec{T}_x \cdot \hat{n} dS \\ \int_S \vec{T}_y \cdot \hat{n} dS \\ \int_S \vec{T}_z \cdot \hat{n} dS \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

Dopo tutta questa fatica vi piacerà sapere che non siamo neanche a metà dimostrazione (scherzo, ci siamo quasi). Vi ricordo il nostro obiettivo, trovare l'impulso delle onde elettromagnetiche! Dirigiamoci finalmente nella direzione giusta, vi ricordate come avevamo definito \vec{f} ?

$$\vec{f} = \vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \vec{D} \wedge \vec{B} d\tau$$

Sfruttiamo la seconda legge di Newton, ossia che la somma delle forze che agiscono in un sistema isolato è pari alla variazione della quantità di moto:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Da cui scriviamo:

$$\vec{f} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{Q} + \int_{\tau} \vec{D} \wedge \vec{B} \right) \quad (9.19)$$

Ora un caso interessante è quello di confinare totalmente il campo magnetico completamente all'interno di un volume τ' contenuto in τ . Questa operazione è interessante perché consiste ad isolare il sistema anche per quel che riguarda le radiazioni elettromagnetiche. Questo implica che \vec{E} e \vec{B} sono nulli su tutta la superficie che ha per bordo τ . Che implica a sua volta, dalla relazione 9.17 che il tensore T ha tutte le componenti nulle.

Questo vuol dire ancora che \vec{f} è nullo (9.18), e quindi che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{Q} + \int_{\tau} \vec{D} \wedge \vec{B} \right) = 0$$

Quindi che la quantità sotto la derivata è costante.

$$\vec{Q} + \int_{\tau} \vec{D} \wedge \vec{B} d\tau = \text{cost}$$

Ma noi sappiamo dallo studio della meccanica che in un sistema isolato si conserva la quantità di moto totale del sistema. In questo caso Q non si conserva! Dunque il termine aggiuntivo che manca a Q per essere una quantità conservata deve esprimere una quantità di moto, che però non è associata alle cariche del sistema, ma direttamente al campo elettromagnetico!

Da quell'espressione risulta immediato introdurre il vettore \vec{g}

$$\vec{g} = \vec{D} \wedge \vec{B}$$

Che indica la quantità di moto trasportata dall'onda elettromagnetica nell'unità di volume!

Notiamo che ha una forma molto simile a quella del vettore di Poynting,

$$\vec{g} = \vec{D} \wedge \vec{B} = \mu\varepsilon \left(\vec{E} \wedge \vec{H} \right) = \frac{\vec{s}}{v^2}$$

Quindi il vettore di Poynting dà anche informazioni sulla quantità di moto che deve entrare in gioco.

9.8.2 Pressione elettromagnetica

Sfruttiamo il risultato ottenuto nel paragrafo precedente per calcolare la forza che la radiazione elettromagnetica esercita su una superficie.

L'impulso trasferito ad una superficie dS è pari alla radiazione contenuta in un volume di sezione dS e altezza vdt :

$$\frac{\vec{s}}{v^2} v dt dS = d\vec{I}$$

Con \vec{I} impulso, deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = d\vec{F} = \frac{\vec{s}}{v} dS$$

Da cui otteniamo l'espressione della pressione elettromagnetica:

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{|\vec{s}|}{v} \quad (9.20)$$

Queste considerazioni valgono per corpi che assorbono la radiazione chiaramente, poiché l'impulso associato alla radiazione deve essere assorbito dal corpo. Un oggetto trasparente invece non risentirà minimamente di questo impulso, mentre uno specchio avrà un effetto doppio, poiché oltre ad assorbire l'impulso, emette una radiazione con impulso opposto. Di fatto quindi la radiazione elettromagnetica si comporta proprio come una pallina che urta contro una superficie!

Possiamo usare un altro modo per calcolare la forza che viene esercitata su una superficie, attraverso il tensore degli sforzi. Alla luce delle nostre conoscenze siamo in grado di riconoscere nell'equazione 9.19 la derivata della quantità di moto totale del sistema. Togliamoci adesso dalla condizione di studiarla in sistemi isolati⁶, \vec{f} indica proprio la forza che agisce sulle superfici del volume τ !

In particolare quindi il vettore $T_{xx}dS_x$ è la forza che si esercita sulla superficie perpendicolare a x , mentre $T_{xy}dS_y$ e $T_{xz}dS_z$ rappresentano invece gli sforzi laterali diretti lungo l'asse delle x che però si esercitano sulle superfici a lui di taglio. Dunque mentre T_{xx} rappresenta la pressione che si esercita sulla superficie perpendicolare all'asse delle x (e analogamente T_{yy} e T_{zz}) Le componenti T_{xy} e T_{xz} (e tutte le altre) sono degli **sforzi di taglio**. Ecco da dove arriva il nome del tensore T .

Il tensore T ci dice l'impulso che il campo magnetico scambia con la superficie che lo circonda.

Studiamo ora un caso particolare, onde elettromagnetiche polarizzate linearmente. Notiamo subito dalla definizione 9.17 che tutti i termini fuori diagonale sono nulli, poiché E e B hanno una sola componente non nulla (e

⁶Per cui \vec{f} vale banalmente 0

nell'espressione appare sempre il prodotto di due componenti differenti, di cui una delle due è certamente nulla).

Supponiamo per semplicità che \vec{E} sia diretto lungo le y , \vec{B} lungo le z , calcoliamo i termini lungo diagonale di T , ricordando che per le onde piane vale che:

$$E = vB$$

$$\begin{cases} T_{xx} = -\frac{1}{2}\varepsilon (E^2 + v^2 B^2) = -\varepsilon E^2 \\ T_{yy} = \varepsilon E_y^2 - \frac{1}{2}\varepsilon (E_y^2 + v^2 B_z^2) = 0 \\ T_{zz} = \varepsilon v^2 B_z^2 - \frac{1}{2}\varepsilon (E_y^2 + v^2 B_z^2) = 0 \end{cases}$$

Da cui abbiamo ottenuto un risultato notevole, l'onda piana polarizzata linearmente ha la caratteristica di trasmettere impulso solo sull'asse di propagazione. Concedetemi un ultimo svolazzo matematico:

$$E = Bv$$

$$T_{xx} = -\varepsilon E^2 = -\varepsilon E B v = -\varepsilon \mu E H v = -\frac{EH}{v}$$

$$T_{xx} = -\frac{|\vec{s}|}{v}$$

Con grandissima eleganza abbiamo riottenuto esattamente lo stesso risultato dell'equazione 9.20. Il segno meno in questa relazione dipende ovviamente dal sistema di riferimento. Il tensore T infatti l'avevamo definito a partire dal vettore \vec{f} , che è la variazione della quantità di moto del sistema, ossia la forza che dall'*esterno* agisce sulle superfici del sistema. Mentre prima avevamo calcolato la forza che la radiazione elettromagnetica (che si trova all'interno) esercita sulle pareti. Per questo in un caso abbiamo ottenuto il segno positivo⁷, e nell'altro negativo.

⁷Per ottenere quel segno abbiamo usato il vettore \vec{g} definito attraverso il vettore di Poynting, questo vettore veniva direttamente dalla quantità di moto del sistema, che è una grandezza interna.

Capitolo 10

Relatività ristretta nell'elettromagnetismo

10.1 Potenziali ritardati nell'elettromagnetismo classico

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Queste equazioni abbiamo visto che definiscono il problema generale dell'elettromagnetismo nel vuoto. Esiste tuttavia una forma ancor più elegante per scriverle, la cui utilità sarà chiara in seguito.

Ricordate che sia per il campo elettrico che per quello magnetico avevamo scritto due potenziali? Che succede se proviamo a riscrivere le equazioni di Maxwell per i potenziali?

Notiamo subito un problema, il potenziale scalare del campo elettrico l'avevamo definito in elettrostatica a partire dalla supposizione (allora fondata) che \vec{E} fosse conservativo, e che quindi risultasse:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

Abbiamo visto però che in elettrodinamica non stazionaria questa condizione decade per dar luogo alla terza equazione di Maxwell. Come facciamo in queste condizioni a definire un potenziale scalare per \vec{E} ?

Per \vec{B} invece non c'è alcun problema, in quanto la seconda equazione di Maxwell continua a garantirci la sua solenoidità. Ricordiamo come è definito il potenziale vettore \vec{A} :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Ora sostituiamo questa nella terza equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

Possiamo invertire la derivazione (tempo e spazio sono indipendenti)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Che bella quest'ultima equazione! Abbiamo trovato un vettore irrotazionale, e quindi conservativo! Per cui invece di definire un potenziale per \vec{E} definiamo un potenziale ϕ per questa quantità:

$$-\vec{\nabla} \phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Da notare che il nostro potenziale ϕ collassa nel potenziale V nel caso in cui \vec{A} non varia nel tempo, che è proprio la condizione di stazionarietà con la quale avevamo definito V !

Ora abbiamo due equazioni ai potenziali:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B} \quad -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

In queste equazioni non compaiono informazioni sulle sorgenti (infatti per ricavarle abbiamo usato la seconda e la terza equazione di Maxwell). Passiamo ora alla quarta equazione, riscrivendola in funzione di questi potenziali:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} &= \mu_0 \vec{J} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Abbiamo in questa equazione due gradienti, accoppiamoli tra loro, inoltre compare sia il laplaciano che la derivata seconda temporale del vettore \vec{A} , vediamo se riusciamo a scriverlo sotto forma del d'Alambertiano.

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \vec{J} = \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Il termine a sinistra è proprio il d'alambertiano!

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \vec{J} = \square \vec{A} \quad (10.1)$$

Il termine più a sinistra ci infastidisce parecchio, ci piacerebbe eliminarlo. Per farlo ricordiamoci che i potenziali sono definiti a meno di costanti! In particolare il potenziale vettore è definito a meno di un campo gradiente, poiché il rotore di un campo gradiente è sempre nullo:

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} u \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B} \end{aligned}$$

Quando abbiamo studiato il magnetismo avevamo scelto questo campo gradiente per nostra comodità, in questo caso conviene cambiare scelta. Nulla ce lo impedisce poiché abbiamo ridefinito i potenziali proprio adesso, per cui non abbiamo ancora fissato nessuna scelta particolare del campo gradiente.

In particolare se scegliessimo la funzione u in maniera tale che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (10.2)$$

L'equazione 10.1 diventa:

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Che eleganza ragazzi!

Questa particolare scelta fatta per \vec{A}' ha bloccato il potenziale vettore, ora non possiamo più cambiarla. In questa convenzione si dice che ci troviamo nella **gauge di Lorentz**, dove la parola *calibrare*¹ sta ad indicare il fatto che abbiamo fissato \vec{A} in modo che vale la 10.2.

Manca da manipolare solo la prima equazione di Maxwell ora. Mettiamoci all'opera:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

La divergenza del gradiente è il laplaciano, riscriviamola quindi:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Li c'è una divergenza di \vec{A} , ci troviamo ancora nella **gauge di Lorentz** per cui vale la 10.2:

$$-\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

¹Gauge = calibrare.

Ma è ricomparso anche qui il d'alambertiano!

$$\square\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Abbiamo riottenuto le due equazioni generali ai potenziali elettromagnetici dell'elettromagnetismo!

$$\square\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \quad \square\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (10.3)$$

Notiamo che in statica queste equazioni si riconducono alla equazione di Poisson:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Di cui sappiamo già la soluzione:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

Valutiamo l'omogenea associata alla 10.3:

$$\square\phi = 0$$

Di cui sappiamo benissimo la soluzione per sorgenti puniformi:

$$f(r, t) = \frac{\chi(r \mp ct)}{r} \quad (10.4)$$

Ora se osserviamo la soluzione del caso stazionario si vede che essa ha proprio una forma simile alla 10.4. La soluzione generale si può dimostrare² essere del tipo:

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(r', t - \frac{\Delta r}{c})}{\Delta r} d\tau$$

E analogamente per \vec{A}

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}(r', t - \frac{\Delta r}{c})}{\Delta r} d\tau$$

Questa soluzione prende il nome di soluzione ai **potenziali ritardati** poiché l'effetto del potenziale di una carica in un punto arriva con un ritardo pari a $\frac{\Delta r}{c}$. In linea di principio matematicamente esiste anche una soluzione analoga col + al posto del - nell'argomento delle sorgenti. Tuttavia questa soluzione è di per se assurda, poiché implicherebbe che il potenziale in un punto risentisse della posizione in cui si trova una carica nel futuro!

Questo risultato a cui siamo arrivati solo con equazioni classiche è un primo passo verso la teoria della relatività ristretta che ci accingiamo ad affrontare.

²Noi non lo faremo

10.1.1 Antenna emittente a dipolo oscillante

Affrontiamo ora una prima applicazione pratica dei potenziali ritardati. L'apparecchio che andiamo ad analizzare è un emittente in onde radio. Per creare questo dipolo si usa un condensatore ad armatura sferiche, la cui differenza di potenziale viene pilotata nel tempo con un generatore di tensione variabile.

L'esempio circuitale di questo sistema è dato dalla Figura 10.1

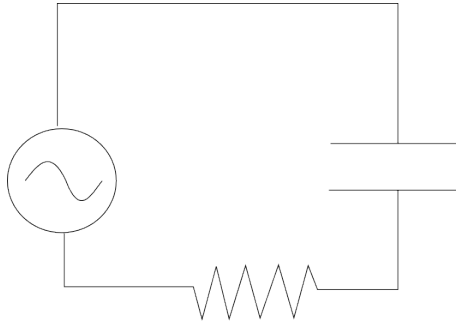


Figura 10.1: Circuito in cui un condensatore sferico si comporta come dipolo oscillante per emettere onde radio.

La carica che si deposita sulle armature del condensatore è data dall'espressione:

$$q(t) = \int i(t)dt = \int i_0 \cos \omega t dt$$
$$q(t) = \frac{i_0}{\omega} \sin \omega t$$

Posso pensare che il condensatore sia dato da due cariche (le due armature) che costituiscono un dipolo elettrico (infatti il condensatore è in induzione completa, cioè la carica tra le due armature è sempre la stessa).

Il momento di dipolo del nostro condensatore è dato da

$$\vec{p} = q\delta \hat{k} = \left(\frac{\delta i_0}{\omega} \sin \omega t \right) \hat{k}$$

Se consideriamo il nostro dipolo orientato lungo l'asse delle z . Ricordiamo che stiamo trattando il circuito in regime quasistazionario, ossia in cui i cambiamenti di tensione avvengono contemporaneamente in tutto il circuito. Perché ciò sia vero la velocità con cui cambia il segnale deve essere molto minore della velocità della luce nel rame, altrimenti l'impulso del generatore non fa in tempo a propagarsi su tutto il circuito e ci sono effetti di ritardo sul segnale difficili da considerare.

Questa condizione si risolve dicendo che il tempo che impiega la luce a viaggiare tra le due armature deve essere molto minore del periodo della

radiazione che vogliamo emettere con il nostro dipolo oscillante, ossia:

$$\frac{\delta}{c} \ll T = \frac{\lambda}{c}$$

$$\delta \ll \lambda$$

Questo vuol dire che la lunghezza d'onda emessa deve essere molto maggiore della distanza tra le armature. Poiché è difficile costruire condensatori troppo piccoli le onde emesse devono avere lunghezze d'onda molto grandi. Quindi questo sistema è idoneo a generare solo le onde radio.

Ora ricordiamo l'equazione del potenziale magnetico:

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

La cui soluzione è:

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\delta} \frac{\vec{J}(r, t - \frac{\Delta r}{c})}{\Delta r} d\tau$$

Ma l'unico punto in cui passa corrente è tra le armature del condensatore:

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\delta} \frac{i}{r} dz = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\delta} \frac{i_0 \cos \omega(t - \frac{r}{c})}{r} dz = \frac{\mu_0 i_0 \delta}{4\pi} \frac{\cos \omega(t - \frac{r}{c})}{r} \hat{k}$$

Notiamo che:

$$\dot{\vec{p}}(t) = \delta i_0 \cos(\omega t) \hat{k}$$

Possiamo sostituirla nell'espressione di \vec{A} :

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r}$$

Vogliamo a questo punto ottenere un'equazione anche per il potenziale scalare ϕ . Per farlo utilizziamo la condizione della gauge di Lorentz 10.2:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Calcoliamo la divergenza di \vec{A} . Ma abbiamo visto che \vec{A} ha la sola componente lungo z

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}$$

Ora $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \cdot (-\frac{1}{c}) - \dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r^2} \cdot \frac{z}{r}$$

Da cui:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{cr} + \frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r^2} \right] \frac{z}{r}$$

Da cui integrando nel tempo:

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{rc} + \frac{p(t - \frac{r}{c})}{r^2} \right] \frac{z}{r}$$

Abbiamo trovato l'espressione sia del potenziale del campo elettrico, sia di quello del campo magnetico. Abbiamo di fatto risolto il problema. Da adesso in poi si tratta semplicemente di fare dei calcoli concettualmente semplici ma laboriosi.

È conveniente passare in coordinate sferiche. Partiamo dal potenziale vettore. Abbiamo detto che ha solo componente lungo \hat{k} (asse delle z). Si può facilmente capire come scriverlo in coordinate polari dalla Figura 10.2.

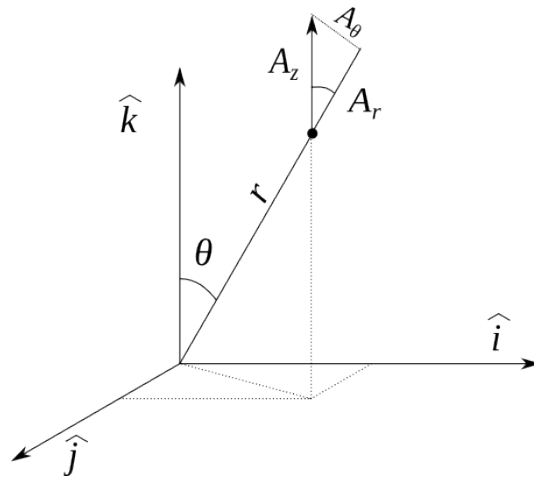


Figura 10.2: Il potenziale vettore ha una sola componente lungo l'asse delle z . Possiamo quindi scriverla facilmente scomponendolo in una parte radiale e una lungo l'angolo θ .

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu_0 \dot{p}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = -\frac{\mu_0 \dot{p}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} \sin \theta$$

Dove il segno negativo dipende dal fatto che A_z è rivolto verso l'alto, cioè verso la direzione che fa *diminuire* l'angolo θ .

$$A_\varphi = 0$$

Se notiamo che il rapporto $\frac{z}{r}$ che moltiplica alla fine il potenziale scalare ϕ è proprio il coseno dell'angolo θ possiamo scrivere anche lui in coordinate sferiche.

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{rc} + \frac{p(t - \frac{r}{c})}{r^2} \right] \cos \theta$$

Ora procediamo con i calcoli più lunghi e tediosi. Ricaviamo il campo magnetico

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Dobbiamo fare il rotore in coordinate sferiche (formula 1.5). A occhio vediamo che le componenti del rotore lungo r e lungo θ sono nulle, perché la componente di \vec{B} su φ è nulla e perché le altre due non dipendono da φ (quindi le derivate incrociate sono nulle entrambi). Si salva solo il termine in φ :

$$\vec{B} = \hat{\varphi} B_\varphi$$

$$B_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \left[\frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{c} + \frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \right]$$

Lo stesso discorso lo si applica al calcolo del gradiente del campo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Poiché ϕ non ha nella sua espressione dipendenza da φ e \vec{A} ha componente ϕ costantemente nulla, anche \vec{E} non ha componente lungo φ . Applicando il gradiente in coordinate polari (1.4) otteniamo anche l'espressione per il campo elettrico:

$$E_r = \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{c} + \frac{p(t - \frac{r}{c})}{r} \right]$$

$$E_\theta = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{c^2} + \frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{cr} + \frac{p(t - \frac{r}{c})}{r^2} \right]$$

$$E_\varphi = 0$$

Ansitutto notiamo subito che \vec{E} e \vec{B} sono tra loro ortogonali. Tutte le componenti si attenuano all'aumentare della distanza. Si vede che valgono le seguenti proporzionalità:

$$B \propto \frac{\ddot{p}}{r} + \frac{\dot{p}}{r^2}$$

$$E_r \propto \frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{p}{r^3}$$

$$E_{\theta} \propto \frac{\ddot{p}}{r} + \frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{p}{r^3}$$

A grande distanza predomina il termine in \ddot{p} mentre gli altri diventano trascurabili. In prossimità della sorgente invece i termini dominanti sono quelli in p e \dot{p} . Quindi possono essere distinte due zone, una più vicina all'apparecchio emittente, e una più lontana. Se andiamo a studiare qual è la formula per il vettore di Poynting possiamo studiare come si propagano le onde.

La media temporale del vettore di Poynting si ottiene³:

$$\vec{s} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \propto \frac{\omega^4 p^2 \sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

Questo ci fa capire come in realtà non ci troviamo di fronte ad un'onda sferica ma ad un'onda differenziale. La cui forma qualitativa è riportata in Figura 10.3

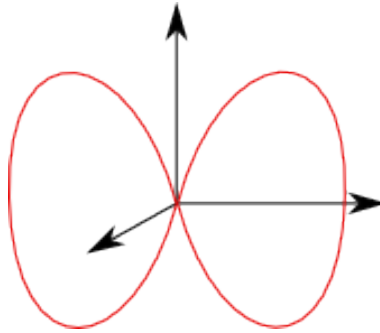


Figura 10.3: Schema del fronte d'onda emesso dall'antenna dipolare.

Come si vede non c'è emissione sull'asse delle z del dipolo, questo spiega perché i cellulari non prendono sotto le antenne trasmettenti!

Un altro effetto interessante riguarda l'interazione che la luce ha con le molecole dell'atmosfera, queste infatti possono essere pensate come dipoli oscillanti. La emissione che hanno però va come ω^4 per cui pur assorbendo luce visibile in tutto lo spettro (bianca) la riemettono a frequenze più alte. Ecco perché il cielo si presenta blu ai nostri occhi!

10.2 Trasformazioni di Lorentz

Abbiamo visto come la teoria dell'elettromagnetismo prevede, attraverso i potenziali ritardati, che l'effetto della presenza di una carica viene risentito in un punto solo dopo un tempo t pari al tempo che impiega la luce a

³I calcoli sono molto lunghi, e richiedono di semplificare i termini in $p\dot{p}$ che hanno media temporale nulla.

raggiungere quel punto. Si può mostrare che le equazioni di Maxwell, in particolare nella forma:

$$\begin{aligned}\square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \square \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Non sono invarianti alle trasformazioni di sistema di riferimento di Galileo. Questo significa che c'è un contrasto molto forte tra le equazioni di Maxwell e la meccanica classica. Per risolvere questo contrasto alla fine dell'ottocento il fisico Lorentz propose delle trasformazioni lineari alternative a quelle di Galileo, che però avessero come limite nelle velocità ordinarie proprio le trasformazioni di Galileo.

Le trasformazioni proposte da Lorentz hanno il grande vantaggio di mantenere invarianti le equazioni di Maxwell⁴

Riportiamo in seguito le equazioni di Lorentz, che abbiamo ricavato esplicitamente nel primo volume di questi appunti (nel corso di Meccanica).

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c}z\right) \end{array} \right. \quad (10.5)$$

Dove il parametro γ è definito in questo modo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.6)$$

Due effetti particolari che si ottengono considerando le trasformazioni di Lorentz sono i fenomeni della **contrazione delle lunghezze** e **dilatazione dei tempi**. Entrambi questi effetti sono dovuti alla caratteristica delle trasformazioni di Lorentz di non mantenere sincronizzati i tempi dei due sistemi di riferimento.

Vediamo subito l'esperimento virtuale per comprendere il fenomeno della contrazione delle lunghezze.

Ho una sbarra che si muove con velocità v . Supponiamo di avere due sistemi di riferimento, uno del laboratorio (R), e uno che si muove solidale con la sbarra (R').

Nel sistema solidale alla sbarra R' misuro la lunghezza:

$$l = z'_1 - z'_2 = \Delta z'$$

Applico le trasformazioni di Lorentz:

$$z'_1 = \gamma(z_1 - vt)$$

⁴Fu Einstein con la teoria della relatività ristretta che suppose le trasformazioni di Lorentz vere assiomaticamente, e segnò la fine della Meccanica classica.

$$z'_2 = \gamma(z_2 - vt)$$

$$\Delta z' = \gamma \Delta z$$

La lunghezza della sbarra misurata in R risulta quindi:

$$\Delta z = \frac{l}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l$$

Cioè è più piccola! Vediamo ora il fenomeno della dilatazione dei tempi.

Posizione nel sistema di riferimento R' un orologio che si muove con velocità v nell'origine. In R' misuro un intervallo di tempo

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2$$

A questo punto faccio la trasformazione di Lorentz inversa:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} z' \right) = \gamma \Delta t'$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ecco spiegato il fenomeno della dilatazione dei tempi.

10.2.1 Invarianti nello spazio-tempo

Le trasformazioni di Lorentz offrono un legame stretto tra spazio e tempo, le due grandezze non sono più scorrelate tra loro. Per questo risulta comodo definire vettori nello spazio-tempo.

Si osserva facilmente che in questo spazio esiste una grandezza conservata: c

La velocità della luce infatti è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale. A questa si aggiungono altre grandezze che non variano al cambio di sistemi di riferimento. Uno di questi è la metrica di Minkowsky. Se definisco come norma di un vettore la grandezza:

$$||\vec{v}'|| = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Scopro facilmente che anche questo è un invariante relativistico. Troviamo in un altro invariante relativistico. Proviamo a calcolare l'elemento di volume infinitesimo $d\tau$ in questo modo:

$$d\tau = dx dy dz c dt$$

Abbiamo visto che le lunghezze si contraggono di un fattore γ , mentre i tempi si dilatano del fattore inverso. Quindi anche questo è un invariante relativistico. Infatti applicando le trasformazioni di Lorentz otteniamo:

$$d\tau' = dx' dy' \gamma dz' \frac{1}{\gamma} c dt' = dx dy dz c dt = d\tau \quad (10.7)$$

Definita la norma del vettore, possiamo associare un prodotto scalare a questa norma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - c^2 a_t b_t$$

Si osserva che anche questo prodotto scalare è invariante alle trasformazioni di Lorentz.

10.2.2 Notazione covariante e controvariante

Introduciamo rapidamente una notazione molto funzionale per i calcoli. Se indichiamo con i pedici e gli apici le componenti di un vettore, possiamo scriverle in questi due modi:

$$x = x^1 \quad y = x^2 \quad z = x^3 \quad ct = x^4$$

Questa è detta notazione **controvariante**, con questo simbolismo le trasformazioni di Lorentz diventano:

$$\begin{cases} x^{1'} = x^1 \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = \gamma (x^3 - \beta x^4) \\ x^{4'} = \gamma (x^4 - \beta x^3) \end{cases}$$

Che ha l'eleganza di avere le ultime due equazioni totalmente simmetriche.

Possiamo anche introdurre una notazione leggermente differente:

$$x = x_1 \quad y = x_2 \quad z = x_3 \quad -ct = x_4$$

Quest'altra notazione (con pedici) è detta **covariante**. L'unica differenza è nell'ultima componente che è opposta. Il vantaggio di queste due notazioni è la velocità di scrivere la norma di un vettore:

$$||\vec{x}|| = \sum_{i=1}^4 x_i x^i$$

Questa notazione è spesso abbreviata elidendo completamente il simbolo di sommatoria, e si scrive più semplicemente così:

$$||\vec{x}|| = x_i x^i$$

Lo stesso concetto vale per i prodotti scalari:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b^i$$

10.3 Effetto Doppler relativistico

Abbiamo visto nel corso di meccanica che per le onde sonore sussiste il cosiddetto effetto doppler, ossia che un osservatore in moto rispetto alla sorgente rileva l'onda ad una frequenza differente da quella emessa, in relazione alla velocità con cui viaggia. Possiamo chiederci se l'effetto Doppler sussiste anche per le onde elettromagnetiche. Per le onde elettromagnetiche dobbiamo studiare l'effetto relativistico.

Supponiamo di avere una sorgente in quiete che emette onde elettromagnetiche. Nel nostro sistema R' in moto con velocità v rispetto ad R continuiamo a percepire le onde elettromagnetiche e i suoi fronti d'onda non vengono distorti (la velocità dell'onda è la stessa in tutti i sistemi di riferimento).

Vediamo bene lo schema in Figura 10.4

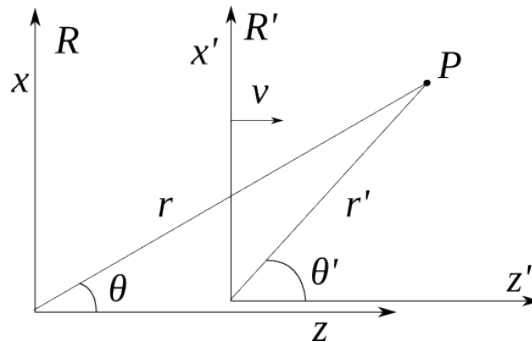


Figura 10.4: Schema dei due sistemi di riferimento R ed R' . Il punto P visto dai due sistemi di riferimento.

L'onda che osserva un osservatore solidale alla sorgente (in R) è

$$\frac{A}{r} e^{j\omega_0(t - \frac{r}{c})}$$

Anche l'osservatore su R' osserverà l'onda nelle variabili primare:

$$\frac{A}{r'} e^{j\omega(t' - \frac{r'}{c})}$$

Il nostro obiettivo è trovare la relazione che corre tra ω_0 e ω . Notiamo sempre dalla Figura 10.4 che possiamo scrivere il raggio usando le coordinate z e x e l'angolo θ :

$$r = z \cos \theta + x \sin \theta$$

Analogamente la coordinata primata vale:

$$r' = z' \cos \theta' + x' \sin \theta'$$

Uguagliamo ora gli argomenti delle due onde:

$$\omega_0 \left(t - \frac{r}{c} \right) = \omega \left(t' - \frac{r'}{c} \right)$$

$$\omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \cos \theta - \frac{x}{c} \sin \theta \right) = \omega \left(t' - \frac{z'}{c} \cos \theta' - \frac{x'}{c} \sin \theta' \right)$$

Ma per le trasformazioni di Lorentz:

$$x' = x \quad z' = \gamma(z - vt) \quad t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right)$$

$$\omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \cos \theta - \frac{x}{c} \sin \theta \right) = \omega \left(\gamma t - \gamma \frac{v}{c^2} z - \frac{\gamma}{c} (z - vt) \cos \theta' - \frac{x}{c} \sin \theta' \right)$$

Poiché questa formula deve essere vera per ogni valore di t , z e x devono essere uguali tra loro i coefficienti di tali valori. Otteniamo un sistema a tre equazioni:

$$\begin{cases} \omega_0 = \gamma \omega \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right) \\ \frac{\cos \theta}{c} \omega_0 = \omega \gamma \left(\frac{v}{c^2} - \frac{\cos \theta'}{c} \right) \\ \omega_0 \sin \theta = \omega \sin \theta' \end{cases}$$

Da cui sostituendo la prima nelle altre, e sfruttando il parametro γ (10.6) ottengo:

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'} \\ \sin \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'} \end{cases}$$

Mettiamo in evidenza un effetto che classicamente non può essere descritto dall'effetto Doppler: l'effetto Doppler trasverso.

Mettiamo un oggetto che emette ma si muove con direzione trasversa all'osservatore⁵

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \cos \theta = 0 \quad \cos \theta' = -\frac{v}{c}$$

⁵ad esempio traccia delle circonferenze attorno a lui

Calcoliamo la frequenza:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Questo effetto è tipico del caso relativistico. Osserviamo l'effetto Doppler longitudinale:

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad \cos \theta &= 1 \\ \cos \theta' \left(1 - \frac{v}{c}\right) &= \frac{v}{c} - 1 \\ \cos \theta' &= -\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = -1 \\ \nu &= \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = \nu_0 \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)}}{1 - \frac{v}{c}} \\ \nu &= \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \end{aligned}$$

Il termine di *shift* sulle lunghezze d'onda causato dall'effetto Doppler viene indicato con la lettera Z :

$$Z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$$

10.4 Quadrivettori

Introdotta lo spazio metrico di Minkovsky possiamo ripercorrere tutta la meccanica e ridefinire nuovamente tutto in funzione delle nuove trasformazioni studiate.

Limitiamoci alle definizioni più importanti che riguardano strettamente anche l'elettromagnetismo.

Proviamo a descrivere il moto di un punto materiale nello spazio di Minkovsky. Possiamo definire la distanza che percorre in tempo dt molto piccolo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Nel sistema di riferimento in cui il punto materiale è in quiete, non avremo variazioni spaziali, ma solo quella temporale:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

dove con τ stiamo indicando il tempo proprio della particella. Vediamo dall'ultima relazione che abbiamo scelto che siccome ds^2 è invariante, c è invariante, deve essere invariante anche il tempo proprio della particella!

Possiamo quindi definire una **quadrivelocità** come la derivata dello spazio sul tempo proprio:

$$\vec{U} = \frac{ds}{d\tau}$$

Questo vettore si trasforma con le regole delle trasformazioni di Lorentz nello spazio di Minkovsky. In particolare

$$\vec{U}_x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma v_x$$

Analogo risultato otteniamo per le altre componenti spaziali del vettore \vec{U} . La quarta componente ha un comportamento più interessante:

$$U_4 = c \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^4}{d\tau} = \gamma c$$

Abbiamo definito il quadrivettore velocità:

$$\vec{U} = (\vec{v}\gamma; \gamma c)$$

A partire dalla velocità possiamo definire, proprio come avevamo fatto nei corsi di meccanica un **quadrimpulso**.

$$\vec{P} = m_0 \vec{U} = (m_0 \vec{v}\gamma; \gamma c m_0)$$

Dove la quantità m_0 deve essere un invariante relativistico, ed è la massa a riposo dell'oggetto. Al solito andiamo a vedere cosa diventa la quarta componente del quadrimpulso:

$$p^4 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Facciamo il limite per basse velocità:

$$p^4 = m_0 c \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

$$p^4 = \frac{1}{c} \left(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \right)$$

Vediamo che l'argomento tra parentesi ci ricorda tanto l'energia cinetica! Quel termine infatti risulta essere l'energia della particella!

$$\mathcal{E} \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

Da ui la quarta componente del quadrimpulso è relazionata con l'energia del punto materiale:

$$p^4 = \gamma cm = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

Calcoliamo la norma del quadrimpulso:

$$\begin{aligned} \|\vec{P}\|^2 &= p_k p^k = \gamma^2 m^2 v^2 - \gamma^2 m^2 c^2 = m^2 c^2 \gamma^2 (\beta^2 - 1) \\ p_k p^k &= m^2 c^2 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che anche m è una quantità invariante, poiché sia $p_k p^k$ che c lo sono.

Costruiamo la **quadriforza**.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{P}}{d\tau} \\ F^\alpha &= \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\alpha}{dt} \end{aligned}$$

Ancora una volta le tre componenti spaziali sono banalmente la forza che conoscevamo prima, interessante è la quarta componente.

$$F^4 = \gamma \frac{dp^4}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{E}}{c} \right) = \frac{\gamma}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

Ma la derivata dell'energia rappresenta la potenza, che a sua volta può essere scritta come prodotto scalare tra forza e velocità

$$F^4 = \gamma \left(\vec{f} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right)$$

Dove \vec{f} è il vettore della forza tridimensionale che già conosciamo.

10.4.1 Geometria tensoriale

Definiamo l'operatore differenziale che abbiamo usato per eccellenza in questo corso anche nel quadrispazio:

$$\vec{\nabla}^k = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (10.8)$$

Questo operatore non è invariante nello spazio di Minkovsky. Proviamo a costruire il **laplaciano**. Per farlo dobbiamo calcolare il prodotto scalare di $\vec{\nabla}$ con se stesso. Risulta immediato capire che il laplaciano nello spazio di Minkovsky è un invariante, poiché è dato dalla norma del quadrioperatore $\vec{\nabla}$.

$$\nabla^2 = \nabla^k \nabla_k$$

Dobbiamo capire come vanno fatte le derivate delle funzioni covarianti e controvarianti.

Ora sia ϕ una funzione scalare il cui gradiente sia un invariante. La quantità

$$\frac{d\phi}{ds}$$

Rimane un invariante, poiché sia $d\phi$ che ds sono invarianti. Ora facciamo la derivata della funzione composta rispetto al vettore controvariante x :

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial s}$$

(Dov abbiamo ommesso la somma su k) Poiché la quantità a sinistra dell'uguale è invariante, deve esserlo pure quella alla destra. Ma la quantità a destra è un prodotto scalare, quindi i due termini che si moltiplicano devono essere in rappresentazione covariante e contro variante.

Ma il termine

$$\frac{\partial x^k}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} x^k$$

È chiaramente controvariante, da cui segue che la derivata

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^k}$$

è covariante. Abbiamo ottenuto il risultato importantissimo di vedere come le derivate invertono il tipo di coordinate. L'operatore ∇^k è dunque un operatore covariante, mentre ∇_k è un operatore controvariante.

Proviamo il calcolo della divergenza del vettore A :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_t}{\partial t} = \nabla_k A_k$$

Scriviamo ora l'operatore laplaciano:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^k \nabla_k = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$$

Il risultato che abbiamo appena ottenuto è formidabile, laplaciano e d'alambertiano sono la stessa cosa nello spazio di Minkovsky, sono quindi tutti e due **invarianti** alle trasformazioni di Lorentz.

Teniamo a mente questo risultato, ci ritorneremo tra pochissimo.

Trasformazioni tensoriali

È arrivato il momento di cercare di capire come si trasformano i tensori nel passaggio tra un sistema di riferimento ad un altro. La questione è molto semplice se dobbiamo trattare tensori simmetrici o antisimmetrici⁶. È possibile scrivere tutti i numeri di una matrice simmetrica (o antisimmetrica)

⁶Questo tipo di tensore sono più interessanti in fisica.

come combinazione di due vettori differenti, dato il tensore F con indici i e k , il suo generico elemento sarà dato dal prodotto delle grandezze:

$$F_{ik} = A_i \cdot B_k$$

Dove i due quadrivettori \vec{A} e \vec{B} definiscono l'intero tensore. Con questa rappresentazione del tensore risulta immediato capire come si trasformano i tensori, infatti l'unica cosa da fare è quella di trasformare singolarmente i due quadrivettori \vec{A} e \vec{B} e poi ricomporre il nuovo tensore con i vettori trasformati.

Vediamo ora il calcolo esplicito per un tensore di particolare interesse, quello antisimmetrico.

Le prime due componenti sia di \vec{A} che di \vec{B} rimangono invariate nelle trasformazioni di Lorentz, Per cui risulta:

$$A'_1 = A_1 \quad B'_1 = B_1 \quad A'_2 = A_2 \quad B'_2 = B_2$$

$$A'_1 B'_2 = A_1 B_2$$

$$F'_{11} = F_{11} \quad F'_{12} = F_{12} \quad F'_{21} = F_{21}$$

Ora andiamo a vedere le componenti che cambiano:

$$F'_{13} = A'_1 B'_3 \implies A_1 \gamma (B_3 - \beta B_4) = \gamma (A_1 B_3 - \beta A_1 B_4)$$

$$F'_{13} = \gamma (F_{13} - \beta F_{14})$$

Con questo procedimento possiamo ricavare tutte le trasformazioni:

$$\begin{aligned} t^{12'} &= t^{12} & t^{13'} &= \gamma (t^{13} - \beta t^{14}) \\ t^{14'} &= \gamma (t^{14} - \beta t^{13}) & t^{23'} &= \gamma (t^{23} - \beta t^{24}) \\ t^{24'} &= \gamma (t^{24} - \beta t^{23}) & t^{34'} &= t^{34} \end{aligned} \quad (10.9)$$

Analogamente è possibile ricavare le trasformazioni del tensore simmetrico. Saranno banalmente identiche fatta eccezione per gli ultimi elementi sulla diagonale che riportiamo:

$$\begin{aligned} t^{12'} &= t^{12} & t^{13'} &= \gamma (t^{13} - \beta t^{14}) \\ t^{14'} &= \gamma (t^{14} - \beta t^{13}) & t^{23'} &= \gamma (t^{23} - \beta t^{24}) \\ t^{24'} &= \gamma (t^{24} - \beta t^{23}) & t^{34'} &= \gamma^2 [t^{34} (1 - \beta^2) - \beta t^{33} - \beta t^{44}] \\ t^{33'} &= \gamma^2 (t^{33} - 2\beta t^{34} - \beta^2 t^{44}) & t^{44'} &= \gamma^2 (t^{44} - 2\beta t^{34} + \beta^2 t^{33}) \end{aligned} \quad (10.10)$$

10.5 Equazione generale dell'elettromagnetismo

Abbiamo trovato che le equazioni di Maxwell possono essere ridotte ad una forma molto semplice:

$$\begin{aligned}\square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \square \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

La grande caratteristica che hanno le equazioni in questa forma è quella di presentare il d'Alembertiano! Ma abbiamo visto prima che l'operatore di d'Alembert è invariante a trasformazioni relativistiche, questo implica che le equazioni di Maxwell rimangono costanti nel sistema di riferimento in cui ci spostiamo!! In realtà questo sembra essere un controsenso: Il vettore \vec{J} indica una corrente, cioè una grandezza che dipende dal moto delle cariche. Se noi cambiamo sistema di riferimento, è naturale pensare che \vec{J} cambi, ma abbiamo detto che $\square \vec{A}$ è invariante... cosa succede?

Possiamo provare ad intuire la soluzione. Prendiamo una carica ferma nel sistema del laboratorio, e mettiamoci in un sistema di riferimento in moto rispetto alla carica. Automaticamente in quel sistema di riferimento vedremo una corrente \vec{J} non una carica. Facciamo ora il discorso inverso. Supponiamo di osservare una corrente \vec{J} in laboratorio, e immaginiamo di posizionarci in un sistema di riferimento solidale con la corrente. Guardando la corrente da questo sistema vedremo solo cariche ρ ferme.

Quindi correnti e cariche sono concetti strettamente legati tra loro, forse possiamo introdurre una nuova grandezza, invariante relativistico, che contenga all'interno informazioni su cariche e corrente. Come possiamo fare? Definendo un nuovo quadrivettore!

Definizione 10.1 (Quadricarica) *Definisco il quadrivettore **quadricarica** come quel vettore nello spazio tempo che contiene al suo interno tutte le informazioni sulle cariche elettriche che provengono da cariche e da correnti.*

$$\vec{Q} = \left(\frac{\vec{J}}{c}; \rho \right)$$

La definizione che abbiamo dato non è sufficiente a definire di per se un quadrivettore, dobbiamo mostrare che effettivamente questo si trasforma seguendo le trasformazioni di Lorentz. Facciamo quindi qualche considerazione sull'ultima componente della quadricarica.

Il differenziale di carica associato all'ultimo elemento è pari a:

$$dq = \rho d\tau$$

Dove $d\tau$ è l'elemento infinitesimo di volume.

$$dq = \rho dx dy dz \tag{10.11}$$

Per il principio di conservazione delle cariche dq è un invariante, ossia la carica è la stessa in ogni sistema di riferimento. Quindi anche la grandezza a destra è invariante. Ma abbiamo mostrato nell'equazione 10.7 che anche la quantità:

$$d\tau^k = dx dy dz c dt$$

È invariante. Unendo le 10.7 e 10.11 otteniamo che la quantità

$$\rho$$

si comporta proprio come la componente temporale di un quadrivettore, seguendo le regole per le trasformazioni di Lorentz dei vettori controvarianti!

$$dq = \frac{\rho}{cdt} dx dy dz c dt = \frac{\rho}{cdt} d\tau'$$

La grandezza $\frac{\rho}{cdt}$ è a sua volta invariante.

Riscriviamo le equazioni di Maxwell in forma ridotta:

$$\square \left(\frac{\vec{A}}{c} \right) = -\mu_0 \left(\frac{\vec{J}}{c} \right)$$

$$\square \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Devo riuscire a sistemare dimensionalmente l'equazione, moltiplico per c^2 la prima:

$$c^2 \square \left(\frac{\vec{A}}{c} \right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{J}}{c} \right)$$

$$\square (c\vec{A}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{J}}{c} \right)$$

$$\square \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

Ora diamo la definizione di un altro quadrivettore:

Definizione 10.2 (Quadripotenziale) *Definiamo il quadrivettore **quadripotenziale** in questo modo:*

$$\phi^k = (c\vec{A}, \phi)$$

Con questa definizione siamo in grado di riassumere tutte le equazioni di Maxwell in un'unica equazione elegantissima:

$$\square \phi^k = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q^k \tag{10.12}$$

L'eleganza di questa equazione non è tanto di racchiudere al suo interno tutto l'elettromagnetismo⁷, ma quella di essere invariante alle trasformazioni di Lorentz.

Poiché il d'alambertiano è un invariante relativistico, lo deve essere anche la quadricarica! Questo implica che correnti e cariche sono del tutto complementari tra loro, e gli effetti che generano in campi elettrici e magnetici sono gli stessi in tutti i sistemi di riferimento! Questa equazione ci dice che campi elettrici e magnetici sono di fatto due punti di vista di versi per vedere la stessa cosa! Abbiamo appena risolto il paradosso che avevamo visto all'inizio del capitolo 6.

10.6 Tensore elettromagnetico

Abbiamo concluso ormai la teoria dell'elettromagnetismo, possiamo ancora fare qualche passo formale per guadagnarci un po' di più in eleganza.

Possiamo definire il tensore generale dell'elettromagnetismo:

Definizione 10.3 (Tensore elettromagnetico) *Definiamo il tensore elettromagnetico F_{ik} in questo modo:*

$$\frac{\partial \phi^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi^i}{\partial x^k} = F_i{}^k$$

Sapendo che

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

E ricordando la definizione 10.2 otteniamo

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & E_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & E_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Questo è un tensore antisimmetrico che quindi si trasforma con le trasformazioni che abbiamo scritto esplicitamente (10.9).

$$cB_z = cB'_z \quad E_z = E'_z$$

⁷Faymann nel suo testo fa un esempio molto istruttivo: è possibile racchiudere tutta la fisica in un'unica equazione molto semplice: $U = 0$ dove U è una grandezza che possiamo esplicitare. Scriviamo tutte le leggi della fisica in forma implicita del tipo $F - ma = 0$, U è la somma di tutti questi termini elevati al quadrato, quindi quando si verifica la condizione $U = 0$ automaticamente tutte le leggi della fisica sono soddisfatte. Questa equazione però non è elegante, perché per poter essere risolta occorre tornare alle equazioni di base, e dunque è del tutto inutile.

Le componenti dirette lungo il moto non si trasformano! Quelle che subiscono variazioni sono le componenti perpendicolari alla direzione di moto:

$$E'_x = \gamma(E_x + c\beta B_y) = \gamma(E_x + vB_y)$$

Da cui notando che v e B_y sono perpendicolari otteniamo nel caso generico

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \wedge \vec{B}_{\perp})$$

Stessa cosa per il campo magnetico:

$$cB'_x = \gamma(cB_x - \beta E_y)$$

$$B'_x = \gamma\left(B_x - \frac{1}{c^2}vE_y\right)$$

Poiché v e E_y sono perpendicolari otteniamo:

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \wedge \vec{E}_{\perp}\right)$$

Questo ci dice che i campi trasversi sono esaltati di un fattore γ .

Con questo nuovo approccio all'elettromagnetismo si possono ridefinire tutte le grandezze che abbiamo visto in questo corso, compreso il tensore degli sforzi, che diventa un tensore a due indici 4x4. Non ripetiamo i calcoli per ricavare questo tensore, facciamo però la ragionevole affermazione sull'ultima componente del tensore T_{44} , che sarà associata al trasporto di energia attraverso il vettore di Poynting.

Il tensore elettromagnetico può essere usato anche per ricostruire le equazioni di Maxwell. Vediamo come:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$c\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) = 0$$

Questa condizione può essere scritta sfruttando il tensore elettromagnetico:

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = 0$$

Quindi la seconda equazione di Maxwell può essere scritta come la permutazione degli indici del tensore elettromagnetico:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0$$

Se al posto di usare i primi tre indici, usiamo altre combinazioni con il 4 dello stesso ciclo otteniamo:

$$\frac{\partial F_{14}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - c \frac{\partial B_z}{\partial ct} = 0$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right)_z$$

Con le altre combinazioni di indici otteniamo le altre componenti del rotore, da cui la terza equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Le altre due equazioni di Maxwell possiamo tirarle fuori dall'equazione generale dell'elettrostatica in questo modo:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q^k$$

Dove bisogna stare attenti perché compare il tensore nella forma controvariante F^{ik} non F_{ik} , che ovviamente sarà:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -E_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -E_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Ovviamente se $k = 4$ si riottiene la prima equazione di Maxwell, per $k = 1, 2, 3$ otteniamo l'ultima:

$$\frac{\partial F^{14}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{34}}{\partial x^3} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Proviamo una componente per la quarta equazione ($k = 1$):

$$\frac{\partial F^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{41}}{\partial x^4} = \frac{J_x}{c\varepsilon_0}$$

$$c \frac{\partial B_z}{\partial y} - c \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial(ct)} = \frac{J_x}{c\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{J_x}{c^2\varepsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right)_x = \mu_0 J_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Che è la prima componente della quarta equazione di Maxwell:

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$