

Meccanica Quantistica Relativistica

Lorenzo Monacelli, Mattia Miotto

27 dicembre 2014

Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione 3.0 Unported. Per leggere una copia della licenza visita il sito web

<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.it>.

o spedisce una lettera a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre, in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera alle seguenti condizioni:

- Ⓒ **Attribuzione** Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera;

Prefazione

Questi appunti sono stati tratti dalle lezioni tenute dal professor M. Testa nell'anno accademico 2014-2015, durante il corso di “Meccanica quantistica relativistica” del primo anno della laurea magistrale in Fisica, università “La sapienza” di Roma.

Gli autori si scusano anticipatamente per qualunque svista o errore in cui potreste imbattervi nella lettura di questi appunti, che non hanno la pretesa di voler sostituire un più completo libro di testo sull'argomento, né sono stati ancora sottoposti al professore per una sua approvazione dei contenuti.

Ogni contributo è apprezzato, potete segnalare errori e sviste al seguente indirizzo mail: *mesonepigreco@gmail.com*

Buona lettura,

Lorenzo Monacelli, Mattia Miotto

Indice

1	Cenni di meccanica relativistica	5
1.1	Algebra lineare	6
1.2	Trasformazioni di Lorentz	10
1.2.1	Cono di luce	12
1.2.2	Quadrivettori	13
1.2.3	Particelle prive di massa	17
2	Equazione di Klein-Gordon	19
2.1	Covarianza dell'equazione	21
2.2	Prodotto scalare	23
2.3	Formalismo canonico	25
2.4	Soluzioni dell'equazione	30
2.5	Osservabile energia	35
2.6	Osservabile impulso	40
2.6.1	Quadrimpulso su volumi finiti	46
2.6.2	Quadrimpulso su volumi infiniti	48
2.7	Funzione d'onda	48
2.7.1	Parità della funzione d'onda	49
2.8	Paradosso della micro-causalità	50
2.9	Propagatore di Feynman	53
2.10	Conservazione della carica	61
3	Quantizzazione del campo elettromagnetico	64
3.1	Forma covariante dell'elettromagnetismo	64
3.2	Formalismo canonico per il campo elettromagnetico	72
3.2.1	Forma dei campi elettromagnetici	75
3.2.2	Fotoni	77
3.3	Conservazione del momento angolare	81
3.3.1	Lo spin	88

3.3.2	Spin dei fotoni	89
3.3.3	Campo elettromagnetico classico	91
4	Equazione di Dirac	93
4.1	Formalismo delle matrici γ	99
4.1.1	Spinore aggiunto	101
4.2	Soluzione dell'equazione di Dirac	104
4.3	Limite non relativistico	106
4.4	Integrale generale	110
4.4.1	Normalizzazione delle soluzioni	114
4.5	L'oscillatore di Fermi	119
4.6	Regole di superselezione	121
4.7	Altri osservabili	123
4.7.1	Impulso spaziale	123
4.7.2	Momento angolare	123
4.7.3	Invarianza di fase	125
5	Elettrodinamica quantistica	130
5.1	Schemi di rappresentazione	130
5.2	Schema di interazione	132
5.3	Scattering coulombiano	138
5.4	Sezione d'urto	142
5.5	Verso i diagrammi di Feynman	149
5.6	Hamiltoniana di interazione	150
5.7	Propagatore fotonico	155
5.8	Propagatore del fotone	157
5.9	Grafici di Feynman, processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	162
5.9.1	Normalizzazione sulle polarizzazioni	168
5.10	Effetto Compton	171

Capitolo 1

Cenni di meccanica relativistica

La Meccanica quantistica relativistica (MQR) è una parte della fisica che concilia le due grandi teorie fisiche sviluppate nel corso del novecento.

Questa unificazione ha portato alla scoperta di un gran numero di nuovi fenomeni, non prevedibili dalla fisica classica, tutti rigorosamente confermati sperimentalmente (come ad esempio la produzione di coppie).

Il punto di partenza di questa teoria è nell'interpretazione quantistica delle equazioni di Maxwell, sostituendo alle espressioni dei campi e potenziali classiche i rispettivi osservabili quantistici.

La relatività ristretta studia la connessione tra sistemi di riferimenti tra loro *inerziali*.

Definizione 1.0.1 (Sistema di riferimento inerziale) *Un sistema di riferimento si definisce inerziale quando in quel sistema di riferimento è valido il principio di inerzia.*

La definizione 1.0.1 può sembrare tautologica, in realtà non lo è poiché definisce una classe di sistemi di riferimento riconoscibili da una proprietà in comune¹.

Introduciamo ora la geometria necessaria per descrivere il passaggio tra sistemi di riferimento tra loro inerziale.

¹Quella che valga il principio di inerzia e la seconda legge della dinamica.

1.1 Algebra lineare

Gli eventi fisici nello spazio-tempo sono descritti da enti geometrici chiamati *vettori*

Definizione 1.1.1 (Vettore) *Si definisce vettore l'elemento di uno spazio vettoriale dove sono definite l'operazione di somma e di prodotto per uno scalare, tali che siano \vec{v}_1 e \vec{v}_2 generici elementi dello spazio, anche v_3 così definito è elemento dello stesso spazio:*

$$v_3 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Per rappresentare geometricamente i vettori possiamo introdurre una base del sistema, una base è caratterizzata dal massimo numero di vettori *linearmente indipendenti* che lo spazio può avere. Siano $\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n$ i vettori della mia base l'equazione

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \vec{e}_i = 0$$

Ha come unica soluzione $\mu_i = 0 \forall i$. n è la dimensione dello spazio vettoriale.

Qualunque vettore può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di base:

$$\vec{v} = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \vec{e}_\mu \quad (1.1)$$

Questo segue dalla definizione di base, infatti se per assurdo questo non fosse possibile, potremmo aggiungere v alla base ottenendo ancora un sistema di $n+1$ vettori linearmente indipendenti (mentre n è definito come il massimo numero di vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale in questione).

Nel corso di questi appunti adotteremo la convenzione di Einstein, in cui possiamo omettere la sommatoria nell'equazione 1.1 ogni volta che troviamo due indici uguali, uno sopra e uno sotto.

$$\vec{v} = v^\mu \vec{e}_\mu \quad (1.2)$$

La scrittura di \vec{v} in termini di componenti v^μ si dice *contravariante*

Definizione 1.1.2 (Controvariante) *La scrittura in componenti controvarianti di un vettore v è data dai coefficienti che moltiplicano i vettori di base nella combinazione lineare che determina v , e si indicano con un apice alto.*

La scrittura di v in termini di coordinate controvarianti dipende dalla particolare base in cui ci troviamo. In particolare data una base nuova \vec{e}'_ν è possibile scrivere la relazione che lega i vettori di base vecchi dai nuovi dall'espressione:

$$\vec{e}_\mu = \Lambda^\nu_\mu \vec{e}'_\nu \quad (1.3)$$

Dove abbiamo usato la notazione di Einstein. Nell'espressione (1.3) i vecchi vettori di base sono espressi come combinazioni lineari dei vettori della nuova base, i coefficienti sono gli elementi della matrice di cambiamento di base Λ^ν_μ . Questa matrice deve essere invertibile (infatti deve essere possibile esprimere i nuovi vettori di base in termini di combinazione lineare dei vecchi). Condizione necessaria e sufficiente affinché questo si verifichi è che la matrice sia non singolare, ossia che:

$$\det \Lambda \neq 0$$

Come si scrivono le componenti controvarianti di \vec{v} nella nuova base? Semplice:

$$\vec{v} = v^\mu \vec{e}_\mu = v^\mu \Lambda^\nu_\mu \vec{e}'_\nu = v^{\nu'} \vec{e}'_\nu$$

Da cui segue che

$$v^{\nu'} = v^\mu \Lambda^\nu_\mu \quad (1.4)$$

Anche le coordinate controvarianti si trasformano usando la matrice Λ . Notiamo però che mentre Λ descrive il passaggio da coordinate nuove a coordinate vecchie per i vettori di base, fa il passaggio inverso per le componenti controvarianti.

Possiamo definire un prodotto scalare all'interno del nostro spazio.

$$(\vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{C}$$

Il prodotto scalare deve avere la proprietà di essere una forma bilineare, ossia lineare su entrambi gli argomenti, e hermitiano.

$$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})^*$$

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}) = (\vec{v}_1, \vec{w}) + (\vec{v}_2, \vec{w})$$

Data questa seconda proprietà possiamo ridefinire le componenti di un vettore facendone il prodotto scalare con i vettori della base.

Definizione 1.1.3 (Componenti covarianti) *Si definiscono componenti covarianti di un vettore \vec{v} le proiezioni di \vec{v} sui vettori di base:*

$$v_\mu = (\vec{v}, \vec{e}_\mu)$$

Sfruttando l'equazione (1.2) è possibile legare coordinate covarianti e controvarianti:

$$v_\mu = (v^\nu \vec{e}_\nu, \vec{e}_\mu) = v^\nu (\vec{e}_\nu, \vec{e}_\mu) \quad (1.5)$$

Il prodotto scalare tra i vettori di base è una matrice a due indici, che indichiamo con $g_{\mu\nu}$, e prende il nome di *tensor metrico*.

Definizione 1.1.4 (Tensore) *Un tensore è un ente algebrico che nel cambiare sistema di riferimento si trasforma usando le matrici Λ di cambiamento di base.*

La definizione di Tensore (1.1.4) è un'estensione del concetto di vettore a oggetti matematici con più indici. Verifichiamo che effettivamente $g_{\mu,\nu}$ sia un tensore. Cambiamo base (1.3)

$$g_{\mu\nu} = (\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \left(\Lambda_\mu^\alpha \vec{e}'_\alpha, \Lambda_\nu^\beta \vec{e}'_\beta \right) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g'_{\alpha\beta}$$

Quindi effettivamente il $g_{\mu\nu}$ si trasforma con le matrici Λ .

Il principio di **covarianza generale** in Fisica afferma che tutte le leggi fisiche devono essere invarianti al cambiare di sistema di riferimento. Questo implica che si deve poterle scrivere in forma *tensoriale*. In questo modo quando si cambia sistema di riferimento, tutti i termini dell'equazione si trasformano allo stesso modo, lasciando invariata la forma algebrica della legge. L'equazione 1.5 ci dice anche come si passa dalla rappresentazione covariante di un vettore a quella controvariante:

$$v_\mu = v^\nu g_{\nu\mu}$$

Basta *contrarre* l'indice controvariante con uno dei due indici del tensore metrico. Da questa espressione è facile ottenere come si trasforma il vettore covariante (dall'equazione 1.4):

$$v_\mu = v^\nu g_{\nu\mu} = \Lambda^{-1\alpha}_\nu v'^\nu \Lambda_\nu^\alpha \Lambda_\mu^\beta g'_{\alpha\beta} = \Lambda_\mu^\beta v'^\nu g'_{\alpha\beta}$$

$$v_\mu = \Lambda^\beta_\nu v'_\beta$$

Come si può notare indici controvarianti e covarianti si trasformano con le matrici inverse.

Nel caso della metrica euclidea il tensore metrico è semplicemente la matrice identità, questo perché i vettori della base sono ortonormali, e non vi è alcuna differenza tra notazione covariante e controvariante, infatti in quel caso:

$$v_\mu = \delta^\nu_\mu v_\nu$$

Nel caso della metrica di Minkovsky, che è quella che interessa a noi, il tensore metrico si rappresenta in questo modo:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da cui il passaggio tra vettori covarianti e controvarianti è il seguente:

$$v^0 = v_0 \quad v^i = -v_i$$

Con $i = 1, 2, 3$

Con l'impiego del tensore metrico è possibile esplicitare la forma di un prodotto scalare tra due vettori nelle coordinate covarianti e controvarianti:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = (v^\alpha \vec{e}_\alpha, v^\beta \vec{e}_\beta) = v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}$$

Sfruttando il tensore metrico per abbassare gli indici:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta} = v^\alpha v_\alpha = v_\alpha v_\beta g^{\alpha\beta}$$

L'ultima espressione può essere ricavata definendo il tensore metrico con gli indici in alto come l'inverso del tensore metrico, infatti:

$$v_\mu = v^\nu g_{\nu\mu}$$

Poiché la relazione è invertibile esiste una matrice $g^{\nu,\mu}$, inversa di $g_{\nu,\mu}$, che soddisfa la proprietà:

$$g^{\nu\mu} v_\mu = v^\nu$$

Ed è in grado di alzare l'indice di un vettore.

1.2 Trasformazioni di Lorentz

Nella relatività ristretta le trasformazioni di Lorentz sono rappresentate da una matrice, sono trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali, e pertanto sono invertibili. Le trasformazioni di Lorentz sono le uniche che lasciano invariata la distanza tra gli eventi nello spaziotempo.

Dati due eventi x_a e x_b si definisce la loro distanza Δs^2 come la norma quadra del vettore differenza:

$$\vec{\Delta x} = \vec{x}_a - \vec{x}_b \quad \Delta s^2 = g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = (\Delta x^0)^2 - \left(\sum_{i=1}^3 \Delta x^i \right)^2$$

In geometria euclidea l'analogo delle trasformazioni di Lorentz è dato dal gruppo delle rotazioni e ribaltamenti nello spazio. L'applicazione di questo tipo di trasformazioni lascia invariata la distanza tra due punti nello spazio euclideo. In relatività ristretta, la presenza dei -1 nella parte spaziale della metrica genera una serie di fenomeni fisici interessanti. Le matrici di Lorentz Λ devono conservare invariata la forma del Δs^2

Se vogliamo l'invarianza in forma dobbiamo imporre che il tensore metrico trasformato deve essere uguale in espressione algebrica al tensore metrico di partenza. Per i tensori doppi esistono trasformazioni che al cambio di sistema di riferimento lasciano invariata la sua espressione algebrica (non è vero ovviamente per i vettori)

$$\Delta s^{2'} = g'_{\alpha\beta} \Delta x'^{\alpha} \Delta x'^{\beta}$$

$$\text{Con } g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$$

Se la metrica fosse euclidea la condizione di trasformazione sarebbe:

$$\delta_{\alpha,\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \delta_{\mu\nu}$$

Questa condizione è soddisfatta dalle matrici ortogonali.

Nello spazio di Minkowsky qualunque matrice soddisfa questa uguaglianza è una trasformazione di Lorentz. Casi particolari delle trasfor-

mazioni di Lorentz sono quelle dirette lungo un asse della base:

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo, cioè se combinate una di seguito all'altra esiste sempre un'unica trasformazione in grado di compiere lo stesso cambiamento di riferimento. Esiste la matrice identica (che lascia invariato il sistema di riferimento) ed esiste la matrice inversa per ogni trasformazione di Lorentz.

Il modulo del determinate di queste matrici deve essere pari a 1 (un po' come il gruppo delle rotazioni).

Questa ultima affermazione è semplice da dimostrare:

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} g_{\mu\nu} \Lambda_{\beta}^{\nu} = \Lambda^T g \Lambda$$

La prima matrice Λ è trasposta perché è il prodotto tra l'indice in alto di Λ e il primo indice di g (righe per righe), per renderlo righe per colonne occorre trasporre Λ , per il secondo prodotto invece non c'è problema poiché è la contrazione tra il primo indice di Λ e il secondo di g (righe per colonne). Ricordando che il determinante della trasposta è pari al determinante della matrice originale, e che il determinante di un prodotto righe per colonne è pari al prodotto dei determinanti si ottiene:

$$\begin{aligned} \det g &= (\det \Lambda)^2 \det g \\ (\det \Lambda)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Il determinante delle matrici di Lorentz deve avere modulo 1 (quindi sono invertibili). Non tutte le matrici che hanno determinante ± 1 sono matrici di Lorentz, questa è condizione necessaria ma non sufficiente.

Ricaviamo ora una condizione che deve avere il primo termine delle matrici Λ :

$$g_{00} = 1 \quad g_{00} = \Lambda_0^{\alpha} \Lambda_0^{\beta} g_{\alpha\beta} = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2$$

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2$$

$$\Lambda_0^0 \leq -1 \text{ oppure } \Lambda_0^0 \geq 1$$

Λ_0^0 non può mai essere compreso tra -1 e 1, per qualunque trasformazione di Lorentz. Un esempio di trasformazione che da determinante pari a -1 è l'inversione di assi (trasformazione di parità), si passa a un sistema di assi a simmetria differente (levogiro o destrogiro).

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \\ t' = t \end{cases}$$

Possiamo definire un sottogruppo del gruppo di Lorentz in modo da escludere le inversioni di parità².

$$\det \Lambda = +1 \text{ e } \Lambda_0^0 \geq 1$$

Questo sotto gruppo è detto *gruppo di Lorentz proprio*.

Questo gruppo è molto importante, perché in natura il principio di covarianza generale di Einstein è valido solo sotto trasformazioni per gruppo di Lorentz Proprio. Esistono interazioni che violano l'invarianza sotto parità, e sotto time-revers. Il gruppo di Lorentz Proprio è l'unico che rende covariante il sistema. Nel gruppo di Lorentz proprio, ogni trasformazione finita può essere costruita componendo un numero infinito di trasformazioni infinitesime (questo non è vero per tutto il gruppo di Lorentz completo, dove è presente anche la parità).

1.2.1 Cono di luce

Il cono di luce di un evento è un ipersuperficie nello spazio-tempo definita dall'equazione:

$$(x^0 - x_a^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i - x_a^i)^2 = 0$$

²Si escludono anche le trasformazioni di Time-Reversing, ossia in cui si ribalta il tempo.

Questo cono di luce separa lo spazio tempo in diverse regioni. Abbiamo una regione esterna dal cono di luce, che si chiama il presente assoluto di dell'evento A , la regione interna al cono luce (a tempi positivi) si chiama futuro assoluto di A , infine la regione situata a tempi negativi dentro il cono di luce è il passato assoluto di A .

La caratterizzazione delle regioni è indipendente dal sistema di riferimento che consideriamo, in altre parole, un evento B che fa parte del presente assoluto di A , lo sarà in tutti i sistemi di riferimento.

Infatti la norma della distanza tra due eventi è esprimibile in forma covariante, ad esempio siano A e B due eventi che soddisfano la condizione:

$$(x_a^\mu - x_b^\mu)(x_a^\nu - x_b^\nu)g_{\mu\nu} < 0$$

Le coordinate spaziali dominano su quella temporale, quindi A è nel presente assoluto di B (o viceversa). Questi due eventi sono collegati da un vettore di tipo *spazio*. Per avere una informazione dal presente assoluto devo potermi muovere a velocità maggiore della luce, infatti per connettere due eventi che sono di tipo spazio devo viaggiare a velocità maggiori della luce.

Siccome esiste sempre una trasformazione di Lorentz in grado di invertirmi la sequenza temporale di due eventi di tipo spazio, due eventi di questo tipo non possono scambiarsi informazioni, altrimenti violerebbero il principio di causalità. Questo è il motivo per cui non si può superare la velocità della luce.

Quando due eventi sono a distanza di tipo spazio il loro ordinamento temporale non è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento. Questo, in meccanica quantistica, crea un piccolo problema. Quando si fa una misura, il sistema collassa su un autostato. Il collasso avviene istantaneamente. Questo sembrerebbe violare il principio di causalità della relatività ristretta. Tuttavia vedremo in seguito che non si può utilizzare il collasso per inviare segnali e scambiare informazioni a velocità superluminare, quindi non c'è una vera e propria violazione del principio di causalità.

1.2.2 Quadrivettori

Costruiamo una teoria della meccanica relativisticamente invariante. Descriviamo la cinematica di un punto materiale. La velocità, vettore

tridimensionale, non è un vettore che si trasforma tensorialmente nella metrica di Minkowsky e non è quindi adatta ad essere usata nelle formule relativisticamente covarianti.

Poiché la posizione è un vettore nello spazio di Minkowsky, lo è anche la distanza infinitesima tra due posizioni:

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}$$

Non possiamo dividere per dt , perché dt non è un invariante, per definire una quadrivelocità occorre un oggetto che sia invariante, perché in questo modo la quadrivelocità si trasformerebbe come un vettore usando le matrici di Lorentz. Usiamo quindi l'intervallo spazio temporale, diviso per la velocità della luce (per avere un oggetto che sia un tempo).

$$u^{\mu} = c \frac{dx^{\mu}}{ds} \quad ds = \sqrt{dx^{\mu} dx_{\mu}}$$

La dinamica relativisticamente covariante deve quindi essere scritta in funzione di questa quadrivelocità, che si trasforma regolarmente seguendo le trasformazioni di Lorentz. Analizziamo la parte spaziale e temporale di questo oggetto:

$$u^0 = \frac{cdx^0}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^i)^2}} = \frac{cdx^0}{dx^0 \sqrt{1 - \left(\frac{dx^i}{dx^0}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{dx^i}{cdt}\right)^2}}$$

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Analogamente l'espressione spaziale è legata alla velocità classica:

$$u^i = \frac{cdx^i}{dx^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{cv^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Come si può notare nel limite classico ($c \rightarrow \infty$) Le componenti spaziali della quadrivelocità tendono alla velocità classica.

Mostriamo che la norma di questo quadrivettore è sempre fissata:

$$u^{\mu} u_{\mu} = u^0 u_0 - u^i u^i = \frac{c^2}{1 - \beta^2} - \frac{v_i^2}{1 - \beta^2} = c^2 \frac{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}{1 - \beta^2} = c^2$$

Inoltre la derivata di questo quadrivettore (che è sempre di tipo tempo, poiché la norma è sempre positiva) è ortogonale alla quadrivelocità. Per dimostrarlo deriviamo la norma della quadrivelocità, che essendo costante da come risultato zero:

$$\frac{d}{ds}(u^\mu u_\mu) = 0$$

$$\frac{du^\mu}{ds}u_\mu + u^\mu \frac{du_\mu}{ds} = 0$$

Alziamo ambo gli indici:

$$g_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{ds}u^\nu + g_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{ds}u^\mu = 0$$

$$\frac{du^\mu}{ds}u_\mu = 0$$

Definiamo con questo un altro quadrivettore, il *quadrimpulso*:

$$p^\mu = mu^\mu$$

Per essere un quadrivettore m deve essere un invariante relativistico. m è la massa dell'oggetto che vogliamo descrivere, che pertanto non dipende dal particolare sistema di riferimento. È spesso anche chiamata massa a riposo, tuttavia m è la massa reale della particella. Talvolta si dice che a velocità prossime a c la massa di un oggetto aumenti. Questo è sbagliato, la massa di ogni oggetto rimane sempre la stessa, a cambiare è la quadrivelocità, che all'aumentare di v tende a far crescere drasticamente le sue componenti, aumentando di conseguenza anche il quadrimpulso della particella molto più rapidamente di quanto previsto dalla teoria della meccanica classica.

In analogia con la legge della dinamica Newtoniana, definiamo anche qui che l'applicazione di una *quadriforza* sul nostro punto materiale ne modifica la quantità di moto, seguendo la legge covariante:

$$c \frac{dp^\mu}{ds} = F^\mu \tag{1.6}$$

Questa equazione è l'analogo relativistico di $F = \frac{dp}{dt}$, dove però le grandezze sono espresse in forma tensoriale, per cui vale in ogni sistema di riferimento.

Andiamo a vedere quali sono le componenti della quadriforza.

$$dx^0 = u^0 ds \quad ds = \sqrt{1 - \beta^2} c dt$$

Riscriviamo la parte spaziale dell'equazione, per imporre il limite Newtoniano:

$$\frac{dp^i}{\sqrt{1 - \beta^2} dt} = F^i$$

$$\frac{dp^i}{dt} = F_N^i \quad F_N^i = \sqrt{1 - \beta^2} F^i$$

Abbiamo trovato la relazione che lega la forza Newtoniana con la componente spaziale del quadrivettore.

Abbiamo già dimostrato che u e la sua derivata sono ortogonali, poiché F^μ è proporzionale alla derivata di u^μ , anche F^μ è ortogonale alla quadrivelocità:

$$u^0 F_0 + u^i F_i = 0 \quad u^0 F_0 = -u^i F_i = u^i F^i$$

$$\frac{c F^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{v^i F^i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}_N}{1 - \beta^2}$$

$$F^0 = \frac{1}{c} \frac{\vec{F}_N \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Mentre quindi le componenti spaziali descrivono la legge di Newton della dinamica relativistica, vediamo come appare la componente temporale:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{\vec{F}_n \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \vec{F}_n \cdot \vec{v}$$

Questa equazione ha a destra un termine che rappresenta una potenza. La potenza in meccanica classica regola la variazione di energia cinetica, quindi il limite classico sembra suggerirci che al membro di sinistra si trovi la variazione di energia cinetica. Definiamo T l'energia cinetica

di un corpo come c volte la zeresima componente del suo quadrimpulso. Vediamo se corrisponde alla nota formula dell'energia per il limite Newtoniano.

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} T = \frac{mc^2}{1 - \frac{1}{2}\beta^2} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 \right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Che è proprio l'espressione dell'energia cinetica classica, a meno di una costante mc^2 . Il significato di questa costante non è diretto, in quanto classicamente l'energia è sempre definita a meno di una costante. Per ora rappresenta solo una costante arbitraria, priva di significato. Vedremo tuttavia che applicando il formalismo della meccanica quantistica questa formula acquisisce un senso preciso, in quanto questa energia potrà essere trasformata in alcuni casi in energia cinetica.

Il formalismo della quadriforza trova applicazioni interessanti nella descrizione della forza di Lorentz, che riprenderemo più avanti negli appunti.

1.2.3 Particelle prive di massa

In fisica classica non può esistere una particella priva di massa, in questo caso infatti la forza agente su questa particella non può essere mai diversa da zero:

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0$$

Nel limite relativistico invece se si considerano particelle di massa nulla l'espressione non perde più di significato:

$$P^\mu = mu^\mu \quad P^\mu = \begin{pmatrix} \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{mv_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{mv_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

Poiché il termine sotto radice va a zero per $|v| \rightarrow c$, l'espressione dell'impulso ha una forma indeterminata (e potenzialmente non nulla) se $m = 0$ e $v = c$.

Per cui in relatività se esistono particelle che hanno la caratteristica di avere massa nulla, queste devono muoversi a velocità c . Queste particelle possono trasportare sia impulso che energia. In particolare l'energia sarà pari a:

$$P^0 P^0 = \sum_{i=1}^3 (P^i)^2 + m^2 c^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} = |\vec{p}|^2 + m^2 c^2$$

Nel caso di particelle a massa nulla si ha che:

$$E = c|\vec{p}|$$

Questa relazione tra energia e impulso predetta dalla teoria relativistica è consistente con quanto si può misurare per un'onda elettromagnetica attraverso il vettore di Poynting.

Capitolo 2

Equazione di Klein-Gordon

In questo capitolo iniziamo ad introdurre una meccanica quantistica scritta in forma covariante. Partiamo dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H \varphi \quad (2.1)$$

Per una particella non relativistica l'hamiltoniana del sistema risulta essere:

$$H = \frac{P^2}{2m}$$

Sostituendo l'espressione quantistica di P si ottiene:

$$P = -i\hbar \nabla$$
$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi$$

Usiamo ora l'espressione dell'hamiltoniana relativistica. L'energia totale si esprime:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + P^2}$$

Proviamo ad usare questa espressione come Hamiltoniana del sistema, e vediamo se è corretta.

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{m^2 c^4 + P^2} \varphi$$

Questa è una brutta schifezza. Il problema non si pone per la particella libera se guardo la soluzione nella base dell'impulso, ma se dovessi

aggiungere un potenziale che dipende dalla posizione della particella, questa operazione non è più banale:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\sqrt{m^2 c^4 + P^2} + V(X) \right] \varphi$$

Si può però provare a quadrare questa operazione: Applico ad ambi i membri l'operatore

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ -\hbar^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sqrt{m^2 c^4 + P^2} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (m^2 c^4 + P^2) \varphi \\ -\hbar^2 \partial_t^2 \varphi = (m^2 c^4 + P^2) \varphi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Questa equazione presenta dei problemi. Avendo quadrato l'equazione, sono state introdotte soluzioni ad energia negativa:

$$E \geq mc^2 \implies E^2 \geq m^2 c^4 \implies E \leq -mc^2 \text{ o } E \geq mc^2$$

Se fossimo in meccanica classica non sarebbe un problema, poiché l'energia di un sistema deve variare con continuità, se un sistema ha energia positiva, continuerà sempre ad avere energia positiva. Tuttavia in meccanica quantistica questo non è vero, e ad un sistema è permesso compiere dei salti discreti di energia. Le soluzioni dell'equazione 2.2 possono quindi compiere dei salti, sotto opportune condizioni, come l'assorbimento di un fotone, da stati ad energia negativa a stati ad energia positiva (e vice versa).

Questa equazione differenziale (2.2) è l'equazione di Klein-Gordon. Questa equazione soddisfa il principio di covarianza della relatività ristretta. Useremo le unità naturali sbarazzandoci sia di \hbar che di c .

$$\hbar = [E \cdot t] = 1$$

Quindi nel mio nuovo sistema di riferimento le energie possono essere misurate come degli inversi dei tempi.

$$c = \left[\frac{L}{t} \right] = 1$$

Posso esprimere i tempi come delle lunghezze (quanto tempo impiega la luce a compiere la lunghezza L) e quindi le energie si esprimono in

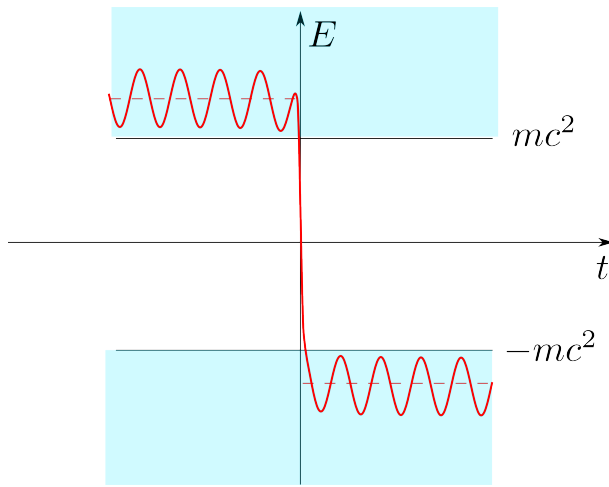


Figura 2.1: In meccanica quantistica una funzione d'onda può compiere salti discreti di energia, arrivando ad avere energie negative.

inversi di lunghezze (in genere cm^{-1}). Poiché se $c = 1$ c'è l'uguaglianza completa per energia e massa, anche le masse si misurano in cm^{-1} . Portandoci nella base delle posizioni e esplicitando il significato di P in questa base possiamo riscrivere la 2.2 in modo più compatto:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2 + m^2 \right) \varphi = 0$$

Definendo l'operatore d'alambertiano in questo modo:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

L'equazione di Klein-Gordon può essere riscritta nel seguente modo compatto:

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \tag{2.3}$$

Le soluzioni dell'equazione di Schroedinger non relativistiche non possono mai essere puramente reali, invece nell'equazione di Klein-Gordon anche le funzioni reali possono essere soluzioni.

2.1 Covarianza dell'equazione

Abbiamo un osservatore O che misura in un sistema di coordinate x una funzione d'onda $\varphi(x)$, e un osservatore O' che osserva la stessa funzione

d'onda. Gli stessi eventi dello spaziotempo saranno parametrizzate da un set di coordinate x' . Tra x e x' , che parametrizzano lo stesso evento, si può passare attraverso la trasformazione di Lorentz.

Poiché la grandezza fisica descritta è la stessa deve valere l'uguaglianza:

$$\varphi(x) = \varphi'(x')$$

Ovviamente la funzione φ' sarà diversa dalla funzione φ . Evolviamo entrambe le funzioni con l'equazione di Klein-Gordon:

$$\begin{cases} (\square_x + m^2)\varphi(x) = 0 \\ (\square_{x'} + m^2)\varphi'(x') = 0 \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione e imponiamo $\varphi(x) = \varphi'(x')$:

$$\square_x \varphi'(x') + m^2 \varphi'(x') = 0$$

$$\square_x \varphi'(x') = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi'(x')}{\partial x^\nu} \right) g^{\mu\nu}$$

Vediamo come si trasforma la derivata:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'^\nu} \Lambda^\nu_\mu$$

La derivata si trasforma come un vettore covariante:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$$

Applicando questo alla definizione di d'alambertiano otteniamo:

$$\square_x \varphi'(x') = g^{\mu\nu} \partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} \varphi'(x') = \underbrace{g^{\alpha\beta} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta}_{\square_{x'}} \partial_{x'^\mu} \partial_{x'^\nu} \varphi'(x')$$

Il d'alambertiano si comporta come una quantità relativisticamente invariante, da cui segue che

$$\square_{x'} \varphi'(x') = \square_x \varphi(x)$$

Poiché l'altro termine dell'equazione è già uno scalare invariante (m^2), abbiamo concluso che tutta l'equazione di Klein-Gordon è effettivamente covariante per trasformazioni di Lorentz.

2.2 Prodotto scalare

Come si può interpretare il prodotto scalare in meccanica quantistica relativistica? Il prodotto scalare permette di calcolare la probabilità che la particella si trovi in una certa regione dello spazio, ad esempio. Il prodotto scalare non relativistico è quello che rende unitaria l'evoluzione temporale che segue dall'equazione di Schroedinger. È naturale definire quindi il prodotto che deve imporre sull'equazione di Klein-Gordon in modo che l'equazione di Klein-Gordon produca un'evoluzione unitaria nel tempo. Prendiamo due soluzioni dell'equazione:

$$\begin{cases} (\square + m^2)\varphi_1(x) = 0 \\ (\square + m^2)\varphi_2(x) = 0 \end{cases}$$

Per scrivere un prodotto scalare idoneo prendiamo il complesso coniugato della seconda soluzione e moltiplichiamola per la prima equazione (e vice versa). Poi prendiamo la differenza tra le due (in questo modo eliminiamo il termine con la massa):

$$\begin{cases} \varphi_2^*(x)(\square + m^2)\varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_1(x)(\square + m^2)\varphi_2^*(x) = 0 \end{cases}$$
$$\varphi_2^*(x)\square\varphi_1(x) - \varphi_1(x)\square\varphi_2^*(x) = 0$$
$$\partial_\mu \left(\varphi_2^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \varphi_1 \right) = 0 \tag{2.4}$$

Con l'espressione (2.4) abbiamo definito il simbolo $\overset{\leftrightarrow}{\partial}$ nel seguente modo:

$$\varphi_2^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \varphi_1 = \varphi_2^* \partial^\mu \varphi_1 - \varphi_1 \partial^\mu \varphi_2^*$$

Ricordiamo che:

$$\square\varphi = \partial_\mu \partial^\mu \varphi$$

A questo punto possiamo introdurre lo scalare

$$I^\mu(x) \doteq i\varphi_2^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \varphi_1(x)$$

La i serve per rendere reale la grandezza I^μ , definita come la differenza tra due numeri di cui uno il complesso coniugato dell'altro.

Da un punto di vista matematico la condizione che deriva dalla condizione di Klein-Gordon (2.4) è equivalente alla conservazione della quadricorrente:

$$\partial_\mu I^\mu = 0$$

L'equazione della conservazione della quadricorrente J infatti è:

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Vediamo perché questa corrisponde ad una legge di conservazione. Esplicitiamo le componenti:

$$\partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

Questa era l'equazione della conservazione della carica. Integriamo sul volume che racchiude il sistema:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV$$

Usando il teorema della divergenza:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_\Sigma \vec{J} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

$$\frac{dq}{dt} = - \int_\Sigma \vec{J} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

La variazione di carica per unità di tempo è dovuta soltanto al fatto che una parte della carica fluisce fuori dal volume.

Dove Σ è la superficie che racchiude il mio volume. Poiché questa racchiude tutto il sistema, suppongo che la corrente totale \vec{J} sia nulla su questa superficie:

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

$$q = \text{cost}$$

Se prendo due equazioni di Klein Gordon, posso ripetere lo stesso ragionamento con la grandezza:

$$\partial_\mu I^\mu = 0$$

Da cui segue che:

$$I^0 = \text{cost}$$

La grandezza I^0 sembra dunque un buon candidato per fare da prodotto scalare e rendere unitaria l'evoluzione temporale delle soluzioni dell'equazione. Definisco il prodotto scalare di Klein-Gordon in questa maniera:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \doteq i \int d^3x \phi_2^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_1 \quad (2.5)$$

Siamo portati dunque a prendere questo come un buon prodotto scalare, poiché conserva la probabilità. Proviamo ad interpretare la probabilità di trovare la particella descritta dalla funzione d'onda φ in un punto x come quella data da questo prodotto scalare. È soddisfacente l'interpretazione di questa meccanica quantistica? No! Infatti il prodotto scalare (2.5) può anche avere valori negativi! Questo risultato è preoccupante, poiché rende impossibile l'interpretazione di valori negativi come probabilità. Non solo, se la mia funzione d'onda è reale pura (che può essere sempre presa come soluzione di Klein Gordon), questa ha norma nulla!

Esiste un'altra maniera di interpretare l'equazione di Klein-Gordon, più profonda.

2.3 Formalismo canonico

L'equazione di Klein-Gordon può essere immaginata come se fosse una equazione classica, e descriva un campo φ classico, come ad esempio il campo elettromagnetico. Il campo elettromagnetico soddisfa equazioni di questo tipo, infatti. L'equazione di Klein-Gordon potrebbe descrivere quindi descrivere un qualche tipo di campo ad interpretazione classica. La meccanica quantistica dice che la propagazione di un campo elettromagnetico classico è un caso limite della propagazione di quanti di un campo quantistico. Cerchiamo quindi di passare da una descrizione classica del campo φ ad una descrizione quantistica, che dovrebbe insegnarci che l'energia e l'impulso trasportati da questo oggetto (come quelle trasportate dal campo elettromagnetico) siano quantizzati.

Supponiamo che φ sia dunque un campo classico di qualche tipo (scalare), lo vogliamo descrivere con la meccanica quantistica. Per

quantizzare un sistema fisico occorre introdurre un formalismo canonico, una hamiltoniana, e la relazione tra le parentesi di Poisson e i commutatori.

Dobbiamo associare al nostro stato una coppia di variabili canoniche per ogni grado di libertà del nostro sistema¹. Per farlo lavoreremo a tempo fissato, e dovremo preoccuparci della consistenza relativistica delle nostre considerazioni. I valori del campo a tempo fissato punto per punto nello spazio identificano il nostro sistema, per tanto abbiamo un numero infinito non numerabile di gradi di libertà (ci servono un'infinità continua di informazioni per poter ricostruire lo stato del sistema descritto da un campo continuo come la $\varphi(x)$).

$$q_i = \varphi(x, t = 0)$$

Per ricostruire il formalismo canonico immagineremo di discretizzare questo sistema. Dal punto di vista fisico questa operazione non comporta nulla di profondo, è necessario che sia così, lo sperimentatore dovrà, per effettuare una misura, dovrà comunque fare un'operazione di discretizzazione, dividendo lo spazio in tante cellette, e misurando tramite un rilevatore in ogniuna di queste cellette il campo φ , ottenuto come media su tutto il volume della celletta.

Trasformeremo in questo modo il sistema ad un numero infinito di gradi di libertà non numerabile ad un infinito, ma numerabile. Poi passeremo al limite, tornando alla meccanica quantistica di un sistema continuo, sbarazzandoci delle cellette.

Il sistema canonico che stiamo per formulare è un prototipo semplificato di un campo elettro-magnetico (è un campo scalare).

Questa interpretazione dell'equazione di Klein-Gordon è quella più adeguata alla MQR. Infatti se la φ fosse una funzione d'onda, il tempo sarebbe un parametro, mentre le x sarebbero operatori. Avremo quindi una disparità fra la natura del tempo e quella dello spazio, in contrasto con la teoria della relatività, in cui spazio e tempo sono omogenei. Le x secondo la nuova interpretazione, non sono più operatori, ma i punti dello spazio in cui si effettua la misura. Questa descrizione non solo ha successo, è anche molto più adeguata a descrivere la fisica del sistema. Mentre la meccanica quantistica per come l'abbiamo trattata fino ad ora distingueva spazio e tempo, adesso hanno la stessa natura.

¹ Un grado di libertà è una quantità che permette di identificare lo stato dinamico del sistema.

Gli operatori della nuova descrizione sono le φ , cioè un operatore per ogni punto del tempo e dello spazio.

Per introdurre il formalismo canonico dobbiamo prima di tutto introdurre una lagrangiana. La lagrangiana è un oggetto definito in modo che, se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

Allora le $q(t)$ soddisfano l'equazione del moto.

Ora vogliamo descrivere la lagrangiana di un oggetto a infiniti gradi di libertà. Identificare la lagrangiana con l'equazione di Klein-Gordon significa trovare un funzionale S (azione²) che sia stazionario per soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon.

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x)$$

L'espressione corretta per l'azione di Klein-Gordon è:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \partial^\nu - m^2 \varphi^2) \quad (2.6)$$

L'azione è una quantità relativisticamente invariante (infatti il d^4x si trasforma con lo Jacobiano del cambiamento di variabili, che corrisponde al determinante della matrice di Lorentz, che abbiamo dimostrato essere pari a 1)

È facile dimostrare la (2.6).

Supponiamo φ reale (il caso complesso segue direttamente da quello reale), e applichiamo il principio variazionale a S . Dobbiamo ottenere l'equazione di Klein-Gordon (2.3)

$$\delta S = 0$$

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] = 0$$

Per il principio variazionale i termini $\delta \varphi$ e $\delta (\partial_\mu \varphi)$ si annullano agli estremi, quando $t = t_1$ e $t = t_2$. Sviluppriamo ora solo il secondo termine

²L'azione si misura con la stessa unità di \hbar , ossia $E \cdot t$ (energia per tempo). Se S ha dimensioni paragonabili a \hbar la descrizione del sistema deve essere effettuata usando la Meccanica quantistica, altrimenti l'approssimazione classica è ottima.

di questa espressione:

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) = \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi \right]$$

Ricordiamo le formule di Green (estensione a più dimensioni dell'integrazione per parti):

$$\int_V dx \partial_\mu f = \int_\Sigma f^\mu n_\mu d\Sigma$$

Applicando questa espressione al primo termine dell'equazione precedente otteniamo:

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) = \int d^3x n_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi - \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi$$

Il primo termine corrisponde al calcolo del flusso della funzione $\delta \varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}$ attraverso una ipersuperficie che racchiude il volume su cui stiamo integrando. Poiché abbiamo detto che $\delta \varphi$ è nulla sugli estremi di integrazione (in questo caso l'ipersuperficie), tutto il primo termine è pari a zero:

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) = - \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi$$

Risostituiamo nella formula dell'azione:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi \right] = 0$$

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} d^4x \delta \varphi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right] = 0$$

Per il teorema fondamentale del calcolo variazionale, l'equazione del moto è data da:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0 \quad (2.7)$$

Se abbiamo tanti campi φ l'equazione può essere scritta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} = 0$$

Se ora sostituiamo alla densità lagrangiana \mathcal{L} la formula (2.6) otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) \\ &- m^2 \varphi - \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0 \\ (\square + m^2) \varphi &= 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

Il momento canonico classico è definito come:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

$$L = \int d^3x \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^3x (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2)$$

Nel nostro formalismo abbiamo l'equivalenza tra le q_i e $\varphi(x)$, e tra \dot{q}_i e $\partial\varphi(x)$. Discretizziamo quindi il nostro spazio in tante cellette di volume, ciascuna di dimensione ΔV_i . Definiamo le variabili canoniche come la media spaziale del campo su questi valori:

$$\bar{\varphi}_i = \frac{1}{\Delta V_i} \int_{\Delta V_i} \varphi(x, t) dV$$

Analogamente l'hamiltoniana diventa:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \Delta V_i (\dot{\bar{\varphi}}_i)^2 + \dots$$

Siamo interessati alla sola dipendenza della lagrangiana da $\dot{\bar{\varphi}}_i$, che ci serve per definire correttamente p_i , quindi trascuriamo la scrittura dell'altra parte dell'hamiltoniana (che è comunque molto semplice)

Non ci stiamo preoccupando della convergenza della serie, ma non è un problema, infatti alla fine questa discretizzazione ha quasi più senso fisico che non il rispettivo continuo per $\Delta V_i \rightarrow 0$, e nessuno ci assicura che lo spazio sia realmente continuo o discretizzato, quindi fisicamente non è importante preoccuparsi della convergenza della serie.

Adesso sono in grado di dire chi è il momento canonico coniugato.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\varphi}}_i} = \Delta V_i \dot{\bar{\varphi}}_i$$

Ora finalmente possiedo un sistema classico, in forma canonica.

Imposteremo la meccanica quantistica nello schema di Heisenberg, per non isolare il ruolo del tempo dal ruolo dello spazio, in questo modo abbiamo operatori che sono funzioni sia dello spazio che del tempo, ed è più semplice costruire una teoria relativisticamente covariante.

Le p e q si evolvono secondo le equazioni di Hamilton, e quando la dispersione quantistica è piccola questo corrisponde all'evoluzione classica.

Per passare dalla meccanica classica alla meccanica quantistica occorre definire il legame tra parentesi di Poisson e commutatori degli operatori quantistici.

2.4 Soluzioni dell'equazione

Abbiamo visto come la lagrangiana, dalla quale si ricava l'equazione di Klein-Gordon (vedi 2.3), si può discretizzare come:

$$L = \int dx^3 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right) \sim \sum_i \Delta v_i \frac{1}{2} (\dot{\phi}^i)^2$$

infatti il termine con la massa può essere ignorato, essendo noi interessati a derivare la lagrangiana rispetto al tempo per ottenere l'impulso coniugato³. Derivando abbiamo:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^i} = \Delta v_i \dot{\phi}_i$$

Adesso siamo in grado di imporre delle regole di quantizzazione. I campi quantizzati dovranno soddisfare le equazioni classiche, ossia occorrerà poter risolvere l'equazione di Klein-Gordon, con i vincoli della quantizzazione canonica.

Poichè le parentesi di Poisson sono legate ai commutatori per mezzo di un $i\hbar$ abbiamo che:

$$[\bar{\phi}^i(x_o), \bar{\phi}^j(x_o)] = 0 \quad \Delta v_i \Delta v_j [\dot{\bar{\phi}}_i(x_o), \dot{\bar{\phi}}_j(x_o)] = 0$$

³Le derivate spaziali creano funzioni di ϕ medio, ma tanto a noi interessa la dipendenza da $\dot{\phi}$.

in analogia al caso classico in cui le parentesi di Poisson di due q o di due q punto sono nulle. A queste aggiungiamo il commutatore,

$$\Delta v_i[\dot{\phi}_i(x_o), \bar{\phi}^j(x_o)] = -i(\hbar)\delta_{ij}$$

la costante di plank è pari a 1 per convenzione. Ora se passiamo al limite e facciamo tendere a zero il volume delle cellette, possiamo riscrivere i commutatori in una forma meno pesante dal punto di vista della simbologia:

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad [\dot{\phi}(x), p\hbar i(y)] = 0 \quad [\dot{\phi}(x), \phi(y)] = -i\delta(x - y)$$

Notiamo che in alcuni libri di testo la ϕ punto si trova come $\pi(\vec{x}, x^o)$ che rappresenta la densità canonica coniugata. Nel terzo commutatore la presenza dell'infinito dato dalla delta di Dirac ha conseguenze molto più marcate rispetto alla delta di Kroneker dalla fisica classica, come vedremo andando avanti.

Ora dobbiamo scoprire come la ϕ dipende da x , per farlo risolviamo l'equazione di Klein-Gordon. Classicamente per una particella libera le equazioni del moto sono:

$$\dot{p} = 0 \quad e \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

Integrandole otteniamo che l'impulso p una costante e che la posizione dipende linearmente dal tempo:

$$p(t) = p_o \quad e \quad q(t) = q_o + \frac{p_o}{m}t$$

Queste sono le soluzioni delle equazioni classiche di Hamilton, per passare alla teoria quantistica e poter usare ancora queste espressioni, p e q devono diventare operatori e soddisfare la quantizzazione:

$$[p(t), p(t)] = 0$$

$$[p(t), q(t)] = -i\hbar \longrightarrow [p_o, q_o + \frac{p_o}{m}t] = -i\hbar \longrightarrow [p_o, q_o] = -i\hbar$$

Questo mi da la rappresentazione di Heisemberg, in cui quindi la dipendenza temporale è sugli operatori invece che sulle funzioni d'onda.

Ora passiamo al caso che ci interessa, ossia risolviamo l'equazione di Klein-Gordon riordando che anche in questo caso le soluzioni saranno operatori che devono soddisfare le regole di quantizzazione che abbiamo già stabilito per le ϕ .

Siccome stiamo sempre considerando particelle libere la soluzione sarà un'onda piana del tipo:

$$\phi(x) = Ae^{-ipx} = Ae^{-i(p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})} = A \underbrace{e^{-ip^0x^0}}_{\text{Fattore di fase}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Questo tentativo di soluzione è concettualmente uguale alla soluzione dell'equazione di Schroedinger, infatti abbiamo usato il prodotto scalare quadridimensionale nello spazio di Minkowsky. Se ora svolgiamo i conti troviamo:

$$\square + m^2)Ae^{-ip_\mu x^\mu} = (\partial_\nu \partial^\nu + m^2)Ae^{-ip_\mu x^\mu} = [(-ip_\mu)(-ip^\nu) + m^2]Ae^{-ip_\mu x^\mu} =$$

da cui :

$$[-p^2 + m^2]Ae^{-ip_\mu x^\mu} = 0$$

L'esponenziale è sempre non nullo per cui per cui o è nulla A, ma una funzione d'onda ovunque nulla non ha senso oppure $p^2 = m^2$. Da quest'ultima condizione possiamo ricavare p_0 infatti:

$$p^2 = P_o^2 - \vec{p}^2$$

Questa equazione è un'equazione agli autovalori per l'energia. Affinchè la soluzione sia soddisfatta p_0 deve valere:

$$p_0 = \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

L'onda piana è quindi soluzione dell'equazione di Klein-Gordon purchè la p_0 che compare nell'esponenziale sia questa⁴. Avendo quadrato l'equazione di Schroedinger per ottenere quella di Klein-Gordon, energia che se ne ricava può essere sia negativa che positiva; le soluzioni negative però non hanno senso fisico e questo ci fa capire come non possiamo interpretare la ϕ come una autofunzione.

⁴ Notiamo che a meno di fattori c posti uguali ad uno, questa è proprio l'energia cinetica relativistica.

Possiamo allora scrivere la soluzione come combinazione lineare di tutte le soluzioni (infinite essendo p una variabile continua) negative e positive interpretando l'energia come una frequenza:

$$\phi(x) = \int p d^3(A_p e^{-ipx} + A_p^* e^{-ipx})$$

Questa è una soluzione reale; ho posto la convenzione che p_o sia positivo ed assorbito il segno nella i . Per cui con questa scrittura ho esplicitato il doppio segno di p_o che quindi adesso è semplicemente:

$$p_o = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

⁵ Quando le ϕ diventeranno operatori saranno gli A e A^* a descrivere il campo.

Scriviamo ora le due soluzioni ad onda piana in modo da poter capire subito se sono a energia positiva o negativa:

$$f_{\vec{p}}^+(x) = A_p e^{-ipx} \quad \text{Onda piana ad energia positiva}$$

$$f_{\vec{p}}^-(x) = B_p e^{ipx} \quad \text{Onda piana ad energia negativa (-p)}$$

Ora vogliamo normalizzare le funzioni secondo il prodotto scalare che abbiamo definito:

$$\langle f_{\vec{p}}^+(x)_1, f_{\vec{p}}^+(x)_2 \rangle = i A_{p1}^* A_{p2} \int dx^3 [e^{ip_1 \cdot x} \partial_o^{\leftrightarrow} e^{-ip_2 \cdot x}] =$$

$$i A_{p1}^* A_{p2} \int dx^3 [(-i w_2) + (i w_1)] e^{ip_1 \cdot x} e^{-ip_2 \cdot x} = (2\pi)^3 i A_{p1}^* A_{p2} \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) 2w_{(1,2)}$$

Infatti l'integrale non una volta portati fuori i termini le costanti è proprio la trasformata di Fourier di 1 che tende alla delta di Dirac a meno del fattore (2π) al cubo. La delta a sua volta vincola p_1 ad essere uguale a p_2 e poiché sono vettori a norma fissa, se la delta coinvolge solo la parte cinetica, in realtà anche la parte temporale è vincolata. Se ne conclude che il prodotto scalare tra due funzioni ad energia pari è non nullo solo se le due funzioni hanno lo stesso quadrimpulso.

⁵In questo caso la mia soluzione sarà reale. Ovviamente nel caso complesso non c'è nulla di diverso, basta prendere due soluzioni reali sommarle e moltiplicare i ad una delle due e per linearità questa sarà ancora soluzione.

Ora imponiamo che il risultato trovato sia pari solo alla delta, cioè che $A = 1/\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}$ e arriviamo a riscrivere la soluzione positiva come:

$$f_{\vec{p}}^+(x) = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^3 2\omega}$$

La soluzione ad energia negativa sarà identica a meno di un segno all'esponente.

$$f_{\vec{p}}^-(x) = \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^3 2\omega}$$

Notiamo che le soluzioni di energia negativa hanno prodotto scalare negativo, quindi il prodotto scalare perde il suo significato di probabilità.

Siamo in condizione di riscrivere la ϕ come:

$$\phi(x) = \int dp^3 \{a_p f_{\vec{p}}^+(x) + a_p^* f_{\vec{p}}^-(x)\}$$

con

$$\langle f_{\vec{p}}^+(x), \phi \rangle = a_p \quad \text{e} \quad \langle f_{\vec{p}}^-(x), \phi \rangle = a_p^*$$

Ci chiediamo quali sono i commutatori delle a tra di loro.

$$[a_p, a_{p'}] = ?$$

Come si procede? Si calcolano a_p e a_p' dalle definizioni sopra, e si riscrive questo commutatore sfruttando le regole di quantizzazione dei commutatori ricavati dal formalismo canonico per le ϕ .

$$a_p = i \int dx^3 [e^{ipx}, \partial_0 \phi(x)]$$

e svolgendo i conti si trova:

$$[a_p, a_{p'}] = 0 \quad [a_p^*, a_{p'}^*] = 0 \quad [a_p, a_{p'}^*] = \delta(p - p')$$

queste tre trasformazioni rappresentano gli operatori di creazione e annichilazione di particelle del campo.

Se prendiamo una funzione d'onda piana, la sua norma è infinita. Per ovviare a questo supponiamo che lo spazio abbia un volume finito V ; la forma migliore è quella di un toro tridimensionale in cui una particella sparisce da una parte e riappare dalla parte opposta in modo da non

imporre che la funzione d'onda sia nulla ai bordi, cosa che romperebbe l'invarianza per traslazioni spaziali.

$$\phi(x, y, z) = \phi(x + l, y, z)$$

e la stessa cosa anche nelle altre due dimensioni. Imponendo queste condizioni sulle funzioni d'onda, si arriva ad una discretizzazione dell'impulso.

$$e^{ixp} = e^{i(x+l)p} \rightarrow e^{ip_x l} = 1 \rightarrow p_x l = 2\pi n$$

Quindi $p_x = \frac{2\pi}{l}n$ e $\phi = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{ipx}$; se l va all'infinito la discretizzazione scompare.

Notiamo in fine che se il volume è finito tutto quello che abbiamo detto finora rimane vero con sommatorie al posto di integrali e delta di Kroneker al posto di quelle di Dirac.

2.5 Osservabile energia

Adesso che abbiamo definito chi sono (attraverso le relazioni di commutazione) gli operatori, dobbiamo specificare in che spazio operano, e chi sono gli osservabili fisici associati a questo spazio, come energia e impulso.

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{2}{3}} \sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ipx} + a_p^+ e^{ipx})$$

$$[a_{p'}, a_p] = 0 \quad [a_{p'}^+, a_p^+] = 0$$

$$[a_{p'}, a_p^+] = \delta(p - p')$$

Dobbiamo scoprire chi sono gli osservabili dell'energia, impulso. L'energia scritta come autovalore dell'equazione di Klein-Gordon non ci soddisfa pienamente, perché come abbiamo visto può avere valori negativi. Tuttavia possiamo sfruttare il formalismo canonico che abbiamo introdotto per interpretare correttamente l'equazione di Klein-Gordon per arrivare ad un'altra espressione dell'energia, che interpreti φ non come funzione d'onda ma come operatore dello spazio di Hilbert.

Il nostro sistema è un sistema Lagrangiano. Una volta che abbiamo la lagrangiana possiamo descrivere l'energia attraverso l'hamiltoniana. Possiamo definire il momento canonico coniugato e costruire

l'hamiltoniana del sistema:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \Delta V_i \dot{\varphi}_i$$

$$H(p_i, q_i) = \sum_i p_i q_i - L$$

Questa hamiltoniana è conservata nel sistema se la Lagrangiana non dipende dal tempo esplicitamente (ma solo tramite le q e le \dot{q}).

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \dot{\varphi}_i - L = \sum \Delta V_i (\dot{\varphi}_i)^2 - L$$

Che nel limite per $\Delta V_i \rightarrow 0$ diventa

$$H = \int d^3x (\dot{\varphi}(x))^2 - L$$

Questa è una espressione generale per l'energia del sistema. Esplicitando la forma della lagrangiana per l'equazione di Klein-Gordon diventa (2.8):

$$H = \int d^3x \left[\dot{\varphi}^2 - \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2)}_{\mathcal{L}} \right]$$

Spezzando la somma su μ in componente temporale e componenti spaziali otteniamo:

$$H = \int d^3x \left[\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \left(\underbrace{\dot{\varphi}^2 + \partial_i \varphi \partial^i \varphi}_{-(\partial_i \varphi)^2} - m^2 \varphi^2 \right) \right]$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\dot{\varphi}^2 + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^2 \right] \quad (2.9)$$

Questa equazione (2.9) rappresenta l'energia classica del sistema. È una grandezza che si conserva durante l'evoluzione temporale⁶. Possiamo ottenere l'hamiltoniana quantistica sostituendo l'espressione di φ , e scrivendo H in funzione degli operatori quantistici a e a^+ .

⁶È dimostrato nelle prossime pagine.

In questa operazione i termini φ^2 e $(\dot{\varphi})^2$ generano quattro differenti termini in funzione di a e a^+ :

$$aa \quad a^+a \quad aa^+ \quad a^+a^+$$

Quantisticamente gli operatori a e a^+ non commutano, quindi i due termini centrali non possono essere sommati direttamente. Quando si procede all'integrazione in d^3x di questi quattro termini si ottiene che la coppia aa e a^+a^+ si annullano e sopravvivano solo i termini misti. Il calcolo completo è lasciato al lettore come esercizio (forse sarà incluso in appendice). Il risultato finale che si ottiene facendo questa sostituzione è:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3p \omega_p (a^+a + aa^+) \quad \omega_p = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} \quad \text{per } V \rightarrow \infty$$

Questa espressione è corretta quando l'hamiltoniana descrive un sistema di volume infinito. Nel caso di volume finito abbiamo visto che gli impulsi sono discretizzati dalla relazione

$$p = \frac{2\pi}{L}n$$

Per cui l'integrale diventa una serie:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{p_i} \omega_{p_i} (a_{p_i} a_{p_i}^+ + a_{p_i}^+ a_{p_i})$$

Gli operatori (a_{p_i} e $a_{p_i}^+$) di questa espressione sono leggermente diversi dai precedenti, perché sono operatori di volume finito (e commutano con la delta di Kroneker, non con quella di Dirac).

$$[a_{p_i}^+, a_{p_j}] = \delta_{p_i, p_j}$$

Siamo in una situazione formalmente identica a quella dell'oscillatore armonico. Abbiamo una somma di infiniti oscillatori armonici, una per ogni impulso permesso. Questo è risolvibile per via algebrica, con ogni oscillatore armonico che ha una frequenza differente.

Dal calcolo non relativistico dell'oscillatore armonico si scopre che l'operatore a^+a è un semidefinito positivo (i suoi autovalori non possono mai essere negativi).

$$a^+a |n\rangle = n |n\rangle$$

$$\langle n|a^+a|n\rangle = |a|n\rangle|^2$$

Gli operatori a e a^+ consentono di costruire tutti gli autostati dell'hamiltoniana:

$$a^+ |n\rangle = |n\rangle + 1 \quad a |n\rangle = |n-1\rangle$$

Poiché gli autostati non possono essere negativi, deve esistere un vettore mandato in zero da a

$$a |0\rangle = 0$$

Questo stato viene “annichilito” dall'operatore a , che pertanto si chiama operatore di **annichilazione** o di distruzione. viceversa poiché a^+ permette dallo stato fondamentale di passare agli stati eccitati (cosa che corrisponde come vedremo alla comparsa di una particella) viene chiamato operatore di **creazione**:

$$a^+ |0\rangle = |1\rangle$$

A differenza dell'oscillatore armonico disponiamo però di infiniti operatori di creazione e distruzione, una coppia per ogni possibile frequenza (continua per $V \rightarrow \infty$ o discreta per V finito) Lo stato corrispondente è costruito con il prodotto tensoriale di tutti gli spazi su cui operano tutti gli operatori a e a^+ . Lo stato fondamentale si crea usando il prodotto tensoriale degli stati fondamentali di tutti i possibili oscillatori armonici, questo stato fisico è annichilito da tutti gli operatori di annichilazione (per ogni valore di p). Questo stato si chiama *stato di vuoto*.

$$a_{p_1}^+ a_{p_1} \cdots a_{p_n}^+ a_{p_n} |0\rangle = 0$$

Applicando allo stato di vuoto una qualunque sequenza degli operatori di creazione a^+ si possono creare tutti gli autostati del sistema. L'hamiltoniana può essere riscritta in forma più semplice:

$$a^+a + aa^+ = a^+a + aa^+ - a^+a + a^+a = 2a^+a + [a, a^+] = 2a^+a + 1$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p (a^+a + aa^+) = \sum_p \omega_p \left(a^+a + \frac{1}{2} \right)$$

Questa espressione per l'hamiltoniana è proprio quella che si usa per l'oscillatore armonico. L'energia di un autostato è l'autovalore di questa hamiltoniana:

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$E_n = \sum_p \omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Tutte le energie sono ora definite positive. Abbiamo eliminato il problema di energie negative che nasceva dall'interpretazione della φ come funzione d'onda del sistema. Rimane tuttavia ancora un piccolo problema. Calcoliamo l'energia dello stato di vuoto.

$$E_0 = \sum_p \omega_p \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \infty$$

L'energia dello stato di vuoto è infinita! Gli oggetti ad infiniti gradi di libertà spesso presentano questo tipo di problemi, alcune grandezze appaiono essere infinite. In genere questi problemi sono dovuti ad una errata estensione del formalismo classico a quello quantistico, e possono essere evitati aggirandoli con opportuni mezzi.

Il questo caso particolare il problema non è così grave, perché l'energia è sempre definita a meno di una costante. Chi ci garantisce che l'hamiltoniana quantistica corretta può essere ricavata a partire da quella classica semplicemente sostituendo alle funzioni gli operatori? Nessuno, quello che abbiamo fatto è un semplice tentativo. Nella teoria quantistica ho pertanto il diritto di modificare un pochino le definizioni tratte dalla fisica classica. Ridefiniamo quindi l'hamiltoniana H buttando via un termine costante:

$$H = \sum_p \omega_p a_p^+ a_p$$

Abbiamo sottratto ad H l'energia di punto zero degli oscillatori. Con queste operazioni abbiamo definito gli stati del sistema:

$$H a_p^+ |0\rangle = \omega_p a_p^+ |0\rangle$$

$$H (a_{k_1}^+ \cdots a_{k_n}^+) |0\rangle = (\omega_{k_1} + \cdots + \omega_{k_n}) (a_{k_1}^+ \cdots a_{k_n}^+) |0\rangle$$

Questo mi da l'interpretazione fisica del sistema, i livelli energetici di questo sistema sono discreti e corrispondono ad un insieme di particelle quantistiche di massa m .

2.6 Osservabile impulso

Come si fanno a costruire gli osservabili basati su questo sistema? Esiste uno strumento potentissimo che si chiama teorema di Nöther.

Teorema 2.6.1 (Nöther) *In un sistema dinamico descritto da un principio di Azione, la presenza di una simmetria a trasformazione continua nell'azione implica l'esistenza di una grandezza fisica che si conserva lungo il moto naturale.*

Qual è la distinzione tra simmetria continua e discreta? Una simmetria continua (come la rotazione o la traslazione) ha un equivalente infinitesimo, una discreta (come l'inversione di assi e la parità, o la rotazione di angolo finito) no. Per le simmetrie discrete ci sono comunque conseguenze importanti, ma non è detto che esistano grandezze che si conservano nel moto.

La simmetria traslazionale garantisce la conservazione dell'impulso. Quello che proveremo a fare è a ricavare un operatore che si conserva in presenza di simmetria traslazionale, e quindi vedremo se è corretto interpretare quell'operatore come l'osservabile impulso.

Effettuiamo una traslazione:

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

$$O : \varphi(x)$$

$$O' : \varphi'(x')$$

Sotto traslazioni tutti i campi si trasformano alla stessa maniera:

$$\varphi'(x') = \varphi(x)$$

Questa relazione vale anche per i campi vettoriali o i campi spinoriali componente per componente. Il teorema di Nöther (Teorema 2.6.1) ha come ipotesi la simmetria dell'azione sotto traslazione:

$$S(x) = S'(x')$$

$$\int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x' \mathcal{L}'(x')$$

Da cui segue che anche la densità lagrangiana soddisfa la condizione:

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$$

Partiamo dall'invarianza della densità lagrangiana:

$$\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = 0$$

$$\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = 0 \quad (2.10)$$

Imponiamo che la traslazione sia infinitesima ($a \rightarrow 0$). In questa ipotesi posso interpretare i due termini a destra e a sinistra dell'equazione come due differenziali:

$$\mathcal{L}'(x^\mu + \varepsilon^\mu) - \mathcal{L}'(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu$$

L'altro differenziale corrisponde all'incremento della funzione, nel passaggio dalla forma funzionale \mathcal{L} in \mathcal{L}' , fatta a punto x fissato. Per capire come scrivere questo pezzo, vediamo come si comporta il campo φ :

$$\varphi'(x') = \varphi'(x + a) = \varphi(x)$$

Da cui segue che:

$$\varphi'(x) = \varphi(x - a)$$

Se $a = \varepsilon$ risulta

$$\varphi'(x) = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.11)$$

Poiché la densità lagrangiana è funzione di φ , posso fare la derivata di funzione composta:

$$\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi)$$

Unendo tutto nella 2.10:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) = 0$$

Il termine \mathcal{L}' nella prima derivata può essere tolto tranquillamente, l'errore che si compie nel fare questa operazione è infatti del secondo ordine, poiché $\mathcal{L}'(x)$ e $\mathcal{L}(x)$ hanno differenza di ordine ε , e quel termine è già moltiplicato per ε .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) = 0 \quad (2.12)$$

Ora dobbiamo imporre che la φ sia soluzione dell'equazione di Klein-Gordon. Questo perché la conservazione dell'impulso è soddisfatta solo se la funzione minimizza φ minimizza l'azione. Per farlo scriviamo le equazioni di Klein-Gordon in forma più generale possibile, sfruttando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}$$

Imporre questa uguaglianza significa imporre che la φ soddisfi le equazioni del moto (nel nostro caso l'equazione di Klein-Gordon). Sostituiamo nella (2.12):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) = 0$$

(Abbiamo scambiato δ con ∂_μ , operazione lecita) Ci accorgiamo che c'è una derivata di un prodotto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) = 0 \quad (2.13)$$

Dall'equazione 2.11 otteniamo:

$$\delta \varphi = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \varphi$$

Che sostituito nella (2.13) ci da:

$$\varepsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} - \varepsilon^\nu \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right] = 0$$

Questa equazione equivale in realtà a quattro equazioni scalari (una per ogni indice μ , che va da 0 a 4). Questo è diretta conseguenza del fatto che la traslazione di un vettore ε^μ nello spazio-tempo è arbitraria. Per scriverla in forma più comoda (uniformando gli indici dei due ε) posso sfruttare questa identità:

$$\varepsilon^\mu = \delta_\nu^\mu \varepsilon^\nu$$

Oppure, ricordando che la δ di Kroneker scritta con indici misti è proprio il tensore metrico, posso scriverla in forma relativisticamente covariante:

$$\varepsilon^\mu = g_\nu^\mu \varepsilon^\nu$$

Raccogliendo quindi ε^ν a fattore comune otteniamo:

$$\partial_\mu \varepsilon^\nu \underbrace{\left[g^\mu_\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right]}_{T^\mu_\nu} = 0$$

Questa espressione è relativisticamente covariante:

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$$

Questa legge è del tutto simile alla conservazione della carica e all'unitarietà del prodotto di Klein-Gordon, e corrisponde a quattro leggi di conservazione, per le quattro possibili scelte indipendenti del vettore ε^ν (o per le quattro componenti indipendenti ν del tensore).

Queste leggi di conservazione corrispondono alla conservazione del quadrimpulso.

La quantità che si conserva è quella di un quadrivettore definito nel seguente modo:

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}$$

Mostriamo che questo quadrivettore è realmente conservato:

$$\frac{d}{dt} \int d^3x T^{0\nu} = \int d^3x \partial_0 T^{0\nu} \quad (2.14)$$

La derivata temporale nel membro a sinistra è la derivata ordinaria, poiché integrando su tutte le variabili spaziali (in d^3x) rimane solo la dipendenza temporale (invece nell'espressione di destra la derivata si applica alla T prima dell'integrazione, quando ancora dipende anche dalle variabili spaziali).

Ricordando che:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Ricaviamo:

$$\partial_0 T^{0\nu} = -\partial_i T^{i\nu} - \vec{\nabla} \cdot \vec{T}^\nu$$

Sostituendola nella 2.14:

$$\frac{dP^\nu}{dt} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{T}^\nu$$

Applicando il teorema della divergenza:

$$\frac{dP^\nu}{dt} = - \int_S dS \hat{n} \cdot \vec{T}^\nu$$

Se il sistema è localizzato in una regione dello spazio, il flusso di $T^{i\nu}$ attraverso la superficie che racchiude il sistema è nullo.

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0$$

$$P^\nu = \text{const.}$$

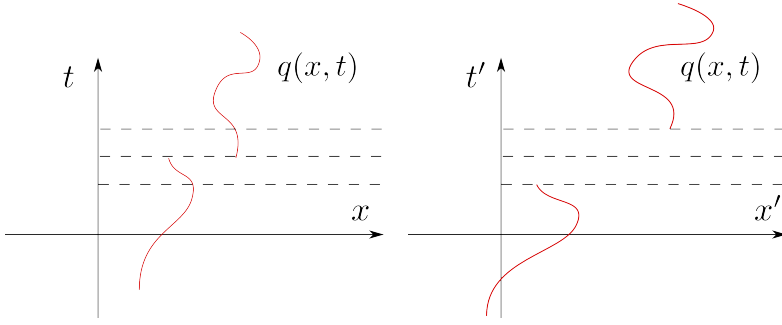
Se ho un volume finito, la variazione della quantità T_ν^0 può essere solo dovuta alla presenza di un flusso del vettore attraverso il bordo della regione che considero. Questo tipo di leggi di conservazione sono le uniche relativisticamente permesse. La legge che abbiamo appena osservato è molto simile alla conservazione della carica elettrica. In una teoria non relativistica la carica elettrica potrebbe conservarsi anche in un altro modo, un po' bizzarro.

Potrebbe ad esempio sparire e riapparire istantaneamente in una posizione diversa (Figura 2.2). In questo modo non si avrebbe flusso attraverso una superficie, e l'equazione mostrata precedentemente sarebbe violata, pur conservando ad ogni istante di tempo la stessa carica nel mio sistema. L'equazione di conservazione che abbiamo ricavato per P^ν è un'equazione locale, che specifica cioè che la carica deve essere conservata in ogni regione locale, e deve spostarsi con continuità nello spazio.

La conservazione non locale della carica è però vietata dalla relatività ristretta, infatti i due eventi nello spaziotempo che identificano lo sparire della carica in un punto, e il riapparire in un altro, avvengono simultaneamente (sono collegati da un vettore di tipo spazio). Esisterà quindi un sistema di riferimento in grado di modificare la sequenza temporale di questi eventi, in cui l'osservatore vede una carica sparire del tutto per un certo tempo, prima di riapparire, o vede apparire un'altra carica prima che l'altra sparisca.

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}$$

Le quattro quantità che si conservano sono le componenti del quadrimpulso. Per mostrare questo possiamo sfruttare il fatto di conoscere



(a) Sistema di riferimento principale (b) Altro sistema di riferimento

Figura 2.2: Le leggi di conservazione, per essere relativisticamente covarianti, devono essere *locali*. A destra è mostrato l'esempio di come potrebbe apparire una legge di conservazione non locale in una realtà non relativistica ($q(x,t)$ è la traiettoria nello spaziotempo di una carica), a sinistra è mostrato come lo stesso fenomeno appare in un sistema inerziale trasformato usando le trasformazioni di Lorentz.

una delle componenti del quadrimpulso, l'hamiltoniana. L'energia deve essere la componente zero:

$$P^0 \stackrel{?}{=} H$$

Mostriamolo:

$$P^0 = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} \partial^0 \varphi - g^{00} \mathcal{L} \right)$$

$$P^0 = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} \right)$$

Ma questa è proprio la definizione canonica di Hamiltoniana. Questo ci dimostra che l'hamiltoniana è una quantità conservata nel tempo se è presente l'invarianza traslazionale del sistema sotto traslazioni per vettori diretti di tipo \vec{e}_0 . In altre parole la conservazione dell'hamiltoniana è garantita per sistemi che sono invarianti a traslazioni temporali (ossia che non hanno una esplicita dipendenza dal tempo). Ricaviamo anche le altre componenti del quadrimpulso:

$$P^i = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} \partial^i \varphi - g^{0i} \mathcal{L} \right)$$

Poiché il tensore metrico è diagonale, l'ultimo termine è nullo.

$$P^i = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial^i \varphi = - \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial_i \varphi$$

Che può essere scritta in forma vettoriale:

$$\vec{P} = - \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \vec{\nabla} \varphi$$

Nel caso dell'equazione di Klein-Gordon (particella libera)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m}{2} \varphi^2$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi$$

Questo operatore non ha quasi nulla in comune con quello della meccanica quantistica ordinaria. Per ottenere l'operatore impulso nella teoria quantistica bisogna sostituire a φ la sua espressione.

2.6.1 Quadrimpulso su volumi finiti

Eseguiamo ora la sostituzione nel caso di volumi finiti.

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V} \sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ipx} a_p^+ e^{ipx})$$

Facendo le opportune sostituzioni ricaviamo l'impulso, come avevamo fatto per l'hamiltoniana:

$$H = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2} \omega_p (a_p^+ a_p + a_p a_p^+)$$

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2} \vec{p} (a_p^+ a_p + a_p a_p^+)$$

Anche in questo caso si ripresenta il problema dell'impulso di punto zero. Tuttavia poiché abbiamo ridefinito l'hamiltoniana sottraendo l'energia di punto zero, dobbiamo eseguire la stessa sottrazione sulle componenti spaziali del quadrimpulso, questo elimina l'infinito.

$$H = \sum_{\vec{p}} \omega_p a_p^+ a_p \quad \vec{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} a_p^+ a_p$$

Possiamo calcolare il quadrimpulso dello stato di vuoto:

$$P^\mu |0\rangle = 0$$

Possiamo provare a vedere cosa succede se si calcola il quadrimpulso di stati in cui è presente una particella.

$$P^\mu a_p^+ |0\rangle = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\vec{k}} \omega_k a_k^+ a_k a_p^+ |0\rangle \\ \sum_{\vec{k}} k^i a_k^+ a_k a_p^+ |0\rangle \end{array} \right.$$

Posso far commutare a_k con a_p^+ , infatti:

$$a_k a_p^+ = [a_k, a_p^+] + a_p^+ a_k = \delta_{k,p}$$

Poiché il secondo termine applicato allo stato di vuoto mi da il vettore nullo, posso trascurarlo:

$$P^\mu a_p^+ |0\rangle = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\vec{k}} \omega_k a_k^+ \delta_{kp} |0\rangle \\ \sum_{\vec{k}} k^i a_k^+ \delta_{kp} |0\rangle \end{array} \right.$$

$$P^\mu a_p^+ |0\rangle = \left\{ \begin{array}{l} \omega_p a_p^+ |0\rangle \\ p^i a_p^+ |0\rangle \end{array} \right.$$

Come si vede questo stato è ancora un autostato del quadrimpluso. Usando gli operatori a e a^+ abbiamo costruito una base di autostati dell'energia e dell'impulso.

Lo stato generico lo otteniamo prendendo combinazioni lineari degli stati. Anche tra stati con diverso numero di particelle!

$$|\psi\rangle = c_1 |0\rangle + c_2 |p\rangle$$

Lo stato precedente è ad esempio combinazione lineare dello stato di vuoto con quello in cui c'è nel sistema una particella ad impulso \vec{p} . Questo è un enorme passo avanti rispetto alla meccanica quantistica classica, in cui stati con diverso numero di particelle vivevano su spazi differenti (ottenuti come i prodotti tensoriali). La riordinazione fisica dello spazio di Hilbert che abbiamo fatto con questa interpretazione dell'equazione di Klein-Gordon ci permette di creare stati con un numero indefinito di particelle, e permette l'esistenza di interazioni che facciano transire il sistema da stati con n particelle a stati con m particelle ($n \neq m$). Questa teoria permette dunque di descrivere il comportamento di tutte quelle particelle il cui numero non è conservato, come ad esempio i fotoni (che possono essere creati o distrutti in modo rapido).

2.6.2 Quadrimpulso su volumi infiniti

Cosa succede quando ci troviamo a volume infinito? Gli operatori di creazione e annichilazione presentano commutatori differenti:

$$[a_p, a_k^+] = \delta(\vec{p} - \vec{k})$$

Riscriviamo quindi l'hamiltoniana e l'impulso nel caso infinito:

$$H = \int d^3p \omega_p a_p^+ a_p \quad \vec{P} = \int d^3p p \vec{p} a_p^+ a_p$$

Anche nello spazio a infinite dimensioni l'hamiltoniana e l'operatore impulso sono autostati del sistema?

$$H a_p^+ |0\rangle = \int d^3k \omega_k a_k^+ a_k a_p^+ |0\rangle = \int d^3k \omega_k a_k^+ [a_k, a_p^+] |0\rangle = \int d^3k \omega_k a_k^+ \delta(\vec{k} - \vec{p}) |0\rangle$$

$$H a_p^+ |0\rangle = \omega_p a_p^+ |0\rangle$$

Per l'impulso la dimostrazione è completamente analoga. Gli autostati che abbiamo trovato, sono ortonormali?

$$\langle p|k\rangle = \langle 0|a_p a_k^+ |0\rangle = \langle 0|[a_p, a_k^+] |0\rangle + \underbrace{\langle 0|a^+ k a_p |0\rangle}_{=0}$$

$$\langle p|k\rangle = \langle 0|\delta(\vec{p} - \vec{k})|0\rangle \quad (2.15)$$

L'equazione 2.15 ci assicura che gli stati sono tra loro ortogonali, e che sono normalizzati alla delta di Dirac (nel caso finitodimensionale ovviamente sono normalizzati alla delta di Kroneker, cioè 1).

2.7 Funzione d'onda

Possiamo guardare sottospazi di questo spazio. Un esempio è lo spazio di vuoto. Nel vuoto non ci sono particelle, questo è uno stato quantistico esistente. Poi ci sono stati di singola particella. Lo stato più generale possibile tra quelli di singola particella può essere scritto nel modo seguente:

$$|f\rangle = \int d\vec{p} f(\vec{p}) a_p^+ |0\rangle$$

In questo stato c'è una singola particella, sovrapposizione generica con pesi complessi di tutte le particelle con impulso p . La funzione $f(\vec{p})$ è la funzione d'onda della particella, e la probabilità di trovare una particella con impulso compreso tra p e $p+dp$ è calcolabile dal suo modulo quadro:

$$|f(\vec{p})|^2 d^3p = P$$

Questo è il formalismo ideale per descrivere stati in cui il numero di particelle è variabile, vediamo ad esempio lo stato più generale possibile con due particelle:

$$|\psi\rangle = \int d^3p d^3k f(\vec{p}, \vec{k}) a_p^+ a_k^+ |0\rangle$$

Anche ora $f(\vec{p}, \vec{k})$ è la funzione d'onda di uno stato a due particelle, e vive nello stesso spazio di Hilbert della $f(\vec{p})$ che abbiamo visto prima. Lo spazio di Hilbert è unico, ed è esattamente lo stesso che usavamo in meccanica quantistica non relativistica. Solo che in quello spazio si possono descrivere solo sistemi con stesso numero di particelle, ora abbiamo riorganizzato gli strumenti formali che descrivevano lo spazio per permettervi di descrivere anche i sistemi con numero variabile di particelle. In questo modo possiamo racchiudere l'intero universo nel nostro spazio di Hilbert: *nell'infinito c'entra tutto*.

2.7.1 Parità della funzione d'onda

Sappiamo dalla meccanica quantistica ordinaria che le particelle si distinguono in bosoni e fermioni. I primi hanno funzione d'onda simmetrica, i secondi hanno funzioni d'onda antisimmetriche. Uno dei grandi traguardi della meccanica quantistica relativistica consiste nell'associare lo spin corretto alle particelle, intero se sono bosoni, semi-intero se sono fermioni. Dimosteremo questo più avanti, quando introdurremo l'operatore momento angolare.

Cerchiamo di capire se l'equazione di Klein-Gordon descrive sistemi bosonici o fermionici. Prendiamo la funzione d'onda di una coppia di particelle:

$$|p, k\rangle = \int d^3p d^3k f(\vec{p}, \vec{k}) a_p^+ a_k^+ |0\rangle \quad (2.16)$$

Scriviamo la funzione d'onda scomponendola in parte simmetrica e parte antisimmetrica:

$$f(\vec{p}, \vec{k}) = \underbrace{\frac{f(\vec{p}, \vec{k}) + f(\vec{k}, \vec{p})}{2}}_{f_s(\vec{p}, \vec{k})} + \underbrace{\frac{f(\vec{p}, \vec{k}) - f(\vec{k}, \vec{p})}{2}}_{f_a(\vec{p}, \vec{k})}$$

Inseriamo questa espressione nella 2.16:

$$\begin{aligned} |p, k\rangle &= \int d^3p d^3k \left[\frac{f(\vec{p}, \vec{k}) + f(\vec{k}, \vec{p})}{2} + \frac{f(\vec{p}, \vec{k}) - f(\vec{k}, \vec{p})}{2} \right] a_p^+ a_k^+ |0\rangle = \\ &= \int d^3p d^3k f_s(\vec{p}, \vec{k}) a_p^+ a_k^+ |0\rangle + \frac{1}{2} \left[\int d^3p d^3k f(\vec{p}, \vec{k}) a_p^+ a_k^+ - \int d^3p d^3k f(\vec{k}, \vec{p}) a_p^+ a_k^+ \right] \\ &= \int d^3p d^3k f_s(\vec{p}, \vec{k}) a_p^+ a_k^+ |0\rangle + \frac{1}{2} \left[\int d^3p d^3k f(\vec{p}, \vec{k}) a_p^+ a_k^+ - \int d^3k d^3p f(\vec{k}, \vec{p}) a_p^+ a_k^+ \right] \\ &= \int d^3p d^3k f_s(\vec{p}, \vec{k}) a_p^+ a_k^+ |0\rangle \end{aligned}$$

Come si vede sopravvive solo la parte simmetrica, questo perché i due operatori di creazione (a_p^+ e a_k^+) commutano tra loro, e possono essere scambiati correttamente.

2.8 Paradosso della micro-causalità

In meccanica quantistica quando si fa una misura, il vettore di stato collassa istantaneamente su un autostato dell'osservabile. Questo collasso avviene istantaneamente. Ci può venire il dubbio se sia possibile usare il collasso per trasmettere informazioni.

Per scambiare informazioni su un sistema occorre misurare due osservabili che non commutano tra loro. Un ipotetico sistema per trasmettere informazioni potrebbe essere il seguente: Per trasmettere un bit l'osservatore A può decidere se effettuare o meno la misura con l'osservabile \hat{A} sullo stato del sistema. A questo punto l'osservatore B osserva lo stesso sistema, in una posizione differente, con l'osservabile \hat{B} che non commuta con \hat{A} , ma che ha lo stato di partenza come autostato.

Se avviene il collasso durante la misura di \hat{B} significa che l'osservatore A non ha perturbato il sistema con la sua misura, altrimenti significa che A ha già fatto collassare lo stato iniziale in uno stato differente.

In questo modo A può trasmettere bit di informazioni e B riceverle, alla velocità con cui avviene il collasso.

Se questo fosse possibile la teoria che abbiamo sviluppato violerebbe il principio di causalità. L'unico modo reale per sfruttare il collasso dello stato per trasmettere realmente informazione superluminari è quello di disporre di due operatori, che se applicati in due eventi nello spazio-tempo che distano di un quadrivettore di tipo spazio, non commutino tra di loro.

Dobbiamo dunque misurare il campo φ in due punti dello spazio tempo a distanza di tipo spazio.

Verifichiamo dunque se è possibile realmente comporre due operatori con le caratteristiche indicate (che non commutino a distanze di tipo spazio).

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad (x - y)^2 < 0$$

Possiamo scrivere la $\varphi(x)$ in questo modo:

$$\varphi(x) = \int d^3p \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} (a_p e^{-ipx} + a_p^+ e^{ipx}) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x)$$

Scriviamo esplicitamente il commutatore:

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= [\varphi_+(x) + \varphi_-(x), \varphi_+(y) + \varphi_-(y)] = \\ &= [\varphi_+(x), \varphi_-(y)] + [\varphi_-(x), \varphi_+(y)] = \\ &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_p \omega_k}} e^{-ipx + iky} [a_p, a_k^+] + \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_p \omega_k}} e^{ipx - iky} [a_p^+, a_k] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} e^{-i(x-y)p} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} e^{-i(y-x)p} \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato le regole di commutazione degli operatori di creazione e annichilazione.

Scriviamo ora il commutatore di $\phi(x)$ e $\phi(y)$ come:

$$\Delta(x - y) = [\varphi(x), \varphi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)})$$

Vogliamo ora dimostrare che:

$$\Delta(x - y) = \Delta(\Lambda(x - y))$$

per farlo è utile usare una proprietà della delta di Dirac, ovvero:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad \text{com} \quad f(x_i) = 0$$

la delta di spezza in una sommatoria sui punti in cui la f si annulla, normalizzate con la derivata in modo da garantire che questi non siano singolarità. Sfruttando questa proprietà si può scrivere⁷:

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta(p^{\circ 2} - \vec{p}^2 - m^2) = \frac{\delta(p^{\circ} - \omega_p) + \delta(p^{\circ} + \omega_p)}{2\omega_p}$$

Ora armati di questa uguaglianza andiamo a dimostrare l'invarianza relativistica della Δ ; per farlo mostreremo come i vari pezzi dell'integrale sono invarianti.

Cominciamo da una forma generale:

$$\int \frac{d^3p}{2\omega_p} f(\vec{p})$$

Questo possiamo riscriverlo come integrale quadridimensionale sfruttando la proprietà della delta dimostrata in precedenza:

$$\int \frac{d^3p}{2\omega_p} f(\vec{p}) = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^{\circ}) f(\vec{p}) = \int d^3p \underbrace{\left[\int dp^{\circ} \frac{\delta(p^{\circ} - \omega_p)}{2\omega_p} \right]}_{=\frac{1}{2\omega_p}} f(\vec{p})$$

infatti la delta si può spezzare nelle due delta di $(p^{\circ} \pm \omega_p)$ e la funzione di Heaviside seleziona solo quella positiva.

Ora cambiamo variabile da p a $\Lambda p'$ e abbiamo:

$$\int d^4p' \delta(p'^2 - m^2) \theta((\Lambda p')^{\circ}) f(\Lambda \vec{p}')$$

Il dp' trasforma tramite lo jacobiano che è unitario quindi nessun problema, la delta è invariante così come la f . L'unica quantità che può dar problemi è la θ in quanto in generale il segno non è un invariante relativistico a meno che i quadrivettori non siano di tipo luce o tempo. La delta di Dirac ci assicura che stiamo integrando su un vettore di tipo

⁷Ricordiamo che $p^{\circ} = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm \omega_p$ e $|p^{\circ'}| = 2\omega_p$.

tempo infatti per la delta $p^2 = m^2$, quindi anche la funzione di Heaviside non da problemi. Ora ci rimane da dimostrare che l'esponenziale è invariante anche lui

$$\Delta[\Lambda(x - y)] = \int \underbrace{\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}}_{d_{\mu p}} (e^{-ip[\Lambda(x-y)]} - e^{ip[\Lambda(x-y)]})$$

facciamo il cambio di variabile $p = \Lambda p'$

$$\int d_{\mu}(\Lambda p') (e^{-i(\lambda p')[\Lambda(x-y)]} - e^{i(\lambda p')[\Lambda(x-y)]}) = \Delta(x - y)$$

infatti negli esponenziali c'è il prodotto fra i quadrivettori trasformati che è un invariante per cambio di coordinate.

2.9 Propagatore di Feynman

Il nostro obiettivo adesso è quello di risolvere operatorialmente l'equazione di Klein-Gordon, in altre parole riuscire ad invertire l'equazione:

$$(\square + m^2)\varphi = F(x) \tag{2.17}$$

Dove $F(x)$ è la sorgente del mio campo φ . In caso di assenza di sorgenti per il campo φ questa si riconduce all'equazione di Klein-Gordon che abbiamo già studiato, che corrisponde alla soluzione per particelle libere. Se però c'è un potenziale o un'interazione, allora l'espressione generica della funzione φ sarà data dall'equazione 2.17. Il nostro obiettivo è cercare un operatore che mi consenta di invertire questa espressione facilmente.

Definizione 2.9.1 (Time-Ordering) *Sia T il superoperatore di time ordering definito nel modo seguente:*

$$T[\varphi(x), \varphi(y)] = \begin{cases} \varphi(x)\varphi(y) & x^0 > y^0 \\ \varphi(y)\varphi(x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

A questo operatore può essere data un'espressione analitica:

$$T[\varphi(x), \varphi(y)] = \theta(x^0 - y^0)\varphi(x)\varphi(y) + \theta(y^0 - x^0)\varphi(y)\varphi(x)$$

Definizione 2.9.2 (Propagatore di Feynman) *Il propagatore di Feynman è un operatore definito come il valor medio del vuoto dell'ordinamento temporale, ed è costruito nel seguente modo:*

$$i\Delta_F = \langle 0|T [\varphi(x), \varphi(y)] |0\rangle$$

È difficile dare direttamente un'interpretazione fisica a questo oggetto, però ad esempio: Supponiamo $x^0 > y^0$:

$$i\Delta_F = \overbrace{\langle 0|\varphi(x)}^{\text{Particella in } x} \underbrace{\varphi(y)|0\rangle}_{\text{Particella in } y}$$

Un'interpretazione fisica possibile di questo operatore è la probabilità data una particella al tempo y^0 in y di averne un'altra al tempo x^0 in x . È la probabilità che la particella si sia *spostata* dal punto x al punto y .

Cerchiamo adesso di verificare cosa succede se applichiamo l'operatore di Klein-Gordon sul propagatore di Feynman.

$$(\square + m^2)i\Delta_F = ?$$

Quando l'operatore di Klein-Gordon agisce sulle φ ottengo zero, però potrebbero esserci termini non nulli dovuti alle derivate temporali che agiscono anche sulle θ di Heviside della definizione di T . Per fare un calcolo esplicito ricordiamo la definizione della θ di Heviside e della sua derivata, intesa nel senso delle distribuzioni.

$$\theta[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)f(x)dx \doteq \int_0^{\infty} f(x)dx$$

Questa è la definizione di θ di Heviside. Questa distribuzione non possiede una derivata nel senso delle funzioni, però possiamo provare a eseguire la derivata simbolicamente:

$$\frac{d\theta}{dx}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{dx}f(x)dx$$

Per rendere questa derivata simbolica un oggetto reale, applichiamo la definizione di integrali per parti:

$$\frac{d\theta}{dx}[f(x)] = \theta(x)\frac{df}{dx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\frac{df}{dx}dx$$

Ricordando che nella teoria delle distribuzioni, le funzioni e tutte le derivate sono a dominio compatto, queste si annullano all'infinito.

$$\frac{d\theta}{dx} [f(x)] = - \int_0^\infty \frac{df}{dx} = -f(\infty) + f(0) = f(0)$$

Ma questa è la definizione della δ di Dirac, quindi possiamo dire che la derivata della distribuzione θ , nel senso della teoria delle distribuzioni, è proprio la δ di Dirac.

Applichiamo all'operatore di Feynman il d'alambertiano:

$$\square_x = \partial_0^2 - \nabla_x^2$$

Per semplicità applichamolo solo alla variabile x , la y di $i\Delta_F$ è un parametro indipendente. Il Laplaciano agisce solo sulle derivate spaziali, poiché nell'espressione di T le componenti spaziali compaiono solo dentro le φ , dobbiamo preoccuparci solo di cosa fa la derivata seconda rispetto al tempo.

$$\begin{aligned} \partial_0 i\Delta_F &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | (\partial_0 \varphi(x)) \varphi(y) | 0 \rangle + \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle + \\ &+ \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y) (\partial_0 \varphi(x)) | 0 \rangle - \delta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y) \varphi(x) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\partial_0 i\Delta_F = \langle 0 | T [\partial_0 \varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle + \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle$$

Grazie alla δ di Dirac il commutatore tra $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ è calcolato a tempi uguali, e sappiamo che a tempi uguali questo commutatore è nullo. Calcoliamo la derivata seconda rispetto al tempo:

$$\partial_0 \partial^0 i\Delta_F = \langle 0 | T [\partial_0 \partial^0 \varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle + \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\partial_0 \varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle$$

Il secondo commutatore questa volta non è più nullo a tempi uguali, ma è pari a $-i\delta(x - y)$:

$$\partial_0 \partial^0 i\Delta_F = \langle 0 | T [\partial_0 \partial^0 \varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle - \underbrace{i \delta(x^0 - y^0) \delta^3(\vec{x} - \vec{y})}_{\delta^4(x-y)}$$

Questo è il risultato dell'azione delle derivate temporali sul propagatore di Feynman. Adesso vogliamo calcolarci il laplaciano. Quando inserisco il laplaciano, questo non agisce sulle θ (funzioni solo di x^0), e finisce direttamente dentro l'espressione di T :

$$(\square + m^2) i\Delta_F = \langle 0 | T \left[\underbrace{(\square + m^2) \varphi(x)}_{=0}, \varphi(y) \right] | 0 \rangle - i\delta^4(x - y)$$

$$(\square + m^2)i\Delta_F = -i\delta^4(x - y)$$

Questo risultato è impressionante, poiché ci permette di stabilire che il propagatore di Feynman è proprio una funzione di Green, e permette di invertire l'equazione di Klein-Gordon (è l'inverso dell'operatore di Klein-Gordon).

La funzione di Green è una distribuzione a cui applicando l'operatore differenziale che definisce l'equazione si ottiene una δ di Dirac, e permette risolvere l'equazione differenziale. Vogliamo risolvere l'equazione differenziale dell'operatore di Klein-Gordon.

$$(\square + m^2)\varphi(x) = F(x)$$

Questa equazione è molto simile a quella per il campo elettromagnetico, se infatti prendiamo i fotoni $m = 0$, questa equazione si riconduce all'equazione generale dell'elettromagnetismo:

$$\square\varphi = F$$

Dove F è la mia quadricarica, e φ è un quadripotenziale dei campi elettromagnetici. Analogamente in generale questa equazione con $m \neq 0$ è l'equazione di una particella soggetta a forze. Se conosciamo una funzione di Green dell'operatore di Klein-Gordon abbiamo risolto il problema. Sia G la funzione di Green, soddisfa la equazione

$$(\square + m^2)G(x - y) = \delta^4(x - y)$$

Allora la soluzione all'equazione di Klein-Gordon può essere scritta come:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int d^4y G(x - y)F(y) \quad (2.18)$$

Dove $\varphi_0(x)$ è la soluzione all'equazione omogenea di Klein-Gordon (di cui abbiamo già calcolato la soluzione), e l'integrale in d^4y è uno degli integrali particolari dell'equazione di Klein-Gordon estesa (2.17). Mostriamo che la (2.18) sia effettivamente soluzione della (2.17):

$$(\square + m^2)\varphi(x) = \underbrace{(\square + m^2)\varphi_0(x)}_{=0} + \int d^4y \underbrace{(\square + m^2)G(x - y)}_{\delta^4(x-y)} F(y) = F(x)$$

Quindi la conoscenza delle funzioni di Green mi permette di risolvere buona parte dei problemi che si applicano alla tecnologia (descrivendo come sappiamo anche i campi elettromagnetici). È chiaro che

questa equazione non fornisce la soluzione a tutti i problemi di elettrodinamica, perché questa equazione ci dice soltanto in che modo i campi elettromagnetici risentono della distribuzione di cariche e correnti. Poi bisognerebbe calcolare come le cariche e correnti risentono dei campi magnetici, riposizionandosi a loro volta. Tuttavia nella maggior parte dei casi ad interesse tecnologico (antenne e circuiti) si può trascurare l'effetto del campo elettromagnetico nel modificare le mie cariche e correnti, e quindi la soluzione all'equazione di Klein-Gordon è sufficiente.

Sappiamo quindi che il propagatore di Feynman è un operatore di Green dell'equazione di Klein-Gordon, cerchiamone ora un'espressione analitica. Il sistema che sto considerando è un'equazione differenziale a coefficienti costanti, che può essere risolta con la trasformata di Fourier (che mi riconduce l'equazione differenziale in un'equazione algebrica, più semplice da risolvere):

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \tilde{G}(q) e^{-iq(x-y)}$$

Abbiamo scritto la $i\Delta_F$ come antitrasformata di Fourier di \tilde{G} . Impostiamo l'uguaglianza ricavata:

$$(\square + m^2)i\Delta_F(x-y) = -i\delta^4(x-y)$$

$$(\square + m^2) \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \tilde{G}(q) e^{-iq(x-y)} = -i \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)}$$

Ora $\tilde{G}(q)$ non è funzione delle x per cui l'operatore d'Alembertiano non tocca questa espressione, e agisce solo sull'esponenziale, le cui derivate sono molto semplici da calcolare:

$$\int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \tilde{G} [(-i)^2 q_\mu q^\mu + m^2] e^{-iq(x-y)} = -i \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)}$$

Poiché le trasformate di Fourier sono invertibili, se le trasformate di Fourier sono uguali anche gli oggetti trasformati sono uguali. Questo è sancito dal teorema fondamentale delle trasformate di Fourier.

$$\tilde{G}(-q^2 + m^2) = -i$$

$$\tilde{G} = \frac{i}{q^2 - m^2}$$

Da cui abbiamo ricavato l'espressione dell'operatore $i\Delta_F$.

$$i\Delta_F = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} e^{-iq(x-y)}$$

Il problema di usare questa formula per il propagatore è che il denominatore ha degli zeri quando q è tale che $q^2 = m^2$.

$$q_0^2 - |\vec{q}|^2 - m^2 = 0 \quad q_0 = \pm \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} = \pm \omega_q$$

Purtroppo il denominatore si annulla malamente, infatti possiamo esplicitare questi zeri nel seguente modo:

$$i\Delta_F = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(x-y)}}{(q^0 - \omega_q)(q^0 + \omega_q)}$$

Ci sono due singolarità di potenza 1, che quindi vanno come $\frac{1}{x}$, che non è integrabile, questo da dei problemi di convergenza. Questa formula così come è scritta non ha senso, va riaggiustata senza rovinare le sue proprietà matematiche.

Ad esempio potremo pensare di integrarla su un dominio complesso, aggirando le singolarità.

Ci sono più possibili percorsi per aggirare le due singolarità, ciascun percorso genera una formula differente. Classicamente sono tutti quanti buone funzioni di Green, tutte quante risolvono l'equazione differenziale correttamente. Tuttavia, dal punto di vista quantistico solo una di loro è quella che ci interessa realmente (Figura 2.3).

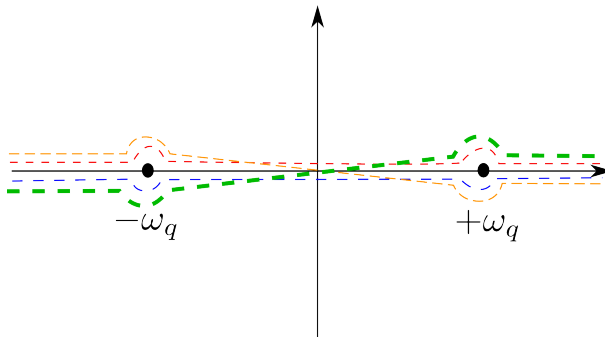


Figura 2.3: In figura sono mostrati tutti i possibili percorsi su come aggirare le due singolarità dell'asse reale, attraverso il cammino complesso. In verde è mostrato il percorso che è utilizzato in fisica quantistica.

Vedremo ora di integrare passando sotto la prima singolarità e sopra la seconda. Poiché l'integrale complesso deve essere un circuito chiuso

dobbiamo scegliere in che modo chiudere l'esponenziale. Scegliamo ad esempio il caso in cui:

$$x^0 - y^0 > 0$$

In questo caso per far convergere l'integrale la chiusura del percorso deve essere fatta attraverso gli immaginari negativi (in basso). L'integrale che da problemi è quello in q^0 , isoliamolo:

$$\int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{ie^{-iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_q)(q^0 - \omega_1)}$$

L'esponenziale parametrizzando q^0 lungo la chiusura di circonferenza in basso:

$$q^0 = \alpha - i\beta \quad \beta > 0$$

L'esponenziale in modulo diventa:

$$\left| e^{-i\alpha(x^0-y^0)} e^{-i(-i\beta)(x^0-y^0)} \right| = e^{-\beta(x^0-y^0)}$$

Quindi a seconda del segno che assume $(x^0 - y^0)$ si sceglie una diversa chiusura del cammino. L'integrale su questa chiusura è zero, in quanto l'esponenziale decrescente ammazza facilmente il valore dell'integrando.

Il percorso è fatto in senso orario, quindi dobbiamo moltiplicare il residuo per -1 :

$$\int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{ie^{-iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_q)(q^0 - \omega_1)} = -2\pi i \text{res} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{ie^{-iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_q)(q^0 - \omega_1)} \right]$$

$$\int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{ie^{-iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_q)(q^0 - \omega_1)} = -2\pi i \frac{ie^{-i\omega_q(x^0-y^0)}}{2\pi(\omega_q + \omega_q)}$$

$$\int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{ie^{-iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_q)(q^0 - \omega_1)} = -i \frac{ie^{-i\omega_q(x^0-y^0)}}{2\omega_q}$$

Ora possiamo riscrivere il propagatore di Feynman:

$$i\Delta_F = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{ie^{iq(x-y)}}{2\omega_q} \quad q^0 = \omega_q$$

Questo oggetto qui è effettivamente il valor medio del vuoto:

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{iq(x-y)}}{2\omega_q} \quad \text{Se } x^0 - y^0 > 0$$

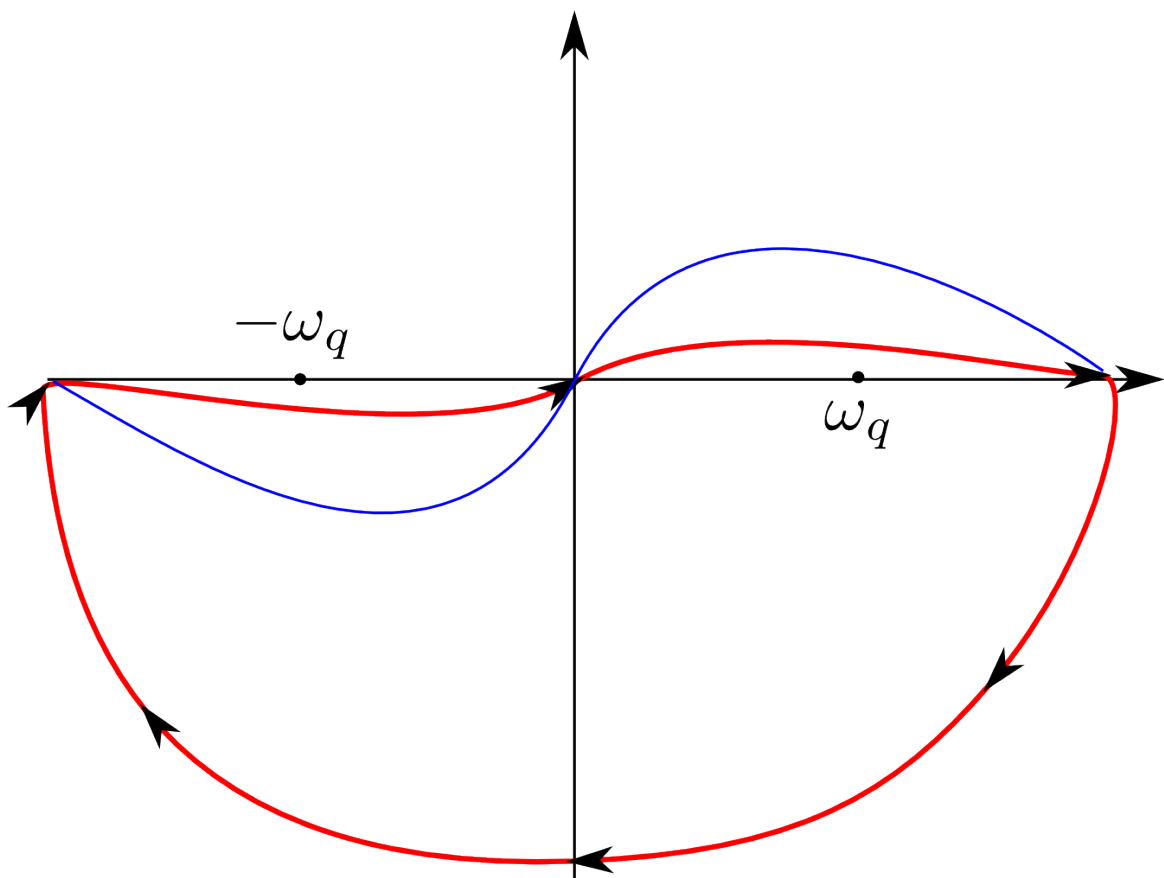


Figura 2.4: Il cammino complesso che scegliamo in caso $x^0 - y^0 > 0$ è quello mostrato in figura. È indifferente scegliere il cammino rosso o il cammino blu, poiché tra l'uno e l'altro non vi sono delle singolarità. Il percorso è fatto in senso orario, quindi bisogna prendere un segno meno.

Questa scelta di cammino di integrazione è l'unica che effettivamente mi permette di riottenere l'espressione quantistica del propagatore. Naturalmente se $x^0 - y^0 < 0$ avremo dovuto scegliere la chiusura del percorso verso gli immaginari positivi, questo mi avrebbe cambiato segno (il percorso sarebbe stato concluso in senso orario) ma anche il residuo da calcolare⁸. Il risultato sarebbe stato che l'integrale si sarebbe ottenuto per:

$$\langle 0 | \varphi(y) \varphi(x) | 0 \rangle$$

Quindi effettivamente questa scelta di percorsi riproduce correttamente la definizione iniziale che avevamo dato al propagatore di Feynman:

$$i\Delta_F = \langle 0 | T [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle$$

Un metodo alternativo per risolvere questo stesso problema consiste nello spostare le singolarità sul piano complesso. Si sostituisce al denominatore incriminato l'espressione in limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

E quindi si integra sull'asse reale. Questo riproduce esattamente il conto che abbiamo fatto.

2.10 Conservazione della carica

Riprendiamo l'equazione di Klein-Gordon e vediamo di estendere quanto fatto finora per campi reali al caso complesso. Ridefiniamo la densità lagrangiana immaginando di avere due variabili indipendenti ϕ e $\bar{\phi}$ che poi identificherò con ϕ e il suo complesso coniugato.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - m^2 \bar{\phi} \phi$$

Ora calcolo la variazione di L; se avessi messo i complessi coniugati la variazione avrebbe dato pezzi dipendenti, uso questo trucco in modo da poter variare tutte le quantità di L indipendentemente.

$$\delta \int \mathcal{L} dx^0 = \int d^4x \{ \partial_\mu \delta \bar{\phi} \partial^\mu \phi + \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \delta \phi - m^2 (\delta \bar{\phi}) \phi - m^2 \bar{\phi} (\delta \phi) \} = 0$$

⁸Con chiusura verso gli immaginari positivi la singolarità interna al percorso sarebbe stata quella verso $-\omega_q$.

integrando per parti e ricordando che le ϕ vanno a zero all'infinito (annullano cioè i termini costanti), otteniamo:

$$\int d^4x \{ -\delta\bar{\varphi}(\square\varphi + m^2\varphi) - \delta\varphi(\square\bar{\varphi} + m^2\bar{\varphi}) \} = 0$$

questo si annulla se le due quantità fra parentesi si annullano, ovvero se vale l'equazione di Klein-Gordon contemporaneamente per φ e $\bar{\varphi}$:

$$\begin{cases} (\square\varphi + m^2\varphi) = 0 \\ (\square\bar{\varphi} + m^2\bar{\varphi}) = 0 \end{cases}$$

ora posso identificare le $\bar{\varphi}$ con φ^* , e questo ha valenza generale perchè lungo il moto sono sempre distinte.

Qui possiamo applicare il teorema di Noether, essendo la lagrangiana indipendente per variazione di φ e $\bar{\varphi}$ troverò una quantità conservata associata a questa invarianza. Definiamo

$$\varphi'(x) = e^{i\alpha}\varphi(x) \quad \text{e} \quad \bar{\varphi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\varphi}(x)$$

L'azione è invariante sotto questa trasformazione ed è facile calcolare la quantità conservata. Vediamo prima di tutto come si esprime la variazione delle φ :

$$\varphi(x)' \sim \varphi(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\alpha = (1 + i\alpha)\varphi \quad \rightarrow \quad \delta\varphi = i\alpha\varphi$$

e similmente per la quella barrata.

Adesso possiamo calcolare la quantità conservata infatti:

$$\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = 0$$

$$0 = \frac{\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial_\mu(\delta\varphi) + \frac{\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\varphi}}\partial_\mu(\delta\bar{\varphi}) + \frac{\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\mathcal{L}}{\partial\bar{\varphi}}\delta\bar{\varphi}$$

se uso l'identità di lagrange $\frac{\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi = \partial_\mu\frac{\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial_\mu(\delta\varphi)$ sugli ultimi due termini si possono interpretare i quattro termini come le derivate composte di due:

$$0 = \partial_\mu \left\{ \frac{\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta\varphi + \frac{\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\varphi}}\delta\bar{\varphi} \right\}$$

e sostituendo le variazioni calcolate in precedenza troviamo

$$i\partial_\mu \left\{ \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \varphi - \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\varphi}} \bar{\varphi} \right\} = i\partial_\mu \{ \bar{\varphi} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \varphi \} = 0$$

la quantità conservata è proprio il prodotto scalare. Chiamiamo Q l'integrale:

$$Q = i \int \vec{d}x \bar{\varphi} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \varphi$$

e cerchiamo di dargli un significato fisico. Prendiamo un operatore ϕ formato da due operatori di uno di distruzione a e uno di creazione b^+ :

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega}} a e^{-ipx} + b^+ e^{ipx}$$

possiamo scrivere facilmente i commutatori

$$[\phi, \bar{\phi}] = 0 \quad \text{e} \quad [\pi_\phi(x), \bar{\phi}(y)] = \delta(x - y)$$

da queste otteniamo le regole di commutazione per a e b

$$[a, b] = 0 \quad \text{e} \quad [a, b^+] = 0$$

quindi $\langle 0|[a, b^+]|0\rangle = 0$, per cui i due stati che identificano le due particelle sono ortogonali; hanno lo stesso impulso ma cariche diverse, se infatti riscriviamo la Q in termini di a e b e la applichiamo agli stati vediamo che

$$Q = \int d^3p (a^+ a - b^+ b) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Q a^+ |0\rangle = a^+ |0\rangle \\ Q b^+ |0\rangle = -b^+ |0\rangle \end{cases}$$

conta quante particelle ci sono nello stato. Il primo termine mi dà un contributo positivo e il secondo uno negativo; applicato allo stato i dà la carica totale, che è conservata.

Capitolo 3

Quantizzazione del campo elettromagnetico

Nel capitolo precedente abbiamo affrontato in maniera esaustiva la trattazione quantistica di un campo scalare, reale o complesso.

3.1 Forma covariante dell'elettromagnetismo

Prima di estendere la teoria al campo elettromagnetico, in modo da ricavare le interessanti proprietà dei fotoni, richiamiamo qualche conoscenza dell'elettromagnetismo, e mostriamo come questa sia una teoria intrinsecamente covariante per trasformazioni di Lorentz.

Ci riferiremo sempre al caso del campo elettromagnetico nel vuoto¹. Il campo elettromagnetico nel vuoto è descritto da due vettori (\vec{E} e \vec{B})

¹Trascureremo la presenza di dielettrici o conduttori nello spazio, limitandoci alla trattazione di cariche o correnti nel vuoto.

che soddisfano le equazioni di Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Maxwell ha aggiunto soltanto il termine della corrente di spostamento a queste equazioni (che già erano note come equazioni di Gauss-Ampere-Faraday. Tuttavia quel termine è quello che permette di accoppiare campi elettrici e magnetici, se non ci fosse la radiazione elettromagnetica non potrebbe propagarsi.

Queste equazioni si possono scrivere in forme covarianti sotto trasformazioni di Lorentz. Si introduce il tensore di Maxwell, un tensore a due indici che vanno da 0 a 3, antisimmetrico (ha sei componenti indipendenti). Le sei componenti indipendenti corrispondono al campo elettrico e al campo magnetico, secondo queste regole:

$$F^{0i} = E^i \quad F^{jk} = \varepsilon^{ijk} B^i$$

Dove con ε si intende lo pseudotensore di Levi-Civita, antisimmetrico, con

$$\varepsilon^{123} = 1$$

Grazie a questa scrittura del tensore di Maxwell è possibile scrivere in forma tensoriale le equazioni (3.1):

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu \quad (3.2)$$

Dove abbiamo definito la quadricorrente J^ν in questo modo:

$$J^\nu \doteq \left(\rho, \frac{\vec{J}}{c} \right) \quad (3.3)$$

La (3.2) rappresenta le equazioni di Ampere e Gauss. Infatti:

$$\nu = 0$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{00} + \partial_i F^{0i} &= J^0 \\
\partial_i E^i &= \rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\
\nu &= i \\
\partial_0 F^{i0} + \partial_l F^{il} &= J^i \\
-\frac{\partial E^i}{c \partial t} + \varepsilon^{kil} \frac{\partial B^k}{\partial x^i} &= J^i
\end{aligned}$$

Che espressa in forma vettoriale diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\vec{J}}{c} - \frac{\partial \vec{E}}{c \partial t}$$

L'equazione 3.2 è covariante sotto qualunque trasformazione che mi cambia F e J , infatti è scritta completamente in termini di componenti controvarianti e derivate covarianti (che sono le grandezze che si misurano realmente in laboratorio). Questo mi garantisce l'invarianza di queste due equazioni dell'elettromagnetismo sotto trasformazioni affini arbitrarie, e non mi impone nessun'altra condizione sul tipo di trasformazione.

Cos'è che allora impone che le trasformazioni che rendono covariante tutto l'elettromagnetismo siano le trasformazioni di Lorentz? Le due equazioni che rimangono.

$$\partial^\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.4}$$

L'equazione (3.4) rappresenta le altre due equazioni di Maxwell, però come si vede questa volta è espressa in termini di coordinate covarianti e derivate controvarianti, occorre quindi definire come si passa dagli indici covarianti a controvarianti (che sono quelli misurati realmente in laboratorio). Siamo obbligato a manipolare la posizione degli indici, per farlo è necessario definire una metrica.

Perché queste equazioni descrivano correttamente anche le altre due equazioni di Maxwell non si può usare la metrica euclidea, verrebbe fuori un errore su un segno. La metrica pseudoeuclidea di Minkowsky invece consente di riprodurre correttamente le equazioni di Maxwell. Quindi, poiché la metrica Minkowskiana è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, le uniche matrici Λ che rendono covariante l'elettromagnetismo sono quelle di Lorentz.

Adesso le equazioni (3.2) e (3.4) sono entrambe covarianti per trasformazione di Lorentz. Poiché queste due equazioni descrivono tutto l'elettromagnetismo, tutto l'elettromagnetismo è covariante sotto trasformazioni di Lorentz.

In realtà per abbassare li indici del tensore elettromagnetico non serve definire una metrica, poiché il tensore $F_{\mu\nu}$ può essere definito attraverso lo pseudo-tensore di Levi-Civita:

$$F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

E quindi le equazioni di Maxwell omogenee si scrivono nella forma:

$$\partial^\mu F_{\nu\mu} = 0$$

Quello che realmente ci obbliga a definire la metrica di Minkowsky (e quindi le trasformazioni di Lorentz) è l'indice alto della derivata:

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

Quindi riscrivendo l'equazione in termini di quantità osservabili in laboratorio si ottiene:

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = 0 \tag{3.5}$$

Queste due equazioni dipendono quindi dalla forma particolare della metrica g . Se si sceglie una metrica euclidea, non esiste un modo di definire F covariante in modo tale da far tornare i segni nella legge di Faraday-Neumann. Quindi, in un certo senso, è corretto affermare che la legge di Lenz è necessaria per la creazione di una metrica non euclidea che rende covariante l'elettromagnetismo.

Adesso mostriamo che l'equazione (3.5) sia realmente tensoriale. La ε , è uno pseudotensore, ossia è invariante solo sotto trasformazioni di Lorentz proprie.

Sia Λ una qualunque matrice, vale la seguente relazione:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta = \det(\Lambda) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Questa è proprio la definizione di determinante, infatti a destra abbiamo la somma su tutte le possibili permutazioni degli indici delle colonne e delle righe delle Λ , tutti diversi tra loro, i cui rispettivi termini sono moltiplicati tra loro, con segno determinato dalla parità della permutazione. La somma di prodotti di una sequenza di colonne assegnata

dall'inizio, permutazione, e poi il prodotto di tutti gli elementi, e gli indici di riga devono essere tutti diversi tra di loro. Questa è proprio la definizione di determinante. Cosa succede quando tratto epsilon come un tensore a quattro indici? Se la trasformazione ha determinante 1 la epsilon si trasforma come un tensore ad indici covarianti, questo tensore è esattamente lo stesso in tutti i sistemi di riferimenti (come il tensore metrico). Sotto trasformazioni proprie questo oggetto si trasforma come un tensore. Si chiama pseudotensore perché se la trasformazione non è propria le componenti cambiano segno.

Quindi anche $F_{\mu\nu}$ si trasforma come un tensore covariante

$$F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

Da cui le equazioni di Maxwell proprie devono rappresentare un vettore covariante:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

Questo oggetto è un vettore covariante. Che deve trasformarsi come tale.

Le due equazioni omogenee permettono di definire i potenziali elettromagnetici:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Il teorema di Klebsch ci assicura che, se la regione in cui un campo è a divergenza nulla è semplicemente connessa, allora posso esprimere \vec{B} come il rotore di un altro campo vettoriale.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Il campo vettoriale \vec{A} non è determinato in modo univoco, ma ha un grado di libertà:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

Infatti \vec{A}' è ancora potenziale vettore di \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

\vec{A} è determinato a meno di un campo gradiente. Inserendo questa espressione nell'altra equazione omogenea, posso ricavare un campo irrotazionale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right) = 0$$

Se i campi sono definiti in una regione semplicemente connessa è possibile definire un campo scalare ϕ tale che:

$$\vec{\nabla} \phi = \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}}$$

Questo campo prende il nome di potenziale scalare.

L'esistenza dei due campi potenziali soddisfa automaticamente l'equazioni di Lorentz omogenee.

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \end{cases}$$

Vedremo che le quantità A e ϕ sono fondamentali per la fisica quantistica, ma non sono quantità univocamente determinate. Adesso proviamo a cambiare A di un certo campo gradiente:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(x, t)$$

\vec{B} è invariante per questo tipo di trasformazioni, vediamo se è invariante anche il campo elettrico:

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \dot{f}$$

Con questa sostituzione il campo elettrico cambia! Un modo per mantenere \vec{E} invariante è quello di trasformare contemporaneamente anche il potenziale scalare:

$$\phi' = \phi + \frac{1}{c} \dot{f}$$

Se faccio contemporaneamente queste due trasformazioni il campo elettrico rimane invariato. Quindi i due campi \vec{A} e ϕ non sono univocamente determinati, ma sono determinati a meno di una stessa funzione f . Questa è l'invarianza di Gauge: è sempre possibile definire a piacere una funzione f per trasformare potenziale vettore e potenziale scalare,

purché le due trasformazioni avvengano insieme. In formalismo quadridimensionale l'invarianza di Gauge assume una forma più comoda e compatta. Possiamo riunire potenziale scalare e potenziale vettore in un unico quadrivettore:

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

Con questa definizione possiamo riscrivere il tensore di Maxwell in modo molto più semplice:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$$

È immediato verificare che questo tensore è antisimmetrico, e vediamo di ricostruirne le componenti:

$$F^{0i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}} = E^i$$

Analogamente per il campo magnetico:

$$F^{12} = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 = -\frac{\partial A^1}{\partial x^2} + \frac{\partial A^2}{\partial x^1} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^3 = B^3$$

In questo formalismo tutto diventa molto più semplice, l'invarianza di Gauge corrisponde alla condizione:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f(x, t)$$

Il quadripotenziale A^μ è definito a meno di un quadrigradiente di una funzione scalare arbitraria. Questo può essere mostrato semplicemente:

$$F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \partial^\nu \partial^\mu f - \partial^\mu \partial^\nu f$$

Poiché l'ordine con cui si fanno le derivate commuta effettivamente possiamo definire A a meno di un quadrigradiente. È molto più semplice trattare l'invarianza di Gauge in quattro dimensioni, poiché non dobbiamo occuparci di potenziale scalare e vettoriale separatamente.

Da adesso in poi poniamo $c = 1$, e continuiamo in questo sistema di coordinate conveniente.

Con questa nuova relazione le equazioni di Maxwell si riducono semplicemente a:

$$\begin{cases} \partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu \\ F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \end{cases} \quad (3.6)$$

Il gruppo omogeneo è soddisfatto dalla relazione che mi definisce F . Questo può essere dimostrato semplicemente infatti:

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} &= \partial^\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma) = \\
 &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu \partial^\sigma A^\rho - \partial^\mu \partial^\rho A^\sigma) = \\
 &= \partial^\mu \partial^\sigma A^\rho (\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} - \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}) = \\
 &= 2\partial^\mu \partial^\sigma A^\rho \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0
 \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che abbiamo un tensore simmetrico in μ e σ (le derivate parziali commutano) prodotto con un tensore antisimmetrico in μ e σ ($\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$). Poiché tensori simmetrici e antisimmetrici sono ortogonali il loro prodotto è nullo.

Il sistema (3.6) può essere risolto, sostituiamo la seconda nella prima:

$$\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = J^\mu$$

$$\square A^\nu - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = J^\mu$$

Possiamo fare una scelta di Gauge che ci fa comodo, possiamo scegliere una forma particolare della f in modo che il secondo termine di questa equazione si semplifica.

$$\partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0$$

Questo è possibile se esiste una f che mi annulla la quadridivergenza di A^ν . Vedremo a breve che questa scelta è realmente possibile, e prende il nome di Gauge di Lorenz².

Con questa scelta le equazioni di Maxwell si riducono a:

$$\square A^\mu = J^\mu$$

Dimostriamo ora che effettivamente esiste una funzione f che mi consente di annullare la quadridivergenza di A^μ . Supponiamo di trovarci un una Gauge tale che

$$\partial_\mu A^\mu \neq 0$$

E facciamo un cambiamento di Gauge con f tale che:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \quad \text{Con } \partial_\mu A'^\mu = 0$$

²Intressante sapere che Lorenz e Lorentz sono due persone diverse.

Esiste una scelta di f che soddisfa questa condizione?

$$\partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu f) = 0$$

$$\square f = -\partial_\mu A^\mu$$

Se f esiste deve soddisfare questa equazione differenziale. Questa equazione ha soluzione e sappiamo anche costruirla, perché conosciamo la funzione di Green dell'operatore differenziale d'alambertiano (caso particolare del propagatore di Feynmann per le equazioni di Klein-Gordon in cui $m = 0$).

$$\square G(x - y) = \delta(x - y)$$

$$G(x - y) = - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 + i\varepsilon}$$

$$f(x) = - \int d^4 y G(x - y) \partial_\mu A^\mu(y)$$

In presenza di correnti assegnate la risoluzione delle equazioni di Maxwell è banale. La cosa difficile da risolvere è quando il campo elettromagnetico a sua volta modifica le correnti e le cariche, questo è un problema insolubile, sia classicamente, che, a maggior ragione, quantisticamente. Per provare a capirci qualcosa applicheremo la teoria delle perturbazioni, che ci permetterà di descrivere alcuni fenomeni quantitativamente in maniera corretta.

3.2 Formalismo canonico per il campo elettromagnetico

Vogliamo adesso estendere quanto detto per i campi elettromagnetici al mondo quantistico; occorre quindi definire una azione e da quella ricavare le quantità canoniche analogamente a quello che abbiamo fatto per il caso relativistico. Non ricaviamo l'azione direttamente ma ci accontentiamo di dimostrare che questa dà i giusti risultati.

L'azione è data da:

$$S = \int d^4 x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} + \underbrace{\left(\int d^4 x A_\mu J^\mu \right)}$$

senza l'oggetto fra parentesi otteniamo le equazioni di Maxwell omogenee, ovvero quelle in cui non ci sono densità di cariche e correnti; per semplicità consideriamo questo caso. Come verificiamo che l'azione sia giusta? facciamone la variazione e vediamo se riotteniamo la relazione $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Facciamone una forma abbreviata variando solo l'argomento dell'integrale³:

$$\delta \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\delta(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu))$$

Integrando per parti come fatto per il caso relativistico abbiamo:

$$\frac{1}{2} (\partial^\nu F_{\mu\nu}) \delta A^\mu - \frac{1}{2} (\partial^\mu F_{\mu\nu}) \delta A^\nu$$

se cambio μ in ν e viceversa⁴ nel secondo pezzo i due termini sono proprio identici a meno della F in cui sono scambiati in posizione; ma F è antisimmetrico quindi il meno diventa più e posso scrivere, reinserendo l'integrale:

$$\delta S = \int d^4x (\partial^\nu F_{\mu\nu}) \delta A^\mu = 0$$

da cui si conclude che la variazione è nulla sempre se $\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$ che è quello che volevamo avere.

Le coordinate lagrangiane sono quindi le A^μ e le \dot{A}^μ e i momenti coniugati sono:

$$\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu}$$

Questi risultano nulli e il motivo è profondo, infatti il formalismo canonico classico mi dà le \dot{q} e quindi mi permette di sapere l'evoluzione nell'immediato futuro (o quella passata). Nel nostro caso invece questo è impossibile perchè le equazioni sono risolte anche per $A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \phi$; per cui posso partire al tempo $t=0$ con delle condizioni iniziali poi al tempo $t=t'$ cambiare la ϕ e avere che le condizioni iniziali sono le stesse perchè a $t=0$ la ϕ era nulla ma ora avere due soluzioni distinte. Il problema di Cauchy non è più univocamente determinato! a questo

³Il procedimento è analogo a quello per le equazioni di Klein-Gordon, che è stato svolto per intero nelle sezioni precedenti.

⁴Notate bene che non si scambiano gli indici ma si cambia loro nome ed essendo indici muti questo crea problemi.

si rimedia scegliendo una gauge in modo tale che la ϕ sia definita in partenza e fissata.

Invece di scegliere la gauge di Lorenz però, mettiamoci in quella di Coulomb in cui non è la quadridivergenza ad essere nulla ma la divergenza spaziale:

$$\text{div}\vec{A} = 0$$

Questo modello ha pregi e difetti, infatti questa formulazione non è covariante e i risultati dati non saranno covarianti automaticamente; tuttavia venendo da una teoria covariante è ragionevole ammettere che anche questi saranno covarianti (in pratica occorre fare un po di magheggi).

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \partial^\nu F_{\mu\nu} \\ \text{div}\vec{A} = 0 \end{cases}$$

adesso convinciamoci che possiamo scegliere questa gauge, ossia troviamo la forma funzionale della f :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f \quad \rightarrow \quad \text{div}\vec{A}' = \text{div}\vec{A} + \Delta f = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta f = -\text{div}\vec{A}$$

ma questa è formalmente uguale all'equazione di Poisson e quando abbiamo a che fare con un'equazione di Poisson la soluzione è data da:

$$f(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\text{div}\vec{A})}{(r - r_o)^2} dr$$

quindi abbiamo la f e la gauge è possibile.

Prendiamo quindi le equazioni di Maxwell omogenee e applichiamo la gauge:

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = 0$$

prima nel caso con $\mu = 0$ e poi con $\mu = i$.

$$\square A_o - \partial_o(\partial^o A_o + \underbrace{\partial^i A_i}_{=0}) = 0 \quad \rightarrow \quad \square A_o - \partial_o \partial^o A_o = -\Delta A_o = 0$$

e risfruttando la legge di Poisson otteniamo

$$A_o = 0 \tag{3.7}$$

Ora le coordinate spaziali:

$$\square A_i - \underbrace{\partial_i(\partial^0 A_0)}_{=0} + \underbrace{\partial^i A_i}_{=0} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\square A_i = 0$$

Questa è l'equazione di Klein-Gordon con $m=0$ e con A al posto della φ !

3.2.1 Forma dei campi elettromagnetici

Vogliamo adesso passare alla soluzione del campo e.m.; abbiamo risolto l'equazioni del moto con la formula:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

che rappresenta le equazioni di Maxwell purchè la F sia della forma

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$$

questa formula insieme alla divergenza di A uguale a zero descrive il sistema omogeneo, in cui cioè non sono presenti cariche e correnti. In termini di A è possibile quindi esprimere i campi elettrici e magnetici infatti:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \end{cases}$$

Per esprimere quindi i due campi tutto quello che basta fare è trovare l'espressione di A e poi fare derivate. Ma mettendoci nella gauge di Coulomb le equazioni di Maxwell si riducono alla forma di quelle di Klein-Gordon di cui sappiamo la soluzione:

$$\square \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} (\vec{\alpha}(\vec{k})e^{-ikx} + \vec{\alpha}^*(\vec{k})e^{ikx})$$

Abbiamo quindi il potenziale vettore come combinazione lineare di onde piane. Gli α non sono indipendenti perchè $div \vec{A}$ è nulla quindi:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} (i\vec{k} \cdot \vec{\alpha}(\vec{k})e^{-ikx} + c.c.)$$

La divergenza tridimensionale agisce sull'esponenziale e porta giù un fattore ($i\vec{K}$) e osservando l'espressione si vede che per essere nulla la divergenza, i prodotti scalari devono annullarsi:

$$\vec{k} \cdot \vec{\alpha} = 0$$

Cerchiamo ora di sfruttare questa condizione per riformulare l'espressione di A in modo da mettere in evidenza le sue caratteristiche fisiche. Per ogni modo \vec{k} introduco due vettori associati⁵, $\vec{\epsilon}_\lambda$ con $\lambda = 1, 2$. Questi due vettori li scelgo in modo che:

1. $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda = 0$ siano ortogonali a \vec{k}
2. $\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_j = \delta_{ij}$ essendo scelti arbitrariamente li scelgo ortogonali fra

E' da notare che queste due condizioni non li identificano univocamente, infatti possono essere ogni coppia di vettori ortogonali giacenti nel piano perpendicolare a k.

Ma anche α appartiene al piano perpendicolare a k e di conseguenza posso esprimerlo come combinazione lineare dei due λ :

$$\vec{\alpha}(k) = \sum_{i=1}^2 a_\lambda(k) \vec{\epsilon}_\lambda(k)$$

Riscriviamo A come:

$$\vec{A} = \sum_i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} (a_\lambda(\vec{k}) \epsilon_{\lambda} e^{-ikx} + c.c.)$$

e capiamo subito che stiamo descrivendo la polarizzazione di una onda e.m libera dove gli epsilon sono i vettori di polarizzazione.

Poniamo ora c=1 e scriviamo le espressione del campo E; basta derivare rispetto al tempo l'opposto di A:

$$\vec{E} = \sum_i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} (a_\lambda(\vec{k}) \underbrace{\vec{\epsilon}_\lambda}_{i|k|} e^{-ikx} + c.c.)$$

il campo elettrico oscilla ortogonalmente alla direzione di propagazione k, infatti ha come versore ϵ .

⁵Che possono essere reali o complessi, prendiamoli ad esempio due reali.

Prendiamo ora una sola onda piana; se ϵ è reale allora posso raccogliere i termini che moltiplicano gli esponenziali e questi ultimi mi diventano un seno od un coseno; se ϵ è complessa devo prendere la parte reale:

$$\mathcal{R}e(a_k \epsilon_\lambda e^{ikx} + \epsilon_\lambda^* a_k^* e^{ikx})$$

Una cosa analoga può essere fatta per il campo magnetico dove il rotore agirà sulla parte spaziale dell'esponenziale. Trattandosi solo di conti che non aggiungono niente di concettuale a quanto fatto per il campo elettrico li omettiamo.

3.2.2 Fotoni

Applicando le regole di commutazione otteniamo le relazioni che devono soddisfare gli operatori quantistici del campo elettromagnetico:

$$\left[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}') \right] = 0$$

$$\left[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}') \right] = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Anche con questi operatori è possibile definire uno stato di vuoto, che è annichilito da qualunque operatore di distruzione:

$$a_\lambda(\vec{k}) |0\rangle = 0$$

Analogamente a quanto visto con i campi di Klein-Gordon anche in questo caso possiamo creare stati con una o più particelle:

$$a_\lambda^+(\vec{k}) |0\rangle$$

Questo stato descrive lo stato di un fotone, che ha vettore d'onda \vec{k} e polarizzazione lungo ϵ_λ .

Ovviamente possiamo avere anche stati con più fotoni:

$$a_{\lambda_1}^+(\vec{k}_1) \cdots a_{\lambda_n}^+(\vec{k}_n) |0\rangle$$

Come si può scrivere uno stato "classico"? Uno stato classico è uno stato in cui possiamo misurare un campo elettrico e un campo magnetico, la cui dispersione sia trascurabile rispetto al valore che misuriamo.

Sappiamo l'espressione operatoriale del campo elettrico ($\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$). Il campo elettrico classico è infatti una media sullo stato quantistico dell'operatore campo elettrico.

$$\langle \psi | \vec{E} | \psi \rangle$$

Nell'ipotesi di campo classico devo avere dispersione trascurabile, questo equivale ad imporre la condizione:

$$\langle E^2 \rangle \approx \langle E \rangle^2$$

Se questa è la condizione di campo classico, è facile dimostrare che nessuno stato contenente un numero determinato di fotoni è uno stato classico, infatti:

$$\langle E \rangle = \langle 0 | a_{\lambda_1}(\vec{k}_1) \cdots a_{\lambda_n}(\vec{k}_n) \underbrace{\vec{E}}_{a^+ + a} a_{\lambda_1}(\vec{k}_1) \cdots a_{\lambda_n}(\vec{k}_n) | 0 \rangle = 0$$

Infatti l'operatore \vec{E} contiene nella sua espressione una somma di a e a^+ , che se vengono applicati ad uno dei due stati, portano questa media ad essere uguale al prodotto scalare di stati che hanno diverso numero di particelle (e sono ortogonali).

L'unico modo per non far annullare questo valore medio è quello di realizzare uno stato di sovrapposizione lineare di stati con numeri differenti di fotoni. In questo modo quando applico l'operatore di creazione o di distruzione su uno stato e vado a farne il prodotto scalare per una combinazione lineare di stati con diverso numero di fotoni potrei avere un valore diverso da zero.

Il campo elettromagnetico classico non corrisponde quindi alla media su stati con tanti fotoni, ma alla media su stati con differenti fotoni. Se prendessi in considerazione solo stati il cui numero di fotoni è fissato non riuscirei a misurare un campo elettrico (o magnetico). Per realizzare uno stato con media del campo elettrico non nulla devo realizzarlo come combinazione lineare di un numero differente di particelle (devono comunque essercene molte in modo da non percepire la differenza discreta energetica dovuta alla creazione o alla distruzione di un fotone). Quindi in uno stato classico il numero di fotoni non è definito, significa che sono simultaneamente presenti numeri differenti di fotoni.

Calcoliamo ora gli osservabili associati al campo elettromagnetico quantistico: Otteniamo il quadrimpulso come già fatto per l'equazione di Klein-Gordon, sfruttando il teorema di Noether.

$$P^0 = \int dx \left(\sum \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right)$$

$$P^i = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial^i \varphi \right)$$

Queste quattro quantità sono conservate, perché la lagrangiana è invariante traslazionale. La nostra lagrangiana può essere scritta come:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Il campo φ soluzione dell'equazione di Klein-Gordon è il quadripotenziale A . Riscriviamo la densità lagrangiana in modo più esplicito:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ è dovuto al fatto che per ciascun valore di i in realtà abbiamo due termini uguali $F_{0i} F^{0i}$ e $F_{i0} F^{i0}$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = -F_{0i} \frac{\partial F^{0i}}{\partial \dot{A}^\mu}$$

Dove abbiamo sfruttato il fatto che le componenti spaziali di F_{ij} sono indipendenti da \dot{A} (che è il campo elettrico, mentre F_{ij} è il campo magnetico).

Poiché sappiamo che nella gauge di Coulomb $A^0 = 0$ (vedi equazione 3.7), sfruttiamolo per fare la seguente sostituzione:

$$F^{0i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \partial_0 A^i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F^{0i} \frac{\partial(\partial_0 A^i)}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = F^{0i} \delta_\mu^i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F_\mu^0 \tag{3.8}$$

Ora sono in grado di scrivere esplicitamente l'espressione dell'energia.

$$H = \int d^3x \left[\dot{A}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \mathcal{L} \right]$$

$$H = \int d^3x \left[\dot{A}_i F^{0i} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

Dividiamo la lagrangiana come fatto precedentemente in parte spaziale e parte temporale:

$$H = \int d^3x \left[\dot{A}_i F^{0i} + \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right] \quad (3.9)$$

Vediamo come possiamo riscrivere i termini:

$$F_{0i} = -F^{0i} = -E^i$$

$$\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} = -\frac{1}{2} (E^i)^2 \quad (3.10)$$

Analogamente le componenti magnetiche:

$$F_{ij} F^{ij} = F^{ij} F^{ij} = \varepsilon^{ijk} (B^k)^2$$

Facciamo il caso di indici $i = 1$ e $j = 2$:

$$F_{12} F^{12} + F_{21} F^{21} = 2(B^3)^2$$

Sostituendo questa espressione, e la 3.10 nella 3.9 otteniamo:

$$H = \int d^3x \left[\dot{A}_i F^{0i} - \underbrace{\frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2}_{\mathcal{L}} \right]$$

La combinazione $E^2 - B^2$ rappresenta la densità lagrangiana, pertanto è un invariante di Lorentz.

$$H = \int d^3x \left[\dot{A}_i F^{0i} - \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \right]$$

$$H = \int d^3x \left[(\partial_0 A_i - \partial_i A_0) F^{0i} - \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \right]$$

Abbiamo aggiunto un termine che dimostriamo essere nullo:

$$\int d^3x \partial_i A_0 F^{0i} = - \int d^3x A_0 \partial_i F^{0i} = 0$$

Questa espressione è ottenuta integrando per parti, si annulla il termine

$$\partial_i F^{0i} = 0$$

che corrisponde alle quazioni di Maxwell non omogenee. Torniamo all'espressione di H

$$H = \int d^3x \left[(F_{i0} F^{0i} - \frac{1}{2}(E^2 - B^2)) \right]$$

$$H = \int d^3x \left[(F^{0i} F^{0i} - \frac{1}{2}(E^2 - B^2)) \right]$$

$$H = \int d^3x \left[E^2 - \frac{1}{2}(E^2 - B^2) \right]$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2)$$

L'energia elettromagnetica è pari all'integrale di $E^2 + B^2$, risultato che già avevamo dalla teoria classica. Ricaviamo l'impulso spaziale.

$$\begin{aligned} P^i &= \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^k} \partial^i A^k = \int d^3x F_{0k} (\partial^i A^k - \partial^k A^i) = \\ &= \int d^3x F_{0k} F^{ki} = \int d^3x F_{0k} \varepsilon^{kil} B^l = \\ &= - \int d^3x E^k B^l \varepsilon^{kil} = \\ &= \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B})^i \end{aligned}$$

Che è proprio l'iesima componente del vettore di Poynting.

3.3 Conservazione del momento angolare

Abbiamo visto come si esprime il quadrimpulso di una particella quantistica:

$$P^0 = H = \frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2) \quad P^i = \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B})^i$$

Queste quantità si conservano per campi elettromagnetici liberi. Nel caso in cui c'è materia non saranno singolarmente conservate, ma si conserverà l'energia e l'impulso totale, considerando anche l'energia della materia e l'energia di interazione tra campi e materia.

Possiamo esprimere il quadrimpulso direttamente in termini degli operatori di creazione e distruzione, ricordando che i campi elettromagnetici rappresentano un caso generale dell'equazione di Klein-Gordon. In questo caso il quadrimpulso può essere espresso:

$$H = \sum_{\lambda} \int d^3p |\vec{p}| a_{\lambda}^+(\vec{p}) a_{\lambda}(\vec{p})$$

$$P^i = \sum_{\lambda} \int d^3p \vec{p} a_{\lambda}^+(\vec{p}) a_{\lambda}(\vec{p})$$

Questi due operatori rappresentano la somma delle energie (o degli impulsi) di tutte le particelle presenti nel sistema (l'operatore $a_{\lambda}^+(\vec{p}) a_{\lambda}(\vec{p})$ conta le particelle nel sistema di impulso \vec{p} e con polarizzazione lungo λ). Da queste relazioni abbiamo già tolto l'energia dello stato di vuoto, che abbiamo posto pari a zero.

λ è l'indice che identifica classicamente lo stato di polarizzazione dell'onda elettromagnetica, che può variare su due valori. Due stati che hanno pari impulso ma differente λ sono ortogonali, infatti:

$$\langle 0 | a_{\lambda_1}(\vec{p}) a_{\lambda_2}^+(\vec{p}) | 0 \rangle = \langle 0 | [a_{\lambda_1}(\vec{p}), a_{\lambda_2}^+(\vec{p})] | 0 \rangle = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$$

Qual è l'interpretazione quantistica di questo grado di libertà in più che hanno i fotoni rispetto ai campi scalari di Klein-Gordon? Nel caso classico λ corrisponde allo stato di polarizzazione dell'onda elettromagnetica, nel caso quantistico rappresenta lo spin dei fotoni. Questa interpretazione nasce dalla definizione di invarianza del campo elettromagnetico per rotazioni nello spazio di Lorentz. La simmetria del gruppo di Lorentz proprio implica la conservazione del momento angolare delle particelle.

Mentre per le traslazioni questo comportava l'invarianza di 4 quantità (energia e impulso) vedremo che la rotazione ci dà l'invarianza rispetto a sei parametri.

Quindi ci occupiamo di ricavare la quantità conservata sfruttando il teorema di Noether quando l'azione è simmetrica rispetto a trasformazioni di Lorentz proprie. Il procedimento dimostrativo è del tutto

analogo a quello che abbiamo seguito nel caso delle traslazioni (vedi Sez. 2.6).

L'invarianza dell'azione implica l'invarianza della densità lagrangiana, la condizione che dobbiamo imporre è quindi la seguente:

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$$

Le trasformazioni che mi portano da x' a x sono le trasformazioni di Lorentz:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Il campo elettromagnetico si trasforma anche lui secondo le trasformazioni di Lorentz:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

Tuttavia, per non perdere di generalità, supponiamo che la densità lagrangiana \mathcal{L} sia funzione di campi spinoriali. I campi spinoriali sono, ad esempio, quelli che risolvono l'equazione di Dirac, argomento del prossimo capitolo. La trasformazione delle quantità spinoriali è definita nel seguente modo:

$$\Phi'_a(x) = S(\Lambda)\Phi_b(x)$$

Il caso in cui Φ coincida proprio con il campo A la funzione S è semplicemente definita:

$$S(\Lambda) = \Lambda$$

Per cui considerando la trasformazione spinoriale otteniamo come caso particolare anche la trasformazione del campo elettromagnetico.

Come sono fatte le matrici Λ per trasformazioni di Lorentz infinitesime? Saranno scrivibili come un termine infinitesimo sommato ad una matrice identità:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu}$$

In tutto il procedimento trascureremo gli ordini di ϵ^2 (questa non è un'approssimazione, in quanto alla fine si fa il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$, dove N è il numero di trasformazioni infinitesime, e l'unico termine finito è $N\epsilon$, i termini di ordine $N\epsilon^2$ o superiore vanno a zero).

Imponiamo la relazione che deve soddisfare ϵ affinché Λ sia una trasformazione di Lorentz:

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

$$g_{\mu\nu}(\delta^\mu_\alpha + \epsilon^\mu_\alpha)(\delta^\nu_\beta + \epsilon^\nu_\beta) = g_{\alpha\beta}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\delta^\mu_\alpha\epsilon^\nu_\beta + g_{\mu\nu}\delta^\nu_\beta\epsilon^\mu_\alpha &= 0 \\ g_{\alpha\nu}\epsilon^\nu_\beta + g_{\mu\beta}\epsilon^\mu_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Possiamo definire gli abbassamento degli indici delle epsilon come se fossero tensori doppi, questo abbassamento è una definizione ad hoc, in quanto ϵ non è un tensore. Definisco ϵ con indici bassi come la saturazione dell'indice abbassato con il tensore metrico, per brevità di scrittura.

$$g_{\mu\nu}\epsilon^\mu_\alpha = \epsilon_{\nu\alpha}$$

Da cui l'espressione (3.11) diventa:

$$\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha} = 0 \quad (3.12)$$

Da cui abbiamo dimostrato che perché Λ rappresenti una trasformazione di Lorentz, ϵ scritto con indici bassi deve essere antisimmetrico. Il numero di parametri indipendenti per le ϵ sono 6. Con questa relazione possiamo sviluppare in serie al primo ordine la funzione S che trasforma le quantità spinoriali:

$$S_{ab}(\Lambda) = \delta_{ab} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}_{ab}$$

L'oggetto $M^{\mu\nu}_{ab}$ è la parte antisimmetrica del tensore che mi definisce la “derivata” prima della S rispetta alla trasformazione di Lorentz (questo poiché è prodotto per un oggetto antisimmetrico). A questo punto siamo in grado di variare la densità lagrangiana per cercare la quantità conservata.

$$0 = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = \underbrace{\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x)} + \overbrace{\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)}$$

La prima quantità rappresenta la variazione della densità lagrangiana per spostamenti di coordinata mentre la seconda è la variazione dovuta alla modifica della forma funzionale della densità, che equivale alla variazione della φ e della $\dot{\varphi}$. Quindi per prima cosa calcoliamo come variano x e φ :

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu_\nu x^\nu & \rightarrow \delta x^\mu = \epsilon^\mu_\nu x^\nu \\ \varphi'(x) = \varphi(x) - \partial_\mu\varphi(x)\epsilon^\mu_\nu x^\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\varphi & \rightarrow \delta\varphi = -\partial_\mu\varphi(x)\epsilon^\mu_\nu x^\nu + \end{cases}$$

La variazione della x è abbastanza banale mentre per la $\delta\varphi$ spendiamo due parole. Abbiamo:

$$\varphi'(\Lambda x) = \varphi(x^\mu + \epsilon_\nu^\mu x^\nu) \sim \varphi(x) + \frac{1}{2} M^{\mu\nu} \varphi(x^\mu) \epsilon_{\mu\nu}$$

ora per ottenere φ' dobbiamo fare la trasformazione inversa e sappiamo che per le trasformazioni infinitesime del tipo:

$$B = I + \mathcal{E} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{I + \mathcal{E}} \sim I - \mathcal{E}$$

quindi otteniamo

$$\varphi'(x) = \varphi(x^\mu - \epsilon_\nu^\mu x^\nu) + \frac{1}{2} M^{\mu\nu} \varphi(x^\mu) \epsilon_{\mu\nu}$$

dove nell'ultimo termine dovrei mettere la trasformata di x ma essendo φ moltiplicata per ϵ sviluppandola a sua volta avrei termini superiori.

Siamo ora in grado di scrivere le variazioni dei due termini

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu = \frac{\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \epsilon_{\nu\mu}^\mu x^\nu$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta(\partial_\mu \varphi)$

Quindi mettendo tutto insieme ottengo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \epsilon_{\nu\mu}^\mu x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta(\partial_\mu \varphi) = 0$$

ora uso le equazioni dei Eulero-Lagrange (infatti la conservazione implicata dal teorema di Noether avviene solo lungo le equazioni del moto!).

$$(\partial_\mu \mathcal{L}) \epsilon_{\nu\mu}^\mu x^\nu + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right] = 0$$

Ci siamo quasi dobbiamo solo sostituire la variazione di φ e giocare un po con gli indici.

Cominciamo notando che ϵ è antisimmetrico per cui le componenti con lo stesso indice sono nulle $\epsilon_{\mu\mu} = 0$, quindi

$$(\partial_\mu \mathcal{L}) \epsilon_\nu^\mu x^\nu = \partial_\mu (\mathcal{L} \epsilon_{\nu\mu}^\mu x^\nu)$$

infatti la derivata agisce sempre su un termine con indice diverso: quando l'indice di x è μ , ϵ è nullo. Quindi:

$$\partial_\mu(\mathcal{L}\epsilon_\nu^\mu x^\nu) - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} (\partial_\mu \varphi(x) \epsilon_\nu^\mu x^\nu + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \varphi) \right] = 0$$

ora voglio avere tutti gli epsilon con gli indici bassi in modo da poterli raccogliere; uso il tensore metrico e per non curarmi del segno in ogni gruppo alzo un indice e ne abbasso un altro:

$$\begin{aligned} \partial^\rho(\mathcal{L}\epsilon_{\rho\nu} x^\nu) - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} (\partial^\rho \varphi(x) \epsilon_{\rho\nu} x^\nu + \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\nu} M^{\rho\nu} \varphi) \right] &= 0 \\ \epsilon_{\rho\nu} \left\{ \partial^\rho(\mathcal{L}x^\nu) - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} (\partial^\rho \varphi(x) x^\nu + \frac{1}{2} M^{\rho\nu} \varphi) \right] \right\} &= 0 \end{aligned}$$

ora voglio abbassare la ρ per avere tutte le derivate in evidenza e poter raccogliere anche loro:

$$\epsilon_{\rho\nu} \left\{ g^{\rho\mu} \partial_\mu(\mathcal{L}x^\nu) - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} (\partial^\rho \varphi(x) x^\nu + \frac{1}{2} M^{\rho\nu} \varphi) \right] \right\} = 0$$

La ϵ è una quantità piccola ma arbitraria quindi voglio toglierla e avere di conseguenza una relazione vera per ogni trasformazione infinitesima; per toperò mi devo assicurare che:

$$\epsilon^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow B_{\alpha\beta} = 0$$

Nel nostro caso la ϵ è antisimmetrica e noi sappiamo che il prodotto di una quantità simmetrica per una antisimmetrica è nullo. Scritta così quindi la relazione necessita dell' ϵ per annullarsi. Se allora spezziamo B nella parte simmetrica e antisimmetrica

$$B_{\alpha\beta} = \left(\frac{B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}}{2} \right) + \left(\frac{B_{\alpha\beta} - B_{\beta\alpha}}{2} \right)$$

avremo che la parte antisimmetrica di B deve essere nulla indipendentemente da ϵ , infatti divisa l'espressione posso considerarla ϵ arbitraria e toglierla.

$$\partial_\mu \left\{ \frac{1}{2} \left[g^{\rho\mu} \mathcal{L}x^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{L}x^\rho \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \left(\frac{1}{2} (\partial^\rho \varphi(x) x^\nu - \partial^\nu \varphi(x) x^\rho) + \frac{1}{2} M^{\rho\nu} \varphi \right) \right\} =$$

Abbiamo finito! chiamiamo la quantità fra parentesi graffe:

$$m^{\mu\nu\rho} = \left\{ \left[g^{\rho\mu} \mathcal{L} x^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{L} x^\rho \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \left((\partial^\rho \varphi(x) x^\nu - \partial^\nu \varphi(x) x^\rho) + M^{\rho\nu} \varphi \right) \right\} \quad (3.13)$$

che è la quantità conservata per il teorema di Noether.

$m^{\mu\nu\rho}$ è un tensore triplo antisimmetrico per scambio degli indici ν e ρ , e soddisfacendo la legge di conservazione $\partial_\mu m^{\mu\nu\rho} = 0$ ricaviamo un tensore a due indici:

$$L^{\nu\rho} = \int d^3x m^{0\nu\rho}$$

i cui termini spaziali L^{ij} sono le tre componenti del momento angolare⁶

Per dimostrarlo qualitativamente prendiamo un campo scalare con $M^{\mu\nu} = 0$ e vediamo a cosa si riduce $m^{\mu\nu\rho}$:

$$m^{0\nu\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} [(x^\nu \partial^\rho - x^\rho \partial^\nu) \varphi] - \underbrace{(g^{0\rho} x^\nu - g^{\nu\rho} x^0) \mathcal{L}}_{=0}$$

dove l'ultimo termine è nullo per le proprietà di g (ρ deve essere 0 nel primo g per avere un valore non nullo e di conseguenza del secondo).

Riandando a vedere la definizione di T possiamo riscrivere L come:

$$L^{\nu\rho} = \int d^3x (x^\nu T^{0\rho} - x^\rho T^{0\nu})$$

Se per esempio prendiamo la componente 1,2 abbiamo:

$$L^{12} = \int d^3x (x^1 T^{02} - x^2 T^{01}) = x^1 p^2 - x^2 p^1 \quad \rightarrow \quad \vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$

con $p^\nu = \int d^3x T^{0\nu}(x)$; bisogna tener presente che questo è solo un modo per figurarci la quantità 'classicamente' ma volendo essere rigorosi l'integrale della densità di impulso $T^{0\nu}$ da l'impulso se integriamo su tutto il volume, ma se ci restringessimo ad una parte e aggiungessimo una divergenza all'integrale questo darebbe matematicamente lo stesso risultato ma sarebbe più difficile interpretazione fisica. Teniamoci quindi questa 'dimostrazione' come un modo di vedere le cose.

⁶E' utile ricordare che la divergenza spaziale di $m^{\mu\nu\rho}$ è nulla quindi di fatto la derivata si riduce a una rispetto al tempo.

Ora esplicitiamo la relazione di \vec{L} come osservabile quantistico; per far ciò ricordiamoci cosa è φ

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ipx} + h.c.)$$

e andiamola a sostituire nell'espressione di L . Facendo un bel po di calcoli, risolvendo l'integrale ricordandoci di ordinare gli a e a^+ otteniamo che il vettore momento angolare lo possiamo esprimere tramite gli operatori di creazione e distruzione nella forma:

$$\vec{L} = \int d^3p a_p^+ (i\vec{p} \times \vec{\nabla}_p)$$

Notiamo che l'operatore è analogo a quello della prima quantizzazione nella rappresentazione delle p (in cui $x = -i\frac{d}{dp}$). Ora lo stato di vuoto applicato al momento angolare non è autostato in generale infatti stato non va in se stesso se ruotato di una generica quantità:

$$\vec{L}a^+ |0\rangle \neq \alpha a^+ |0\rangle$$

Una eccezione importante è quella di una particella in stato di quiete, in questo caso lo stato è invariante per rotazione e quindi applicato a L che è il generatore delle rotazioni mi dà l'autostato con autovalore nullo.

Un altro caso è quello in cui guardo nella direzione di moto della particella, anche stavolta una rotazione dello stato attorno all'asse dato dal moto non mi modifica lo stato.

3.3.1 Lo spin

Questi due esempi ci tornano molto utile per descrivere lo spin. Infatti per capire qual è il momento di spin si mette la particella a riposo se ne calcola il momento angolare, se questo è diverso da zero ho trovato lo spin della particella. Se ottengo zero ho una particella a spin zero;

Ci manca di considerare il caso in cui la massa della particella sia nulla. In quest caso non posso metterla a riposo perchè deve muoversi alla velocità della luce! qui ci viene in aiuto il secondo caso particolare tratto prima. Se guardo nella direzione del moto e applico L ottengo la

proiezione dello spin lungo quella direzione. Poichè per particelle senza massa lo spin ha solo due proiezioni il gioco è fatto.

Ora andiamo a considerare le altre tre quantità conservate

$$L^{0i} = \int d^3x (x^0 T^{0i} - x^i T^{i0}) = L^{0i} = x^0 \int d^3x (x^0 T^{0i}) - \int d^3x (x^i T^{i0})$$

abbiamo il primo termine che dipende esplicitamente dal tempo e noi sappiamo che il teorema di Herenfest generalizzato al caso di operatori dipendenti esplicitamente dal tempo afferma che la derivata temporale di un operatore è uguale al commutatore con H più la derivata temporale parziale:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

quindi le L^{0i} non possono commutare con l'energia! sono comunque conservate e possono essere interpretate come la media pesata del baricentro dell'energia.

$$0 = \frac{dL^{0i}}{dx^0} = p^i - \frac{d}{dx^0} \int d^3x T^{i0} x^i$$

$$\frac{\frac{d}{dx^0} \int d^3x T^{00} x^i}{\int T^{00} d^3x} = \frac{p^i}{\int T^{00} d^3x}$$

Dove abbiamo sfruttato il fatto che la derivata totale temporale di L^{0i} è nulla e abbiamo diviso ambedue i membri per una quantità costante. Inoltre se portiamo il denominatore dentro la derivata (è una costante) si ottiene:

$$\frac{d}{dx^0} \left(\frac{\int d^3x T^{00} x^i}{\int T^{00} d^3x} \right) = cost$$

ovvero che il baricentro si muove di moto uniforme.

3.3.2 Spin dei fotoni

Cerchiamo ora di calcolare il momento angolare anche per campi di tipo vettoriali (come il campo elettromagnetico). Definiamo la matrice M antisimmetrica che descrive la trasformazione di questo tipo di campi:

$$\varphi'(x) = S(\Lambda)\varphi(x)$$

In questo caso il campo è rappresentato da \vec{A} :

$$A^\mu = \Lambda^\mu_\sigma A^\sigma$$

$$S(\Lambda) = \Lambda$$

Il campo elettromagnetico si trasforma in questo modo, esplicitiamo la trasformazione infinitesima:

$$\Lambda = I + \varepsilon^\mu_\sigma$$

$$S(\Lambda) = I + \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = I + \varepsilon^\mu_\sigma$$

Definendo δA la variazione di A sotto trasformazioni di Lorentz infinitesime otteniamo che:

$$\delta A^\rho = \varepsilon^\rho_\sigma A^\sigma = \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu\rho} A^\sigma$$

Vogliamo trovare la matrice $M^{\mu\nu\rho}_\sigma$.

$$\varepsilon^\rho_\sigma A^\sigma = \varepsilon_{\mu\nu} \underbrace{g^{\mu\rho} g^\nu_\sigma}_{M^{\mu\nu\rho}_\sigma} A^\sigma$$

Siccome ε è antisimmetrico, occorre antisimmetrizzare il tensore M appena ottenuto.

$$M^{\mu\nu\rho}_\sigma = \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} g^\nu_\sigma - g^{\nu\rho} g^\mu_\sigma)$$

Sostituendo questa espressione nella espressione di m (equazione 3.13) e integrando in modo da ottenere il momento angolare:

$$L^{ij} = \int d^3x m^{0ij}$$

Si arriva all'espressione del momento angolare dei fotoni. In questo conto occorre ricordare che l'espressione da prendere per il campo è quella del potenziale vettore:

$$\vec{A} = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2|\vec{p}|}} [a_\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} + a_\lambda^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}]$$

Per i fotoni risulta esserci un momento angolare orbitale è un momento angolare di spin. Per i fotoni, particelle di massa nulla, non è

possibile definire lo spin come si fa per particelle dotate di massa. Se la particella è dotata di massa infatti è sempre possibile mettersi in un sistema di riferimento in cui la particella non ha impulso e calcolare lo spin misurando il momento angolare totale del sistema. Nel caso di particelle prive di massa questa operazione è impossibile, in quanto non esiste sistema di riferimento in cui le particelle sono a riposo. Per definire lo spin di queste particelle è necessario misurare la loro elicità, definita come il momento angolare misurato lungo la direzione del moto.

Questa misura è invariante relativistico solo per particelle di massa nulla. Nel caso del fotone possiamo comporre stati in questo modo:

$$\left[a_1(\vec{k}) \pm ia_2(\vec{k}) \right] |0\rangle$$

Questo stato rappresenta un singolo fotone scritto come combinazione lineare delle due polarizzazioni λ scelte. Calcolando l'operatore L nella direzione del moto di questo stato si può verificare che si ottiene ± 1 a seconda del segno della combinazione lineare. Tutte le particelle di massa nulla devono avere per forza due stati di spin, che sono i due stati definibili attraverso la misura dell'elicità. Il modulo dell'elicità del fotone è 1, quindi lo spin del fotone è definito pari a 1.

Una particella quantistica con $m \neq 0$ e spin 1 avrebbe a disposizione 3 stati di polarizzazione (rispettivamente -1, 0 e 1). Il fotone ha solo due stati di polarizzazione. Questo è dovuto al vincolo in più imposto dalla gauge di Coulomb che la divergenza di \vec{A} sia zero.

3.3.3 Campo elettromagnetico classico

Abbiamo già visto che un campo elettromagnetico con un numero fissato di fotoni non può essere un campo elettromagnetico classico (poiché il valore atteso di A è zero). Come si definisce un campo elettromagnetico classico? Mettiamoci all'interno di una cavità a volume finito, in modo da discretizzare gli impulsi.

$$A = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{p}} \frac{\Delta V}{\sqrt{2|\vec{p}|}} \left[a_{\lambda}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\lambda}^+(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

Si costruisce uno stato coerente che è autostato dell'operatore di annichilazione:

$$a_\lambda(\vec{k})|\alpha\rangle = \alpha(\vec{k})|\alpha\rangle$$

È possibile ricavare un'espressione algebrica per lo stato $|\alpha\rangle$.

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[a_\lambda^+(\vec{k}) \right]^n |0\rangle$$

Questo stato coerente non è autostato dell'hamiltoniana, ma ha un valore medio di A non nullo:

$$\langle \alpha | A | \alpha \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2|k|}} (\alpha e^{-ikx} + c.c.)$$

Questo stato rappresenta bene il fascio di luce prodotto da un laser. Ovviamente non è definito il numero di fotoni, né l'energia di questo stato. Questo è il campo generato da un laser, ed è un oggetto quantistico.

Lo stato che descrive invece la luce prodotta da una lampadina è un oggetto molto più complesso, poiché la luce è incoerente. Per schematizzarla correttamente occorre usare la teoria della matrice densità.

Capitolo 4

Equazione di Dirac

L'equazione di Dirac fu ottenuta dall'omonimo fisico poco dopo la scoperta dell'equazione di Klein-Gordon. All'epoca ancora non si sapeva interpretare l'equazione di Klein-Gordon come un'equazione operatoriale per i campi, e non si riusciva a dare senso fisico alle soluzioni ad energia negativa che sembravano nascere da quell'equazione¹. Per risolvere il problema Dirac propose di evitare la quadratura dell'equazione di Klein-Gordon, che introduce soluzioni spurie ad energia negativa e lasciare l'equazione che descrive la funzione d'onda come un'equazione lineare, interpretando in modo non relativistico l'osservabile impulso:

$$P = -i\hbar\nabla$$
$$-i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}\varphi \quad (4.1)$$

Dirac propose di linearizzare l'equazione di Schroedinger in questo modo:

$$-i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (mc^2\beta + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\varphi \quad (4.2)$$

Con questa scelta abbiamo di fatto eseguito la radice quadrata dell'espressione 4.1.

Mancano da determinare i coefficienti α e β . Questi devono essere operatori, che agiranno sulla funzione d'onda φ . Possiamo rappresentare gli operatori α e β come matrici quadrate, che agiscono sul vettore d'onda.

¹ Abbiamo visto nel capitolo dell'equazione di Klein-Gordon che in realtà non è l'energia della particella ad essere negativa, poiché quella è sempre definita attraverso l'hamiltoniana (che è definita positiva), ma la frequenza di oscillazione. Tuttavia all'epoca ancora si interpretava l'equazione come un problema agli autovalori dell'energia per la funzione d'onda.

Ovviamente l'equazione deve risultare invariante relativistica, questo ci pone un vincolo sugli operatori α e β . Per far sì che gli operatori soddisfino questa condizione possiamo quadrare l'equazione di Dirac e imporre che sia uguale all'equazione di Klein-Gordon (che sappiamo già essere invariante relativisticamente).

Gli operatori α e β agiscono su uno spazio differente rispetto allo spazio delle x . Immaginiamo di rappresentarli come matrici quadrate che agiscono su un vettore $\psi_k(x)$:

$$\psi_l(x) = \alpha_{lk}\psi_k(x)$$

Quindi la P (che è un operatore che agisce sullo spazio delle x) commuta² con α e β .

L'operatore che appare davanti alle ψ nell'equazione (4.2) a destra deve essere hermitiano, quindi α e β devono essere hermitiani.

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^+ \quad \beta = \beta^+$$

Quindi la funzione d'onda ψ vive nello spazio prodotto tensoriale tra lo spazio delle coordinate (su cui agisce il gradiente) e lo spazio discreto su cui agiscono gli operatori α e β .

Queste equazioni in generale non sono invarianti relativistiche, dobbiamo trovare quali vincoli legano gli operatori α e β perché l'equazione sia covariante. Se quadro l'equazione di Dirac tuttavia devo ritrovare l'equazione di Klein-Gordon, di cui abbiamo già discusso la covarianza. Vediamo quali condizioni ci impongono questo sui parametri α e β .

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta mc^2) i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta mc^2)^2 \psi$$

Sviluppiamo esplicitamente l'operatore tra le parentesi al quadrato:

$$(c\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta mc^2)^2 = c^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{P})^2 + m^2 c^4 \beta^2 + mc^3 \{ \beta, \vec{\alpha} \cdot \vec{P} \}$$

Dove le parentesi graffe rappresentano l'anticommutatore:

$$\{A, B\} = AB + BA$$

²In altri termini α e β non dipendono da x , quindi quando si fa la derivata (P nella base delle x è la derivata spaziale) si comportano come delle costanti.

Tutta questa espressione deve essere pari al laplaciano più la massa al quadrato (eq. Klein-Gordon). Da questa uguaglianza ricaviamo subito due relazioni:

$$\begin{aligned}\{\beta, \vec{\alpha} \cdot \vec{P}\} &= 0 \\ \beta^2 &= I\end{aligned}$$

La prima condizione può essere riscritta, sfruttando la commutatività tra β e P :

$$\{\beta, \alpha^i\} = 0$$

Le uniche derivate che sopravvivono devono essere le derivate seconde rispetto alle variabili spaziali. Il termine che genera queste derivate è quello quadratico in P :

$$c^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{P})^2 = -\hbar^2 c^2 \alpha^i \alpha^j \partial_i \partial_j$$

Il tensore P^2 è simmetrico rispetto allo scambio per indici, quindi l'unica parte che sopravvive del prodotto è la parte simmetrica di $\alpha^i \alpha^j$:

$$c^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{P})^2 = -\hbar^2 c^2 \frac{\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i}{2} \partial_i \partial_j$$

Poiché deve sopravvivere solo i termini in ∂_i^2 , otteniamo la condizione sulle α :

$$\frac{\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i}{2} = \delta^{ij}$$

Questa condizione può essere scritta in modo più leggibile:

$$(\alpha^i)^2 = I$$

Quindi le tre condizioni su α e β che otteniamo sono:

$$(\alpha^i)^2 = I \quad \beta^2 = I \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \quad (4.3)$$

Queste condizioni ci fanno capire immediatamente che β e α^i non possono essere dei semplici scalari, poiché per avere anticommutatore nullo tra due scalari, uno dei due deve essere zero, mentre entrambi al quadrato devono dare 1.

Con queste condizioni abbiamo riprodotto l'equazione di Klein-Gordon. Le condizioni 4.3 ci dicono che α e β possono avere come autovalori ± 1 .

Vediamo ora che la traccia di entrambi questi operatori deve essere nulla:

$$\text{Tr}(\alpha^i) = \text{Tr}(\beta\beta\alpha^i) = \text{Tr}(\beta\alpha^i\beta) = -\text{Tr}(\alpha^i\beta^2)$$

$$\text{Tr}(\alpha^i) = -\text{Tr}(\alpha^i)$$

$$\text{Tr}(\alpha^i) = 0$$

Con una dimostrazione analoga è possibile mostrare che anche β ha traccia nulla. Questo ci dà un'importante informazione sulla dimensione dello spazio su cui operano α e β . Le dimensioni dello spazio devono essere pari, poiché nella base che diagonalizza questi operatori sulla diagonale devono esserci tanti 1 quanti -1.

Qual è la dimensione più bassa possibile per cui si possano definire gli operatori α e β ? Nello spazio 2×2 le uniche matrici che soddisfano le condizioni 4.3 sono le matrici di Pauli.

Purtroppo le matrici di Pauli sono solo 3, mentre α^i e β sono in tutto 4 matrici (se però $m = 0$ non c'è β e questa è una scelta possibile). Quindi due dimensioni sono troppo poche per costruire α e β , passiamo in quattro dimensioni, realizziamo quindi queste matrici in 4 dimensioni.

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

È facile verificare che queste matrici soddisfano realmente le regole di anticommutazione:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Qualunque trasformazione unitaria trasforma queste matrici in altre che soddisfano la stessa algebra³. Quindi c'è una certa arbitrarietà tra quali matrici scegliere. Si può dimostrare che l'operazione di anticommutazione sono realizzate a meno di una trasformazione unitaria in maniera unica. Adesso bisogna vedere se abbiamo ottenuto realmente

³In linea di principio basterebbe una trasformazione qualunque, tuttavia la trasformazione unitaria è l'unica che mantiene le matrici hermitiane, che è una caratteristica fisica richiesta per α_i e β .

l'invarianza di Lorentz, e come si trasformano i vettori $\psi(x)$ nello spazio delle α e β .

Riscriviamo per prima cosa l'equazione in forma conveniente: moltiplichiamo ambo i membri per β . Questa informazione non ci fa perdere informazione, β è invertibile, per cui posso ricavare l'equazione precedente semplicemente applicando l'operatore β inverso⁴.

Definiamo un nuovo operatore γ in questo modo:

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta\alpha_i$$

Con questa convenzione riscriviamo l'equazione di Dirac, ponendo $\hbar = c = 1$.

$$i\hbar\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} = [i\gamma^i(-i\hbar\partial_i) + mc^2] \psi$$

$$\gamma^0\partial_0\psi = (\gamma^i\partial_i - m) \psi$$

$$(\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi = 0$$

L'operatore $\gamma^\mu\partial_\mu$ riveste un ruolo talmente importante nella meccanica quantistica che Feynman ha introdotto un simbolo apposta:

$$\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$$

Con questa definizione l'equazione di Dirac può essere scritta nella forma:

$$(\not{\partial} - m) \psi = 0 \tag{4.4}$$

Immaginiamo adesso di avere un osservatore nel sistema di riferimento O; questo osserverà un fenomeno descritto da: Un osservatore in O' guardando lo stesso fenomeno fisico gli

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\varphi(x) = 0$$

attribuirà una diversa equazione di Dirac (nelle sue coordinate); se però la teoria è covariante ritroverà la stessa equazione:

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\varphi'(x') = 0 \quad \text{con} \quad x^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Dove γ può essere la stessa perchè definita a meno di una trasformazione unitaria, che non cambia la fisica del problema.

⁴ $\beta^{-1} = \beta$

Le due φ saranno legate da una relazione del tipo:

$$\varphi'(x') = S(\Lambda)\varphi(x)$$

in cui la matrice S permetterà di passare da una equazione all'altra. Poichè per passare da un sistema A ad un sistema C, si può prima passare per un sistema B tale che:

$$\begin{cases} x_B^\mu = \Lambda_{AB\nu}^\mu x_A^\nu \\ x_C^\mu = \Lambda_{BC\nu}^\mu x_B^\nu \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_C^\mu = \Lambda_{AB\nu}^\mu \Lambda_{AB\rho}^\nu x_A^\rho$$

allora anche per la S vale un discorso analogo:

$$S(\Lambda)S(\Lambda) = S(\Lambda\Lambda)$$

Adesso non ci rimane altro che ricavare l'espressione di $S(\Lambda)$. Partiamo dall'equazione di Dirac:

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\varphi(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S^{-1}(\Lambda)\varphi'(x')$$

poichè γ rimane lo stesso nei due sistemi e m è una costante quello che ci interessa è la quantità $\frac{\partial\varphi'(x')}{\partial x^\mu}$ con $x^{\mu'} = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$:

$$\frac{\partial\varphi'(x')}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\varphi'(x')}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu'} \partial_{\nu'} \varphi'(x')$$

e sostituendo otteniamo:

$$0 = (i\gamma^\mu \Lambda_{\mu}^{\nu'} \partial_{\nu'} - m)S^{-1}(\Lambda)\varphi'(x')$$

Ora se moltiplichiamo a destra per S e abbiamo

$$0 = [i \underbrace{S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}\Lambda_{\mu}^{\nu'}}_{=\gamma^\nu} \partial_{\nu'} - m \underbrace{SS^{-1}}_{=I}(\Lambda)\varphi'(x')$$

dove la quantità sottolineata dalla parentesi graffa è γ^ν per confronto con l'equazione di Dirac nel sistema O'. Il problema si riconduce quindi all'equazione:

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}\Lambda_{\mu}^{\nu} = \gamma^\nu$$

che può essere riscritta come

$$\gamma^\mu \Lambda_{\mu}^{\nu} = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda)$$

questa equazione non è facilissima da risolvere, cominciamo con considerare trasformazioni infinitesime in cui possiamo espandere Λ come

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} \sim \delta_{\mu}^{\nu} + \epsilon_{\mu}^{\nu} \quad S(\Lambda) \sim I + \frac{\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}{2}$$

devo sapere se esiste una matrice M adeguata. Andiamo a sostituire nell'equazione

$$\left(I - \frac{\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}{2} \right) \gamma^{\rho} \left(I - \frac{\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}{2} \right) = \Lambda_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu}$$

Si può verificare che l'equazione è verificata per

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$$

da cui abbiamo un'espressione esplicita per S

$$S(\Lambda) = I + \frac{1}{8} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \epsilon_{\mu\nu}$$

per trasformazioni di Lorentz proprie l'equazione di Dirac è quindi invariante; per le trasformazioni improprie (come la parità) invece dobbiamo risolvere direttamente la relazione $S^{-1} \gamma S = \Lambda \gamma$.

4.1 Formalismo delle matrici γ

Apriamo una piccola parentesi sulle matrici γ , e sull'algebra che ne descrive il comportamento.

La funzione d'onda ψ non è più una funzione scalare, come nel caso dell'equazione di Klein-Gordon, ma è uno spinore, descritto da quattro componenti.

Abbiamo affrontato la trasformazione della ψ nei sistemi di riferimento:

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$$

Con una trasformazione infinitesima si ottiene:

$$S(\Lambda) = I + \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$$

Aver trovato questa soluzione mi garantisce che esiste la tras infinitesima. Ci siamo anche occupati della trasformazione di Parità, che

non può essere generata attraverso una successione di trasformazioni infinitesime, e anche per queste esiste una $S(\Lambda)$:

$$\psi'(x') = \gamma^0 \psi(x)$$

Non esiste nessuna rappresentazione finitodimensionale del gruppo di Lorentz, quindi la matrice S non può essere unitaria.

$$S^+ \stackrel{?}{=} S^{-1}$$

Calcoliamo esplicitamente le due quantità:

$$S^{-1} = I - \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$S^+ = I + \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^+$$

Vediamolo ad esempio per un indice spaziale e uno temporale⁵:

$$[\gamma^0, \gamma^i]^+ = -[\gamma^i, \gamma^0] = [\gamma^0, \gamma^i]$$

Mentre per entrambi gli indici spaziali:

$$[\gamma^i, \gamma^j]^+ = [\gamma^j, \gamma^i] = -[\gamma^i, \gamma^j]$$

Da cui segue che:

$$S^+ \neq S^{-1}$$

Quindi la S non è unitaria. Tuttavia soddisfa un interessante proprietà:

$$S^+ = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0$$

Dimostriamolo:

$$\gamma^0 S^+ \gamma^0 = S^{-1}$$

$$\gamma^0 S^+ \gamma^0 = I + \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu} \gamma^0 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^+ \gamma^0$$

Nel caso in cui c'è un indice temporale tra $\mu\nu$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \gamma^0 [\gamma^0, \gamma^i] \gamma^0 &= \gamma^0 (\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0) \gamma^0 = \\ &= \gamma^i \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^i = \\ &= -[\gamma^0, \gamma^i] \end{aligned}$$

⁵L'operazione di hermitiano coniugato agisce solo sugli operatori, ε è un numero reale, anche se ha degli indici, quindi l'operazione di hermitiano coniugato non agisce su di lui.

Se si prendono due indici spaziali:

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 [\gamma^i, \gamma^j] \gamma^0 &= \gamma^0 (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) \gamma^0 = \\
 &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^j \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^j \gamma^i \gamma^0 = \\
 &= \gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i = \\
 &= [\gamma^i, \gamma^j]
 \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato le regole di commutazione tra le γ spaziali e temporali.

Questa operazione riproduce esattamente S^{-1} . Questo l'abbiamo dimostrato per trasformazioni infinitesime. La S non è unitaria, ma soddisfa una relazione interessante:

$$\gamma^0 S^+ \gamma^0 = S^{-1} \quad (4.5)$$

Questa relazione è utile quando siamo interessati alla covarianza semplice.

Esiste una base dello spazio delle matrici 4x4 γ . Queste 16 matrici hanno proprietà specifiche sotto gruppo di trasformazioni di Lorentz. Queste matrici di base sono:

$$I \quad \gamma^\mu \quad \gamma^5 \quad \gamma^5 \gamma^\mu \quad \sigma_{\mu\nu}$$

Dove si definiscono le matrici nei seguenti modi:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Le matrici $\sigma_{\mu\nu}$ sono solo 6, poiché il commutatore è antisimmetrico in μ e ν .

Si può dimostrare che sono tra loro indipendenti e formano quindi una base dello spazio 4x4 delle matrici.

4.1.1 Spinore aggiunto

Siccome ψ è un vettore colonna, esisterà anche ψ^+ che sarà un vettore riga. Tuttavia questo oggetto non soddisfa l'equazione di Dirac aggiunta, è quindi molto scomodo da usare:

$$\psi'^+(x) = \psi^+ S^+(\Lambda)$$

È più comodo definire lo spinore aggiunto:

$$\bar{\psi}(x) \doteq \psi^+(x)\gamma^0$$

Come si trasforma $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^+(x)S^+(\Lambda)\gamma^0 = \psi^+(x)\gamma^0S^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)S^{-1}$$

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}$$

Questa $\bar{\psi}$ si trasforma con S^{-1} non come S^+ e questa è una proprietà importantissima. Prendiamo due soluzioni dell'equazione di Dirac. Queste soddisfano la seguente algebra:

$$\bar{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = I$$

Quindi la ψ e la $\bar{\psi}$ se moltiplicate tra di loro danno sempre l'identità. Inoltre l'oggetto

$$\bar{\psi}'_1(x')\gamma^\mu\psi'_2(x')$$

Si trasforma come un quadrivettore:

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu$$

$$\bar{\psi}'_1(x')\gamma^\mu\psi'_2(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}\gamma^\mu S\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu S\psi(x)$$

Si trasforma tra due sistemi di riferimenti come un quadrivettore. Lo spinore quindi, in un certo senso, è la radice di un quadrivettore. Questo vale anche in meccanica quantistica non relativistica, infatti:

$$\psi^+\sigma\psi$$

si trasforma come un vettore tridimensionale, le matrici γ sostituiscono in MQR le matrici di Pauli.

Queste funzioni d'onda descrivono particelle con spin 1/2, e quindi lo spinore corrispondente è formato da due componenti. Le altre due componenti dello spinore sono dovute alla presenza di soluzioni ad energie negative.

Anche $\sigma_{\mu\nu}$ genera un tensore doppio se contratto su $\bar{\psi}$ e ψ .

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = \bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi - \bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi$$

Ciascuno dei due termini sono effettivamente tensori di rango 2, infatti se applichiamo una trasformazione di Lorentz:

$$\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu S\psi = \bar{\psi}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma\gamma^\rho\gamma^\sigma\psi$$

Vediamo ora alcune proprietà della matrice γ^5 :

$$\gamma^{i+} = -\gamma^i \quad \gamma^{0+} = \gamma^0$$

$$\begin{aligned}\gamma^{5+} &= -i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = \\ &= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = \\ &= -i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = \\ &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \\ &= \gamma^5\end{aligned}$$

Dove abbiamo sfruttato il fatto che le matrici γ anticommutoano tra loro.

Un'altra proprietà interessante è:

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu+}$$

La dimostrazione nel caso di γ^0 è banale, nel caso di γ spaziale:

$$\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i = \gamma^{i+}$$

Come si trasforma la quantità $\bar{\psi}\gamma^5\psi$? Come uno pseudo-scalare: Riscriviamo γ^5 in un modo conveniente:

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma^5\psi' &= \bar{\psi}S^{-1}\gamma^5S\psi = \\ &= \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\psi = \\ &= \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{4!}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta\Lambda^\rho_\gamma\Lambda^\sigma_\delta\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\psi = \\ &= \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{4!}\det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\psi = \\ &= \det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^5\psi\end{aligned}$$

Questo è uno pseudo scalare, uguale in tutti i sistemi di riferimento sotto trasformazioni proprie, cambia segno per inversione degli assi!

Gli operatori $\gamma^5 \gamma^\mu$ si trasformano ovviamente come uno pseudo vettore:

$$\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} S^{-1} \gamma^5 \gamma^\mu S \psi = \det(\Lambda) \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$$

La presenza di questi pseudovettori è responsabile ad esempio della violazione della parità nelle interazioni deboli.

4.2 Soluzione dell'equazione di Dirac

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + \beta mc^2) \psi$$

La soluzione di questa equazione è un oggetto a quattro componenti, prendiamo una particella spaziale, la cui dipendenza della funzione d'onda ad onda piana a riposo ($p = 0$)

$$\psi(t, x) = \vec{u} A e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad u = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \\ u_\delta \end{pmatrix}$$

Sostituiamola nell'equazione di Dirac:

$$\vec{u} E A e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = \vec{u} \beta mc^2 e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Dove con E abbiamo indicato l'energia della particella, riscriviamo l'equazione in componenti:

$$\begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \\ u_\delta \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \\ u_\delta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\beta} mc^2$$

Questa è un'equazione agli autovalori per la mia particella, Possono succedere due cose:

- $E = mc^2$, il corrispondente spinore sarà:

$$u = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $E = -mc^2$, il corrispondente spinore sarà:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_\gamma \\ u_\delta \end{pmatrix}$$

Nell'equazione di Klein-Gordon avevamo una sola soluzione ad energia positiva ed una ad energia negativa. In questa equazione invece abbiamo trovato una degenerazione doppia, questo è dovuto al fatto che la particella ha spin 1/2 e quindi sono possibili due diverse orientazioni per ciascuno stato di energia.

La linearità dell'equazione di Dirac non è bastata per eliminare il problema delle soluzioni ad energia negativa. Ci aspettiamo quindi che, anche in questo caso, le funzioni d'onda ψ debbano essere trattate come campi, come abbiamo fatto con Klein-Gordon.

Come fatto per l'equazione di Klein-Gordon possiamo chiederci quale prodotto scalare mantenga unitaria l'evoluzione dell'equazione di Dirac. Esiste una quadridivergenza che si conserva lungo il moto dell'equazione di Dirac:

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0$$

Dimostriamo questa equazione direttamente dall'equazione di Dirac, prendiamone il complesso coniugato:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi]^+ = 0$$

$$-i\partial_\mu \psi^+ \gamma^{\mu+} - m\psi^+ = 0$$

Moltiplichiamo a sinistra per γ^0

$$-i\partial_\mu \psi^+ \gamma^{\mu+} \gamma^0 - m\psi^+ \gamma^0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 -i\partial_\mu \overbrace{\psi^+ \gamma^0}^{\bar{\psi}} \underbrace{\gamma^0 \gamma^\mu + \gamma^0}_{\gamma^\mu} - m\bar{\psi} &= 0 \\
 -i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sfruttiamo l'equazione 4.6 e l'equazione di Dirac (4.4) per mostrare che:

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0$$

$$\not{\partial} \psi = -im\psi$$

$$\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} (-im\psi) + \bar{\psi} im\psi = 0$$

Le equazioni del moto implicano che questa quadridivergenza è nulla, quindi abbiamo una quantità conservata:

$$\int \bar{\psi} \gamma^0 \psi d^3x = \text{cost}$$

Questa è la norma che dovrebbe essere usata per risolvere l'equazione di Dirac. Questa metrica è molto migliore di quella dell'equazione di Klein-Gordon, perché è definita positiva!

4.3 Limite non relativistico

Nelle scorse sezioni siamo arrivati all'equazione per una particella libera

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + \beta mc^2) \psi$$

con $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$; se ora aggiungiamo il campo caratterizzato da A e Φ abbiamo:

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{\pi} \qquad H \longrightarrow H - e\Phi$$

e l'equazione diventa

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\vec{\pi} \cdot \vec{\alpha} + \beta mc^2 + e\Phi) \psi$$

Per una particella classica da qui si ricava la forza di Lorent. L'equazione è molto difficile da risolvere, quindi introdurremmo le approssimazioni non relativistiche. Cominciamo con l'esplicitare la forma dell'equazione, che è di tipo spinoriale e che quindi possiamo esprimere in forma matriciale usando le matrici α , β e $\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\varphi}} \\ \dot{\tilde{\chi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 + e\Phi & c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \\ c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} & -mc^2 - e\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

da qui si ottiene un sistema di due equazioni

$$\begin{cases} i\hbar\dot{\tilde{\varphi}} = (mc^2 + e\Phi) \tilde{\varphi} + c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \tilde{\chi} \\ i\hbar\dot{\tilde{\chi}} = c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \tilde{\varphi} - (mc^2 + e\Phi) \tilde{\chi} \end{cases}$$

ora mi aspetto due cose:

- i campi elettromagnetici non possono essere troppo intensi nella nostra approssimazione, altrimenti le particelle verrebbero accelerate rapidamente divenendo dopo poco relativistiche.
- dobbiamo sottrarre l'energia di riposo che non è prevista nel limite non relativistico.

quindi passiamo ad una nuova parametrizzazione

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

in questo modo togliamo la massa a riposo dall'energia infatti

$$\begin{cases} i\hbar\dot{\varphi} = (mc^2\varphi + i\hbar\dot{\varphi}) e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} \\ i\hbar\dot{\chi} = (mc^2\chi + i\hbar\dot{\chi}) e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} \end{cases}$$

quindi questo mi modificherà il fattore mc^2 che scompare nella prima equazione e si raddoppia nella seconda

$$\begin{cases} i\hbar\dot{\varphi} = (e\Phi) \varphi + c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \chi \\ i\hbar\dot{\chi} = c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \varphi - (2mc^2 + e\Phi) \chi \end{cases}$$

finora le equazioni sono esatte. Adesso facciamo l'assunzione ragionevole che $\Phi \ll mc^2$ altrimenti la particella viene accelerata molto

in fretta; quindi essendo mc^2 che è molto grande butto via il termine $e\Phi$; il termine con π non posso toglierlo perchè c'è ϕ di cui non conosco la grandezza ed infine il termine a sinistra nella seconda equazione è dell'ordine dell'energia cinetica del sistema che però è piccola rispetto all'energia a riposo quindi butto anche questo.

$$\begin{cases} i\hbar\dot{\varphi} = (e\Phi)\varphi + c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}\chi \\ 0 = c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}\varphi - 2mc^2\chi \end{cases}$$

Dalla seconda otteniamo χ

$$\chi = \frac{c\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}}{2mc^2}\varphi$$

ora lo sostituiamo nella prima:

$$i\hbar\dot{\varphi} = (e\Phi)\varphi + \frac{(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})^2}{2m}\varphi$$

Siamo arrivati alle equazioni nell'approssimazione non relativistica. La seconda nel caso in cui non ci fosse il campo elettromagnetico si ridurrebbe all'equazione di Schroedinger non relativistica ($\Phi = 0$).

Ora vogliamo calcolare il termine $(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})^2$ e poichè siamo nel limite non relativistico e quindi manipoleremo sempre vettori tridimensionali sospendiamo la notazione di Eistein sugli indici alti e bassi.

$$\begin{aligned} (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})^2 &= (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) = \pi^i \sigma^i \pi^i \sigma^i = \\ &= \pi^i \pi^j \sigma^i \sigma^j = \pi^i \pi^j \left(\frac{1}{2} [\sigma^i, \sigma^j]_+ + \frac{1}{2} [\sigma^i, \sigma^j] \right) = \pi^i \pi^j (\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k) = \\ &= \vec{\pi}^2 + i\epsilon^{ijk} \pi^i \pi^j \sigma^k \end{aligned}$$

Bene cerchiamo di capire cosa rappresenta il secondo termine:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \pi^i \pi^j &= \epsilon^{ijk} \left(p^i - \frac{e}{c} A^i \right) \left(p^j - \frac{e}{c} A^j \right) = \\ &= \epsilon^{ijk} \left(p^i p^j - \frac{e}{c} p^i A^j - \frac{e}{c} A^i p^j + \frac{e^2}{c^2} A^i A^j \right) = -\frac{e}{c} \epsilon^{ijk} (p^i A^j + A^i p^j) \end{aligned}$$

dove il primo e ultimo termine si annullano perchè termini simmetrici moltiplicati alla ϵ che è antisimmetrica. Passando ad esprimere l'impulso con il gradiente immaginamo che il tutto sia applicato ad una funzione d'onda per non sbagliarci con i conti.

$$\begin{aligned}
 -\frac{e}{c}\epsilon^{ijk} (p^i A^j + A^i p^j) \psi &= i\hbar\frac{e}{c}\epsilon^{ijk} (\nabla^i(A^j\psi) + A^i(\nabla^j\psi)) = \\
 &= i\hbar\frac{e}{c}\epsilon^{ijk} \left((\nabla^i A^j)\psi + \underbrace{A^j(\nabla^i\psi)A^i(\nabla^j\psi)}_{sim} \right) \\
 &\quad \downarrow \\
 &= i\hbar\frac{e}{c}\epsilon^{ijk} (\nabla^i A^j)
 \end{aligned}$$

il pezzo evidenziato è simmetrico e si annulla con ϵ e mettendo insieme tutto otteniamo

$$(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})^2 = \vec{\pi}^2 + i\sigma^k i\hbar\frac{e}{c}\underbrace{\epsilon^{ijk} (\nabla^i A^j)}_{(\nabla \times A)^k = B^k} = \vec{\pi}^2 - \hbar\frac{e}{c}B^k\sigma^k$$

L'equazione di Dirac non relativistica quindi diventa

$$i\hbar\dot{\varphi} = (e\Phi)\varphi - \frac{e\hbar}{2cm}\vec{B} \cdot \vec{\sigma}\varphi + \frac{\vec{\pi}^2}{2m}\varphi$$

il termine centrale è l'interazione di un dipolo magnetico con il campo.

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{B} \longrightarrow \vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2cm}\vec{\sigma}$$

Che prende il nome di momento magnetico della particella di Dirac. Questa si porta quindi uno spin! (contiene la matrice di Pauli). Riscrivendo la relazione si vede che l'elettrone si comporta come un magnetino elementare con momento magnetico intrinseco pari a:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{cm} \underbrace{\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}}_{\vec{s}} = \frac{e}{mc}\vec{s}$$

Questa quantità può essere misurata molto precisamente e risulta essere esatta a meno di un fattore due. Per vedere da dove viene

mettiamoci in un campo magnetico costante⁶

$$H = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} \quad \text{con} \quad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$$

$$H \sim \frac{p^2 - 2\frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{p}}{2m}$$

essendo A legata a r da un prodotto vettoriale la sua componente i -esima non contiene mai la componente in cui deriva il gradiente (perchè B è costante!) quindi A e p commutano. Da qui si ricava il momento magnetico di Larmour che coincide con quello orbitale.

$$H \sim \frac{p^2}{2m} - \vec{B} \cdot \underbrace{\left(\frac{e}{2mc}\vec{L}\right)}_{\vec{\mu}}$$

4.4 Integrale generale

Per neutralizzare il prolema delle energie negative dobbiamo ricorrere allo stesso formalismo che abbiamo adottato per l'equazione di Klein-Gordon. Prima dobbiamo trovare un integrale generale dell'equazione, e imporre quindi la canonizzazione. La corrispondenza tra le parentesi di poisson e i commutatori ci porterà alla quantizzazione del campo di Dirac.

L'equazione di Dirac libera può essere scritta nella forma:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0$$

Il prodotto scalare che mantiene unitaria la norma dell'equazione è dato dalla legge di conservazione:

$$\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0$$

$$\int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int d^3x \psi^+ \gamma^0 \gamma^0 \psi = \int d^3x \psi^+ \psi > 0$$

⁶La dimostrazione di questa relazione si può trovare nelle dispense degli stessi autori per il corso di MQNR.

Questo oggetto è definito positivo. Nella teoria quantistica dei campi non rappresenta la densità di probabilità, ma la corrente elettromagnetica. L'equazione di Dirac è un sistema di equazioni differenziali con le derivate ordinarie a coefficienti costanti. Imponiamo soluzioni del tipo:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx}$$

Dove px è il prodotto scalare in quadrivettori:

$$e^{-ipx} = e^{-ip_0x_0} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Il termine $u(p)$ è un vettore colonna⁷, che rappresenta le quattro componenti di ψ . L'operatore $\not{\partial}$ applicato alla ψ la trasforma nel seguente modo:

$$\not{\partial}e^{-ipx} = \partial_\mu e^{-ipx} \gamma^\mu = -ip_\mu \gamma^\mu e^{-ipx}$$

Possiamo definire un nuovo simbolo, per brevità:

$$\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$$

Con questa definizione l'equazione di Dirac applicata alla soluzione ψ può essere riscritta nel seguente modo:

$$(\not{p} - m) u(p) e^{-ipx} = 0$$

$$(\not{p} - m) u(p) = 0$$

Questa è un'equazione algebrica omogenea, del tutto equivalente ad un'equazione agli autovalori per l'energia. La soluzione non banale del sistema esiste soltanto quando il determinante della matrice dei coefficienti si annulla. Imporre l'esistenza di una soluzione non banale equivale a trovare la condizione che devono soddisfare i coefficienti (e quindi l'impulso p).

$$\gamma^0 \doteq \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i \doteq \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Scriviamo l'operatore \not{p} :

$$\not{p} = P^0 \gamma^0 - \vec{P} \cdot \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} P^0 & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -P^0 \end{pmatrix}$$

⁷L'operatore $\not{\partial}$ ha nella definizione la contrazione con le matrici γ^μ , che operano sullo spazio degli spin, che abbiamo dimostrato avere dimensione minima di 4.

Da cui la matrice dei coefficienti risulta:

$$\not{p} - m = \begin{pmatrix} P^0 - m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -P^0 - m \end{pmatrix}$$

Imponiamo che il determinante sia nullo per ottenere la condizione che deve soddisfare P^0 (energia).

$$\det \begin{pmatrix} P^0 - m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -P^0 - m \end{pmatrix} = - \left(P^{02} - m^2 \right) + (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = 0$$

Dove l'ultimo termine è:

$$\begin{aligned} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 &= P^i P^j \sigma_i \sigma_j = \\ &= P^i P^j \left(\frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j] + \frac{1}{2} \underbrace{\{\sigma_i, \sigma_j\}}_{2g_{ij}} \right) = \\ &= P^i P^j g_{ij} = \\ &= |\vec{p}|^2 \end{aligned}$$

Dove abbiamo diviso il prodotto $\sigma_i \sigma_j$ in parte simmetrica e antisimmetrica, la parte antisimmetrica (il commutatore) si annulla, perché le $P^i P^j$ sono simmetriche.

Sostituendo dentro l'espressione del determinante otteniamo:

$$m^2 - P_0^2 + |\vec{p}|^2 = 0$$

Da cui ricaviamo la condizione che deve soddisfare l'energia:

$$P_0 = \pm \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} = \pm E_p$$

L'energia P_0 risulta essere \pm l'energia cinetica della particella.

Le soluzioni ad energia negativa non si originano dalla quadratura fatta per ottenere l'equazione di Klein-Gordon, ma sono insite nell'equazione originale. Procediamo quindi come già fatto nel capitolo 2 e esplicitiamo il segno di P^0 definendo due soluzioni indipendenti:

$$\psi_+(x) = u(p)e^{-ipx} \quad \psi_-(x) = u(p)e^{ipx}$$

Il segno di P_0 adesso è sempre da intendere positivo. Con questa convenzione abbiamo cambiato segno alle soluzioni spaziali dell'equazione $\psi_-(x)$, tuttavia questo cambio di segno risulterà molto utile quando introdurremo gli operatori di creazione e distruzione.

Risolviamo le due equazioni sostituendo i corrispondenti valori di P^0 . Ad esempio risolviamo l'equazione per energia positiva:

$$P^0 = +\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} = E_p$$

Definiamo il vettore u

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Con φ e χ due vettori di dimensione 2.

$$\begin{pmatrix} E_p - m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -E_p - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché il determinante della della matrice dei coefficienti è nullo le due equazioni sono dipendenti. Risolviamo quindi solo la seconda.

$$\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \varphi = (E_p + m) \chi$$

$$\chi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E_p + m} \varphi$$

La soluzione ad energia positive ha degenerazione doppia, per le due possibili indipendenti scelte del vettore φ , ad esempio:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E_p + m} \varphi \end{pmatrix}$$

Ovviamente la soluzione dovrà essere normalizzata, per la soluzione ad energia negativa⁸ avremo invece:

$$\begin{pmatrix} -E_p - m & \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} & E_p - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⁸Dobbiamo ricordarci che abbiamo per convenzione cambiato anche il segno ai vettori spaziali di \vec{p} .

Anche queste sono due equazioni dipendenti, quindi scegliamone arbitrariamente una delle due, ad esempio la prima:

$$\varphi(E_p + m) = (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})\chi$$

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E_p + m}\chi$$

Anche in questo caso χ corrisponde a due spinori indipendenti.

$$v = \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E_p + m}\chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

4.4.1 Normalizzazione delle soluzioni

Dobbiamo occuparci di come normalizzare le soluzioni. Esistono due interessanti definizioni di prodotto scalare, che hanno proprietà interessanti differenti. Essendo ad esempio

$$\bar{\psi}\psi$$

Uno scalare invariante di Lorentz, la normalizzazione naturale per la teoria della MQR sarebbe:

$$\bar{u}_r(p)u_s(p) = \delta_{rs}$$

Questa condizione di normalizzazione è invariante di Lorentz, e può essere estesa al caso delle soluzioni ad energia negativa:

$$\bar{v}_r v_s = -\delta_{rs}$$

Il prodotto scalare in questione ha però lo svantaggio di non essere definito positivo, tuttavia è facile verificare che, imposte le condizioni precedenti, gli spinori ad energia positiva e quelli ad energia negativa sono ortogonali:

$$\bar{u}(p)v(p) = 0$$

In questa metrica i due spinori sono ortogonali. Il motivo per cui avviene questa cosa è interessante. Infatti la nozione di operatore aggiunto dipende dalla metrica che si sceglie.

Approfondiamo un po' la questione: u e v soddisfano le seguenti equazioni.

$$\begin{cases} (\not{p} - m)u = 0 \\ (\not{p} + m)v = 0 \end{cases} \quad (i\not{p} - m)ve^{ipx} = (-\not{p} - m)v = 0$$

Possiamo interpretare queste equazioni come equazioni agli autovalori per v e u . u e v sono autovettori di \not{p} con autovalori pari a $\pm m$. Se l'operatore \not{p} fosse hermitiano allora u e v sarebbero ortogonali, ma \not{p} non è hermitiano nella metrica ordinaria. Quindi nella metrica ordinaria u e v non sono in generale ortogonali, tuttavia se ridefiniamo il prodotto scalare in modo che \not{p} sia hermitiano, allora otteniamo l'ortogonalità tra u e v .

Prendiamo in esame due metriche:

- $\langle u_1 | u_2 \rangle = u_1^+ u_2$ Questa metrica è definita positiva (ma non è invariante di Lorentz).
- $\langle u_1, u_2 \rangle = \bar{u}_1 u_2$ Questa metrica non è definita positiva (ma è invariante di Lorentz).

Andiamo a verificare se \not{p} è hermitiano in una di queste metriche:

$$\langle u_1, \not{p}u_2 \rangle = u_1^+ \not{p}u_2 = (\not{p}^+ u_1)^+ u_2 = \langle \not{p}^+ u_1 | u_2 \rangle$$

Ma sappiamo che $\not{p}^+ \neq \not{p}$. Nella seconda metrica invece:

$$\langle u_1 | \not{p}u_2 \rangle = \bar{u}_1 \not{p}u_2 = u_1^+ \gamma^0 \not{p}u_2 = u_1^+ \not{p}^+ \gamma^0 u_2 = \langle \not{p}u_1, u_2 \rangle$$

Il \not{p} nella seconda metrica è autoaggiunto e quindi i suoi autovettori sono ortogonali. Questo prodotto scalare rende ortogonali i vettori u e v .

Vogliamo adesso normalizzare u ; quindi calcoliamoci $\bar{u}u$:

$$\begin{aligned} \bar{u}u &= \left(\varphi^+ \quad \frac{\vec{p}\vec{\sigma}\varphi^+}{E+m} \right) \gamma^0 \left(\frac{\varphi}{\vec{p}\vec{\sigma}\varphi} \right) = \left(\varphi^+ \quad \frac{\vec{p}\vec{\sigma}\varphi^+}{E+m} \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \left(\frac{\varphi}{\vec{p}\vec{\sigma}\varphi} \right) \\ &= \varphi^+ \varphi - \frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2 \varphi^+ \varphi}{(E+m)^2} = \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \right) \varphi^+ \varphi \end{aligned}$$

Ora manipoliamo il termine fra tonde:

$$N = \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2}\right) = \left(\frac{E^2 + m^2 + 2mE - \vec{p}^2}{(E+m)^2}\right) = \\ = \left(\frac{\vec{p}^2 + 2m^2 + 2mE - \vec{p}^2}{(E+m)^2}\right) = \frac{2m}{E+m}$$

Da cui possiamo scrivere la u normalizzata

$$u_p = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \varphi}{E+m} \end{pmatrix}$$

Similmente si normalizzano le v ; nel seguito non useremo quasi mai le forme esplicite di u e v , quello che ci servirà sono alcune proprietà di queste soluzioni esplicite come alcuni proiettori che andiamo a studiare. Abbiamo quattro spinori ortonormali fra loro, cerchiamo una relazione di completezza:

$$I = \sum_{r=1}^2 u_r \bar{u}_r(\pm) v_r \bar{v}_r$$

la metrica non è definita positiva quindi dobbiamo capire che segno mettere, ipotizziamo che sia più e moltiplichiamo a destra per u_s o a sinistra per v_s

$$\begin{cases} u_s I = u_s \left(\sum_{r=1}^2 u_r \bar{u}_r(\pm) v_r \bar{v}_r \right) = u_s + 0 \\ I v_s = \left(\sum_{r=1}^2 u_r \bar{u}_r(\pm) v_r \bar{v}_r \right) v_s = 0 - v_s \end{cases}$$

quindi per verificare l'uguaglianza mi serve uno fattore meno, segue quindi che la completezza è

$$I = \sum_{r=1}^2 u_r \bar{u}_r - v_r \bar{v}_r$$

chiamiamo per brevità i proiettori $\sum_{r=1}^2 u_r \bar{u}_r = \Lambda^+$ e $\sum_{r=1}^2 v_r \bar{v}_r = \Lambda^-$ la somma dei proiettori da uno.

Il proiettore deve essere indipendente dalla base scelta quindi vediamo come poterlo riscrivere sapendo che:

$$\Lambda^+ = \sum_{r=1}^2 u_r \bar{u}_r \quad e(\not{p} - m)u = 0$$

con

$$u^+(\not{p}^+ - m)\gamma^0 = 0 \rightarrow \bar{u}(\not{p} - m) = 0$$

quindi se moltiplichiamo per \bar{u}

$$(\not{p} - m - m + m) \underbrace{\bar{u}u}_{=\Lambda^+} = 0$$

$$(\not{p} + m)\Lambda^+ = 2m\Lambda^+$$

che è verificata per $\Lambda^+ = \frac{\not{p} + m}{2m}$ come si può verificare sostituendo. Per trovare l'espressione di Λ^- sfruttiamo la completezza:

$$\Lambda^- = I - \Lambda^+ = \frac{2m - \not{p} - m}{2m} = -\frac{\not{p} - m}{2m}$$

come verifico che sono proiettori? ne faccio il quadrato e verifico che ritornano se stessi:

$$(\Lambda^+)^2 = \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)^2 = \frac{\not{p}^2 + m^2 + 2m\not{p}}{4m^2} = \frac{\not{p} + m}{2m} = \Lambda^+$$

infatti

$$\not{p}^2 = p_\mu \gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu = p_\mu p_\nu \left\{ \frac{1}{2} \underbrace{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}_{=2g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right\} = p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = p^0^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

Bene adesso ritorniamo a parlare della $\psi(x)$ che generalizzata sarà una somma sulle polarizzazioni indipendenti, un fattore di normalizzazione e le soluzioni di onda piana già discusse:

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int d^3p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_p}} (b_r(p) u_r(p) e^{-ipx} + d_r(p) v_r(p) e^{ipx})$$

Per far diventare b e d operatori di creazione e distruzione dobbiamo definire anche qui il formalismo canonico; questo ci sarà molto utile in seguito per studiare gli osservabili. Trattiamo l'equazione di Dirac come se fosse una di Maxwell e anche qui introduciamo ψ e $\bar{\psi}$ indipendenti.

$$S = \int d^3x \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi$$

la cui variazione è

$$\delta S = \int d^3x \{ \delta\bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\psi + \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\delta\psi \} = 0$$

poichè $\delta\psi$ e $\delta\bar{\psi}$ sono indipendenti prendiamone due fatte così:

$$\begin{cases} \delta\psi = 0 \\ \delta\bar{\psi} = \text{arbitrario} \end{cases}$$

quindi poichè la variazione deve essere nulla e $\delta\bar{\psi}$ è arbitrario il pezzo che lo moltiplica deve essere uguale a zero.

$$(i\rlap{\not{D}} - m)\psi = 0$$

quindi

$$\int d^3x \{ \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\delta\psi \} = 0$$

L'integrale si può spezzare in due parti, il termine con $\rlap{\not{D}}$ diventa

$$\int d^3x \bar{\psi} i\rlap{\not{D}} \delta\psi = \int d^3x \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi = - \int d^3x i\gamma^\mu \bar{\psi} \partial_\mu \delta\psi = \int -i\bar{\psi} \rlap{\not{D}} \delta\psi$$

dove nell'ultimo passaggio si è integrato per parti come già fatto nel caso di Klein-Gordon. Riunendo il primo integrale così modificato al secondo abbiamo

$$\int \bar{\psi}(-i\rlap{\not{D}} - m)\delta\psi = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} + m) = 0$$

abbiamo così identificato l'azione che ci dà le equazioni di Dirac; possiamo adesso usare il teorema di Noether per calcolare le quantità conservate. Siamo arrivati quindi all'equazione di Dirac

$$(i\rlap{\not{D}} - m)\psi = 0$$

con $\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} (b_r(p)u_r(p)e^{-ipx} + d_r(p)v_r(p)e^{ipx})$ e la regola di commutazione in cui $[b_r(p), b_s^+(p')] = \delta_{rs}\delta(p-p')$ e analogo per le d . Ora scriviamoci l'Hamiltoniana come integrale spaziale della densità hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} \longrightarrow H = \int d^3x \mathcal{H}$$

con $\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^+$ e $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi$

Svolgendo i calcoli si ricava:

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left[i\psi^+\dot{\psi} - \psi^+\gamma^0 \left(i\gamma^0\partial_0\psi + \underbrace{i\gamma^i\partial_i\psi}_{=\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}} - m\psi \right) \right] = \\
 &= \int d^3x [-i\psi^+\gamma^i\nabla_i\psi + m\psi^+\gamma^0\psi] = \int d^3x \psi^+ [\vec{p}\cdot\vec{\alpha} + m\beta] \psi
 \end{aligned}$$

vorremmo ora esprimere l'H in termini di b e d; sostituendo le espressioni di ψ e ψ^+ nella relazione appena ottenuta vengono termini misti che si semplificano poichè u e v sono ortogonali e abbiamo:

$$H = \sum_{r=1}^2 \int d^3p E_p (b_r^+ b_r - d_r^+ d_r)$$

questa volta la quantizzazione del campo di Dirac non risolve il problema dell'energia negativa! Infatti il termine con il meno potrebbe dare risultati negativi. Introduciamo ora il problema dell'oscillatore di Fermi; sfrutteremo l'idea che c'è dietro per risolvere il problema dell'energia negativa.

4.5 L'oscillatore di Fermi

Sappiamo che l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico si può scrivere in termini degli operatori di creazione e distruzione come:

$$H = a^+ a \omega \quad \text{con} \quad [a, a^+] = 1$$

Sappiamo che questi oggetti, gli operatori di creazione e distruzione, descrivono entità bosoniche; l'oscillatore di Fermi si ottiene con questo formalismo in cui però la regola di commutazione sugli operatori è sostituita con una di anticommutazione:

$$[a, a^+]_+ = 1$$

quindi $[a, a^+]_+ = 0$ che si traduce in $a^2 = 0$. L'operatore composto $a^+ a$ è definito positivo, avrà quindi un autovalore minimo. Chiamiamo

adesso $N = a^+a$, avremo aggiungendo e sottrahendo a^+a

$$\begin{aligned} N^2 &= a^+aa^+a = a^+(aa^+ - a^+a + a^+a)a = a^+(\underbrace{aa^+ + a^+a - a^+a}_{=1})a = \\ &= a^+a - (a^+)^2 \underbrace{(a^2)}_{=0} = a^+a = N \end{aligned}$$

questa equazione ha come soluzione

$$N^2 - N = N(N - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad N = 0, N = 1$$

quindi se ora applichiamo l'hamiltoniana al vuoto abbiamo

$$\begin{cases} H |0\rangle = \omega a^+a |0\rangle = 0 |0\rangle \\ H a^+ |0\rangle = \omega \underbrace{a^+a}_{N=1} a^+ |0\rangle = \omega a^+ |0\rangle \end{cases}$$

Questo sistema è a due livelli, 0 o 1! Questo suggerisce di provare a sostituire le regole di commutazione del nostro formalismo con gli anticommutatori. Vediamo cosa succede!

$$[d_r(p), d_r(p)^+] = d_r(p)d_r(p)^+ + d_r(p)^+d_r(p) = \delta(0)$$

L'H ha ancora il segno meno ma essendo che ora ho solo due livelli possono fare una sostituzione per renderla definita positiva

$$d_r(p)d_r(p)^+ = -d_r(p)^+d_r(p) + \delta(0) \quad \text{con} \quad [d_r, d_s] = \delta_{rs}\delta(p-p') \quad \text{e} \quad r =$$

e sostituendo nell'hamiltoniana otteniamo

$$H = \sum_{r=1}^2 \int d^3p E_p (b_r^+ b_r + d_r^+ d_r - \delta(0))$$

L'energia è definita a meno di una costante e quindi posso mandare via la delta in zero e avere una quantità definita positiva.

$$H = \sum_{r=1}^2 \int d^3p E_p (b_r^+ b_r + d_r^+ d_r)$$

4.6 Regole di superselezione

Ci sono i quark e gli elettroni che sono tutte particelle fondamentali descritte dall'equazione di Dirac.

Inoltre l'equazione di Dirac ci mette in luce come per ogni particella esista un'altra particella, descritte dagli spinori ad energia negativa, che hanno la stessa massa delle rispettive particelle, carica opposta, e stesso spin.

Gli stati dei sistemi nell'equazione di Dirac possono essere scritti ricorrendo agli operatori di creazioni e distruzione.

$$b_r^+(\vec{p})b_s^+(\vec{k})|0\rangle$$

Questo è uno stato a due elettroni, con impulsi \vec{p} e \vec{k} e polarizzazione r e s . Lo stato generale di sistemi a due elettroni è ottenibile come combinazione lineare:

$$|\psi\rangle = \sum_{r,s} \int d\vec{p} d\vec{k} b_r^+(\vec{p})b_s^+(\vec{k})|0\rangle$$

Questa è la funzione d'onda nello spazio degli impulsi, questa funzione d'onda è necessariamente antisimmetrica perché gli operatori di creazione anticommutano tra di loro. Questo stato è antisimmetrico nello scambio di particelle:

$$b_r^+(\vec{p})b_s^+(\vec{k}) = -b_s^+(\vec{k})b_r^+(\vec{p}) + \underbrace{\{b_r^+(\vec{p}), b_s^+(\vec{k})\}}_{=0}$$

Le particelle create dagli operatori b_r^+ e b_s^+ sono dei fermioni, questo deriva dall'aver sostituito le regole di commutazione con le regole di anticommutazione, siamo stati obbligati a fare questo, altrimenti l'energia viene negativa. Particelle di spin $1/2$ anticommutano, sembra che tutto si spieghi. In realtà, modificando le regole di commutazione, abbiamo fatto un bel disastro, perché l'operatore $\psi(x)$ anticommuta con l'operatore $\psi(y)$. Quindi i due operatori ad una distanza di tipo spazio non commutano, ma anticommutano! Questo rompe il principio di causalità. Possiamo usare questi osservabili per trasmettere l'informazione più veloce della luce!

Per uscire da questo paradosso dobbiamo supporre che le ψ non siano mai osservabili. La loro non osservabilità si deve formalizzare correttamente.

In meccanica quantistica possiamo sempre combinare tra loro stati che vivono nello stesso spazio di Hilbert. Per rendere la teoria di Dirac invariante relativistico dobbiamo impedire formalmente l'esistenza di alcune combinazioni lineari: Supponiamo di prendere due stati con differente numero di fermioni.

$$\underbrace{b^+b^+ |0\rangle}_{\text{Parità fermionica positiva}} \qquad \text{Parità fermionica negativa} \qquad \underbrace{b^+b^+b^+ |0\rangle}$$

Questi stati sono classificabili dalla parità fermionica, cioè il numero di fermioni - in numero di antifermioni presenti nel sistema. Possiamo definire una regola di superselezione: *non sono realizzabili stati di coerenza con differente parità fermionica.*

$$Ab^+b^+ |0\rangle + B |0\rangle \qquad \text{Stato realizzabile}$$

$$Cb^+b^+ |0\rangle + Db^+ |0\rangle \qquad \text{Stato non realizzabile}$$

Se applichiamo l'operatore ψ ad uno stato generico, la parità fermionica dello stato risultante sarà invertita:

$$\psi |+\rangle = |-\rangle \qquad \psi |-\rangle = |+\rangle$$

Questo perché l'operatore ψ agisce sullo stato con un singolo operatore di creazione o distruzione di fermioni o antifermioni, per cui la parità cambia sempre segno.

$$\langle +|\psi|+\rangle = 0$$

$$(\langle +| + \langle -|) \psi (|+\rangle + |-\rangle) \neq 0$$

Se si vieta la sovrapposizione coerente con stati di parità diverse, l'operatore ψ ha sempre valor medio nullo. Gli osservabili sono quindi gli operatori quadratici in ψ . Lo stesso principio si applica ad altri numeri quantici, come la superselezione della carica.

4.7 Altri osservabili

4.7.1 Impulso spaziale

Dobbiamo ora costruire l'impulso spaziale degli stati fermionici. Scriviamo la lagrangiana di Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi$$

Usando il teorema di Nöther si può ottenere l'espressione dell'impulso:

$$P^i = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \delta \psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^+$$

$$P^i = i \int d^3x \psi^+ \partial^i \psi$$

Questo impulso è dato dal valor medio formale dell'operatore impulso nella teoria non relativistica ($\vec{P} = -i\vec{\nabla}$) sullo stato ψ . Ovviamente l'espressione è solo formale, poiché ψ non è uno stato ma un operatore. Andiamo a sostituire l'espressione di ψ in funzione degli operatori di creazione e di annichilazione.

Nell'effettuare questa sostituzione dobbiamo tenere conto delle operazioni che abbiamo fatto sull'hamiltoniana in modo da mantenere coerente la nostra teoria. Questa operazione si chiama *buon ordinamento*.

Il buon ordinamento è definito con le regole di commutazione o le regole di anticommutazione, Si spostano a sinistra tutti i termini dipendenti dagli operatori di creazione, a destra quelli di annichilazione. A questo punto si sfruttano le regole di anticommutazione e si sottrae il valore infinito che viene fuori dalla δ di Dirac. Con queste operazioni l'operatore impulso diventa:

$$\vec{P} = \sum_r \int dk \vec{k} \left(b_r^+(\vec{k}) b_r(\vec{p}) + d_r^+(\vec{k}) d_r(\vec{p}) \right)$$

4.7.2 Momento angolare

Verifichiamo che la rotazione degli spinori avvenga proprio con le matrici di Pauli definite in meccanica quantistica non relativistica. Prendiamo

la generica trasformazione degli spinori e specifichiamola nel caso della rotazione:

$$S(\Lambda) = I - \frac{1}{8} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \varepsilon_{\mu\nu}$$

Abbiamo verificato che la $\varepsilon_{\mu\nu}$ è antisimmetrica. Se guardiamo rotazioni attorno all'asse delle zeta abbiamo che ε mischia le componenti x e y (la prima e la seconda) non toccando ne z ne il tempo. Sotto queste considerazioni le uniche due componenti non nulle sono ε_{12} e ε_{21} , che sono uguali in modulo ma hanno segno opposto (ε è antisimmetrico).

Esplicitando la somma sugli indici μ e ν otteniamo:

$$S(\Lambda) = I - \frac{1}{4} [\gamma^1, \gamma^2] \varepsilon_{12}$$

Calcoliamo esplicitamente il commutatore tra le due γ spaziali:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\gamma^i, \gamma^j] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\gamma^i, \gamma^j] = \begin{pmatrix} -\sigma_i \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i \sigma_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma_j \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_j \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$[\gamma^i, \gamma^j] = \begin{pmatrix} [\sigma_j, \sigma_i] & 0 \\ 0 & [\sigma_j, \sigma_i] \end{pmatrix}$$

Sapendo che:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Otteniamo che:

$$[\gamma^1, \gamma^2] = -2i \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$$

Da cui la rotazione attorno all'asse z diventa:

$$S(\Lambda) = I + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \varepsilon$$

Questo risultato ci mostra come la particella a riposo si trasforma esattamente come si trasforma un fermione sotto rotazioni in MQNR usando la matrice σ :

$$S(\Lambda) = I + \frac{i}{2} \sigma_3 \varepsilon$$

4.7.3 Invarianza di fase

La densità lagrangiana è invariante per trasformazioni di fase. Questa proprietà permette di ricavare usando il teorema di Nöther una grandezza conservata, che corrisponde al prodotto scalare già incontrato:

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi$$

$$\begin{cases} \delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi} \\ \delta\psi = i\alpha\psi \end{cases}$$

$$Q = \int d^3x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}\delta\bar{\psi} \right) = i\alpha \int d^3x \psi^+\psi$$

Se andiamo a scrivere al posto dei campi ψ e ψ^+ gli operatori di creazione e distruzione otteniamo:

$$Q = \sum \int d^3k \left[b_r^+(\vec{k})b_r(\vec{k}) - d_r^+(\vec{k})d_r(\vec{k}) \right]$$

Cioè le particelle create con l'operatore b hanno carica $+1$, le particelle create con l'operatore d hanno carica -1 . Questa se moltiplicata per la carica dell'elettrone è la vera carica elettrica del sistema (ricordiamo che l'elettrone infatti ha carica negativa).

Quello che rimane da fare adesso è calcolare il propagatore dell'equazione di Dirac:

$$\langle 0|T(\psi_l(x)\bar{\psi}_m(y))|0\rangle$$

con $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ e T che rappresenta il time ordering, ossia ordina gli oggetti a cui è applicato in modo che⁹:

$$T(\psi_l(x)\bar{\psi}_m(y)) = \begin{cases} \psi_l(x)\bar{\psi}_m(y) & \text{per } x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}_m(y)\psi_l(x) & \text{per } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Il prodotto quindi non è simmetrico per scambio di operatori, c'è un segno meno che salta fuori. Cominciamo con il calcolarci

$$\langle 0|\psi_l(x)\bar{\psi}_m(y)|0\rangle$$

⁹Viene dal fatto che i campi a distanza fissata anticommutano

andando ad esplicitare ψ e $\bar{\psi}$:

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int d^3p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_p}} (b_r(p) u_r(p) e^{-ipx} + d_r(p)^+ v_r(p) e^{ipx})$$

e

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int d^3p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_p}} (b_r^+(p) \bar{u}_r(p) e^{ipx} + d_r(p) \bar{v}_r(p) e^{-ipx})$$

Se si svolgono i conti si vede dei quattro termini che vengono dal prodotto di ψ e $\bar{\psi}$ solo uno è diverso da zero infatti i quattro termini avranno al loro interno rispettivamente $\langle 0|bb^+|0\rangle, \langle 0|bd|0\rangle, \langle 0|d^+b^+|0\rangle, \langle 0|d^+d|0\rangle$, ma sappiamo che $b|0\rangle$ e $d|0\rangle$ (e complessi coniugati) sono nulli quindi l'unico termine che sopravvive è quello con $\langle 0|bb^+|0\rangle$.

$$\sum_{r,s=1}^2 \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \langle 0|b_r(p) b_s^+(p')|0\rangle (u_r(p))_l (\bar{u}_s(p'))_m e^{-ipx} e^{ip'y}$$

$$\text{ma } \langle 0|b_r(p) b_s^+(p')|0\rangle = \langle 0|\{b_r(p), b_s^+(p')\}|0\rangle = \delta_{sp} \delta(p-p')$$

infatti poiché b sullo stato di vuoto è nullo posso sostituirci l'anticommutatore (avrei potuto anche metterci il commutatore non sarebbe cambiato nulla). Quello che rimane dopo che le delta hanno agito su sommatorie e integrali è:

$$\sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} (u_r(p))_l (\bar{u}_r(p))_m e^{-ip(x-y)}$$

Ma abbiamo visto che $\sum_{r=1}^2 (u_r(p))_l (\bar{u}_r(p))_m = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)$ (parlando della completezza e dei proiettori l'abbiamo chiamata Λ^+); ossia questa somma è l'elemento di matrice del proiettore sulle p positive. Andando a sostituire otteniamo:

$$\int \frac{d^3p d^4p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\not{p}+m)_{lm} e^{-ip(x-y)}$$

questa quantità è una trasformata di Fourier quindi possiamo sfruttare le proprietà della TF per le derivate e riscriverla come

$$(i\rlap{/}\partial - m)_{lm} \underbrace{\int \frac{d^3 p d}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip(x-y)}}_{=i\Delta^+(x-y)}$$

quindi abbiamo trovato che

$$\langle 0 | \psi_l(x) \bar{\psi}_m(y) | 0 \rangle = (i\rlap{/}\partial - m)_{lm} i\Delta^+(x - y)$$

Adesso bisogna calcolare¹⁰

$$\langle 0 | \bar{\psi}_m(x) \psi_l(y) | 0 \rangle = \sum_{r,s=1}^2 \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \langle 0 | d_r(p) d_s^+(p') | 0 \rangle (\bar{v}_r(p))_l (u_s(p'))_m$$

Ora si ripetono i passaggi già fatti (ricordiamo che tutti gli altri termini misti che vengono dal prodotto hanno o b applicato al vuoto o d applicato al vuoto che si annullano).

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} (v_r(p))_l (\bar{v}_r(p))_m e^{+ip(x-y)} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{2E_p} (\rlap{/}\partial - m)_{lm} e^{ip(x-y)} \\ &= (-i\rlap{/}\partial - m)_{lm} i\Delta^-(x - y) \end{aligned}$$

Infatti $\sum_{r=1}^2 \int (v_r(p))_l (\bar{v}_r(p))_m = \frac{\rlap{/}\partial - m}{2m}$ ossia è meno il proiettore sulle energie negative. Quindi

$$\langle 0 | \bar{\psi}_m(x) \psi_l(y) | 0 \rangle = -(i\rlap{/}\partial + m)_{lm} i\Delta^-(x - y)$$

Supponiamo adesso di voler calcolare il valore medio dell'anticommutatore nel vuoto:

$$\langle 0 | \psi_l(x), \bar{\psi}_m(y) | 0 \rangle = (i\rlap{/}\partial_x + m)_{lm} (i\Delta^+(x - y) - i\Delta^+(y - x)) = 0$$

A distanza di tipo spazio l'anticommutatore è nullo. Va notato che avendo supposto l'esistenza del vuoto non posso imporre le regole di commutazione, tuttavia lo stato sarebbe rimasto invariato, nel passaggio in

¹⁰Qui sopravvive il termine dd^+

cui abbiamo immesso l'anticommutatore non sarebbe cambiato nulla inserendo il commutatore). Dimostriamo effettivamente che questa interpretazione del T prodotto propaghi l'equazione di Dirac:

$$\langle 0|T [\psi_l(x), \bar{\psi}_m(y)] |0\rangle \stackrel{?}{=} (i\not{\partial}_x + m) i\Delta_F(x - y)$$

Dove $i\Delta_f(x - y)$ è la funzione di Green dell'operatore di Dirac:

$$i\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^2} \frac{ie^{-q(x-y)}}{q^2 - m^2}$$

Supponiamo di prendere $x^0 > y^0$

$$i\Delta_F(x - y) = \begin{cases} i\Delta_+(x - y) & x^0 > y^0 \\ i\Delta_-(x - y) = i\Delta_+(y - x) & y^0 > x^0 \end{cases}$$

La matrice che inverte effettivamente l'operatore di Dirac possiamo scriverla in forma simbolica in questa maniera:

$$iS_F(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{\not{p} - m}$$

Questa matrice se esiste è banalmente l'inversa dell'operatore di Dirac. Per ottenerne un'espressione più senzata razionalizziamo il denominatore:

$$\frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{\not{p} + m} \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{\not{p}^2 - m^2}$$

Calcoliamo esplicitamente \not{p}^2

$$\not{p}^2 = p_\mu \gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu}} = p^2$$

Dove abbiamo scritto $\gamma^\mu \gamma^\nu$ come somma tra commutatore e anticommutatore. Essendo $p_\mu p_\nu$ simmetrico il termine col commutatore si cancella.

$$\frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$$

Quindi possiamo scrivere che la funzione di Green dell'operatore di Dirac sarà:

$$iS_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)}$$

Questo può essere riscritto portando fuori la derivata:

$$iS_F(x-y) = (i\not{\partial} + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2}$$

Abbiamo ritrovato proprio l'espressione del propagatore di Feynman che determina l'evoluzione degli stati. Ovviamente questa matrice esiste solo se si evitano gli zeri al denominatore, esattamente come si fa per il propagatore di Klein - Gordon. Anche in questo caso il propagatore di Feynman può essere interpretato come una funzione di Green dell'operatore di Dirac.

$$(i\not{\partial} - m)iS_f(x-y) = i\delta(x-y)$$

Capitolo 5

Elettrodinamica quantistica

Il campo di Dirac si porta dietro oggetti che hanno stesso spin, carica opposta, stessa massa. Abbiamo un formalismo in cui esistono sia elettroni, positroni e fotoni come prodotto tensoriale tra campo di Dirac e campo di Klein-Gordon. Tutti questi stati sono stati liberi. Dobbiamo introdurre un'interazione tra questi oggetti perché fino ad ora abbiamo sempre considerato le hamiltoniane libere.

Adesso il problema è molto più complicato. L'unico modo per cercare di risolvere il problema è quello di sperare che l'interazione sia piccola. L'hamiltoniana di interazione sarà del tipo:

$$H_I = e \int d^3x \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

Questa interazione introduce più di due prodotti tra i campi: infatti l'hamiltoniana è cubica nei campi: $(\psi, \bar{\psi}$ e A). Questo vertice a tre è il termine che permette di coinvolgere elettroni che generano fotoni¹. I calcoli che faremo saranno approssimati, e useremo massicciamente la teoria perturbativa.

5.1 Schemi di rappresentazione

Normalmente la meccanica quantistica si risolve nello schema di Schrödinger. Lo schema di evoluzione non ha nulla a che vedere con la fisica, solo

¹ $e \rightarrow e + \gamma$

con la matematica che descrive il sistema. Nello schema di Schrödinger gli osservabili e i loro autostati sono indipendenti dal tempo (con un'eccezione). L'unica grandezza che dipende realmente dal tempo è lo stato che stiamo considerando, che evolve secondo l'equazione di Schrödinger:

$$-i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H |\psi\rangle$$

L'eccezione a cui accennavamo è proprio l'hamiltoniana, che potrebbe avere una dipendenza esplicita dal tempo se si hanno potenziali esterni dipendenti dal tempo, altrimenti tutti gli operatori sono indipendenti dal tempo. Questo schema è uno schema matematico che non ha nulla a che vedere con la fisica, infatti le grandezze fisicamente interessanti sono i valori medi degli osservabili. Questi oggetti sono invarianti sotto qualunque trasformazione unitaria del sistema. Quindi si possono fare trasformazioni unitarie sia dipendenti dal tempo che indipendenti dal tempo senza modificare la fisica.

Si possono scegliere schemi alternativi a quello di Schrödinger. Nello schema di Heisenberg applichiamo una trasformazione unitaria su tutti i vettori e operatori che dipende dal tempo:

$$U = e^{iHt}$$

$$|\psi\rangle_H = e^{iHt} |\psi\rangle_S$$

Da cui si ottiene che tutti gli operatori sono dipendenti dal tempo:

$$A_H = e^{iHt} A_S e^{-iHt}$$

L'hamiltoniana H è la stessa dello schema di Schrödinger (commuta con l'operatore unitario). In questo schema tutti i vettori in generale dipenderanno dal tempo tranne l'unico che si evolveva nello schema di Schrödinger. I due schemi sono completamente equivalenti. Perché si usa uno schema piuttosto che un altro? Per semplicità, in alcuni schemi è più semplice vedere la covarianza di Lorentz della teoria.

Per la teoria delle perturbazioni sceglieremo un ulteriore schema, che ci permette di fare delle approssimazioni in maniera più semplice.

L'hamiltoniana che descrive il problema è divisa in due parti:

$$H = H_0 + H_I$$

Dove H_I è l'hamiltoniana di interazione, lo schema di interazione si ottiene dallo schema di Schroedinger applicando il seguente operatore unitario:

$$U = e^{iH_0t}$$

In questo schema tutti i vettori si evolvono nel tempo, gli operatori di nuovo sono tutti dipendenti dal tempo, tutto è dipendente dal tempo. Adesso dovremo calcolarci le equazioni del moto dello stato fisico. Tradurremo l'equazione di Schroedinger nello schema di interazione, e l'evoluzione temporale sarà determinata solo dalla hamiltoniana perturbata.

5.2 Schema di interazione

Ricapitolando quindi nello schema di Schroedinger gli operatori e quindi anche i loro autovalori e autovettori sono fissati mentre gli stati evolvono con l'hamiltoniana rispondendo all'equazione di Schroedinger

$$|\psi_t\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi_0\rangle \quad i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H |\psi\rangle$$

con per esempio nel caso dell'operatore posizione $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$. Ricordiamo che quando si passa dalla rappresentazione astratta dei ket a quella delle funzioni d'onda ($\langle x|\psi\rangle$) la derivata da totale passa a parziale perchè la funzione d'onda dipende da x e t .

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H \psi(x, t)$$

Nello schema di Heisemberg gli stati rimangono congelati mentre operatori e relativi autovettori evolvono con H .

$$|x, t\rangle = e^{\frac{iHt}{\hbar}} |x\rangle_s \quad \hat{X}(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} \hat{X}_s e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

Se ci chiediamo qual è la probabilità di trovare una particella di Heisemberg questa è

$${}_H \langle x, t | \psi_0 \rangle = {}_s \langle x | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | \psi_0 \rangle$$

Allora se parliamo di funzioni d'onda e quindi di osservabili la differenza fra le due modellizzazioni scompare.

Quello che serve a noi è un terzo schema quello di interazione in cui come vedremo sarà di gran lunga più semplice fare i conti. In questo schema l'hamiltoniana è formata da una hamiltoniana che sappiamo risolvere esattamente più da una piccola di interazione; la trasformazione unitaria di evoluzione temporale ha solo H_0 e quindi sia stati che operatori assumono una dipendenza dal tempo². Quindi abbiamo che gli operatori si trasformano semplicemente e assumono una dipendenza dal tempo:

$$A_s(t) = e^{iH_0t} A_s e^{iH_0t} \quad \text{con} \quad H = H_0 + H_I$$

Mentre per i vettori è più complicato infatti

$$|\psi, t\rangle_I = e^{iH_0t} |\psi, t\rangle_s \quad |\psi, t\rangle_I = e^{iH_0t} e^{-iHt} |\psi_0\rangle$$

ma ora stiamo trattando operatori quantistici e quindi

$$e^{-i(H_0+H_I)t} \neq e^{-iH_0t} e^{iH_I t}$$

Vediamo quindi che succede se inseriamo $|\psi, t\rangle_I$ nell'equazione di Schrodinger

$$= i \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle_I = H_I(t) |\psi, t\rangle_I$$

↓

- La derivata a sinistra è applicata ad una quantità composta quindi diventa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle_I &= -H_0 e^{iH_0t} e^{-Ht} |\psi_0\rangle + e^{iH_0t} H e^{-Ht} |\psi_0\rangle = \\ &= -H_0 e^{iH_0t} e^{-Ht} |\psi_0\rangle + \underbrace{e^{iH_0t} H_0}_{\text{commutano}} e^{-Ht} |\psi_0\rangle + e^{iH_0t} H_I e^{-Ht} |\psi_0\rangle = \\ &= e^{iH_0t} H_I e^{-Ht} |\psi_0\rangle \end{aligned}$$

- mentre il termine a destra si esplicita come:

$$H_I(t) |\psi, t\rangle_I = \underbrace{e^{iH_0t} H_I e^{-iH_0t}}_{H_I(t)} \underbrace{e^{iHt} |\psi_t\rangle_s}_{|\psi_t\rangle_I}$$

²Per non appesantire la notazione poniamo $\hbar = 1$.

Il vettore che segue il moto naturale ha:

$$-i \frac{d|\psi_t\rangle_I}{dt} = e^{iH_0 t} H_I e^{-iHt} \underbrace{|\psi_0\rangle}_{|\psi,t\rangle_s} = H_I(t) |\psi, t\rangle_I$$

Questa è una equazione molto complicata da risolvere, se però l'hamiltoniana di interazione è piccola posso approssimare la soluzione alla soluzione iniziale più pezzi sempre più piccoli.

$$i \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle = H_I(t) |\psi_t\rangle \quad \xrightarrow{\text{integriamo}} \quad |\psi_t\rangle - |\psi_0\rangle = -i \int_0^t H_I(t') |\psi_{t'}\rangle dt'$$

$$|\psi_t\rangle = |\psi_0\rangle - i \int_0^t H_I(t') |\psi_{t'}\rangle dt' = \underbrace{|\psi_0\rangle}_{\text{Ordine 0}} - i \underbrace{\int_0^t H_I(t') |\psi_0\rangle dt'}_{\text{O(1)}} - \underbrace{\int_0^t dt' \int_0^{t'} H_I(t'') |\psi_{t''}\rangle dt''}_{\text{O(2)}}$$

e così via iterativamente si può sostituire la soluzione e fermarsi all'ordine di accuratezza voluto. La potenza del metodo è che a qualsiasi ordine mi fermo ho i mezzi per calcolare gli integrali infatti in questi compare ψ_0 che conosco. Possiamo riscrivere in forma compatta come:

$$|\psi_t\rangle = |\psi_0\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) |\psi_0\rangle \quad \text{con } t$$

Decido l'ordine a cui fermarmi e tutti i termini sono calcolabili; anche le H_I le conosco essendo le H di interazione di campi liberi. Ora introduciamo il time ordering T , anche chiamato T prodotto, che dato un prodotto mette a destra i termini con il tempo minore:

$$|\psi_t\rangle = |\psi_0\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n T [H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)] |\psi_0\rangle$$

Nel nostro caso non cambia nulla essendo le H_I già ordinate, tuttavia adesso la quantità è simmetrica per scambio di due integrali e posso estendere tutti gli integrali da 0 a t dividendo per un fattore $\frac{1}{n!}$

$$|\psi_t\rangle = |\psi_0\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_0^t dt_1 \cdots dt_n T [H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)] |\psi_0\rangle$$

Vediamo esempi di come si possono calcolare queste grandezze all'interno della teoria dell'elettrodinamica quantistica. In genere nei processi di scattering si fa tendere a $-\infty$ il tempo iniziale. Dobbiamo inoltre far collassare il generico stato finale dell'interazione in uno degli stati che vogliamo osservare³, e facciamo evolvere il sistema con l'operatore di evoluzione. L'operatore di evoluzione è fatto nel seguente modo:

$$|\psi_t\rangle = U(t, t_0) |\psi_0\rangle$$

$$U(t, t_0) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots dt_n T [H_I(t_1), \cdots, H_I(t_n)]$$

Ipotizzando che la situazione di partenza sia: $t_0 \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$:

$$|\psi_\infty\rangle = U(-\infty, \infty) |\psi_{-\infty}\rangle$$

Se vogliamo rivelare uno stato che alla fine ha due fotoni basta calcolare l'elemento di matrice:

$$\langle \gamma\gamma | U(-\infty, \infty) | \psi_{-\infty} \rangle$$

Il propagatore tra $-\infty$ e ∞ è detto matrice di scattering, e si indica con la lettera S

$$S = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n T [H_I(t_1), \cdots, H_I(t_n)] \quad (5.1)$$

S è un operatore unitario. Ha una forma suggestiva che può essere condensata in notazione:

$$S = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(t) dt \right) \right]$$

Adesso abbiamo gli strumenti per poter calcolare i processi di elettrodinamica quantistica. Manca da trovare l'espressione dell'hamiltoniana di interazione.

³Se vogliamo osservare un processo di scattering compton ci aspettiamo sia all'inizio che alla fine stati con un elettrone e un fotone, bisogna proiettare quindi l'evoluzione finale su questo stato per ottenere una grandezza fisica sensata.

Per ricavare l'hamiltoniana di interazione vediamo prima un esempio più semplice, prendiamo una particella che interagisce con un campo elettromagnetico esterno, ingorando per ora la back reaction⁴.

L'esempio migliore è lo scattering Rutherford dell'elettrone sui nuclei: trascuriamo il fatto che sia nucleo che elettrone potrebbero emettere fotoni. Qual è l'hamiltoniana di interazione del sistema? I gradi di libertà sono elettronici e positronici, mentre il campo elettromagnetico esterno l'abbiamo preso fisso. La Lagrangiana si ottiene variando l'azione solo per i campi ψ fermionici, mentre il campo A rimane fisso.

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\partial^i\gamma_i - m)\psi = 0$$

Per passare in elettrodinamica occorre sommare all'impulso il potenziale vettore:

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu$$

Per cui l'equazione che il campo fermionico soddisfa è:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0$$

Moltiplichiamola per γ_0 :

$$(i\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^0\gamma^\mu A_\mu - \gamma^0 m)\psi = 0$$

$$\left[i\partial_0 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - e(A_0 + \alpha^i A_i) - m\beta \right] \psi = 0$$

Da questa espressione usando il principio di minima azione si può ricavare la forma della lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}A\psi$$

Questa lagrangiana è invariante per trasformazioni di fase in assenza di campo magnetico. Quando introduciamo un A non nullo, le trasformazioni di fase sono vincolate dall'invarianza di Gauge di A . Questa lagrangiana esibisce una invarianza di Gauge:

$$e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}_{\psi'} (i\cancel{\partial} - m) e^{i\alpha(x)}\psi_{\psi'}$$

⁴La *back reaction* è la reazione della particella al campo magnetico, ossia come questa particella modifica a sua volta i campi.

Se α è dipendente dalla posizione la derivata $\not{\partial}$ porta in evidenza un fattore α , annullando la normale invarianza di fase:

$$\bar{\psi}' (i\not{\partial} - m) \psi' = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - \partial_\mu \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Al cambiamento di fase occorre introdurre un cambiamento di Gauge opportuno che mi annulli il termine aggiuntivo:

$$A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

Questa trasformazione ci permette di introdurre un'interazione Gauge invariante.

$$\delta \int d^4x \mathcal{L}(x) = 0$$

$$(i\not{\partial} - m) \psi - e\not{A}\psi = 0$$

La lagrangiana di interazione è molto semplice. Possiamo ricavare l'hamiltoniana:

$$H = \int \left(\dot{\Phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} - \mathcal{L} \right) d^3x$$

$$\int d^3x \left(\dot{\Phi} \frac{\mathcal{L}_0}{\dot{\Phi}} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_I \right)$$

Se la lagrangiana è composta da un termine imperturbato L_0 e un termine di interazione L_I che non dipende dalle derivate dei campi allora anche l'hamiltoniana può essere separata in due hamiltoniane:

$$H = H_0 + H_I$$

Dove H_I è dato da:

$$H_I = - \int d^3x \mathcal{L}_I = +e \int d^3x \bar{\psi} \not{A} \psi$$

Ora possiamo scrivere la formula di Dyson:

$$S = I - ie \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int \bar{\psi} \not{A} \psi d^3x = I - ie \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \bar{\psi} \not{A} \psi$$

Il primo processo che analizzeremo sarà il processo di diffusione a partire da un campo esterno, ψ e $\bar{\psi}$ sono campi di Dirac. A il campo

esterno del sistema. In questo processo analizzeremo lo scattering di un nucleo di carica $-Ze$. Il campo coulombiano è:

$$A_0(x) = \frac{Z|e|}{4\pi|\vec{x}|} \quad A_i(x) = 0$$

Il campo elettrico classico è dato dal gradiente del potenziale

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A_0$$

Lo stato iniziale lo otteniamo creando dal vuoto un elettrone:

$$b_r^+(\vec{p})|0\rangle$$

Nello stato finale avremo ancora un elettrone:

$$b_r^+(\vec{k})|0\rangle$$

Dobbiamo calcolare l'elemento di matrice tra stato iniziale e stato finale, che è la quantità che entra in gioco per il calcolo della sezione d'urto del processo.

$$|\langle 0|b_r(\vec{k})Sb_r^+(\vec{p})|0\rangle|^2$$

5.3 Scattering coulombiano

Immaginiamo di avere un sistema chiuso in una scatola cubica di volume V . Tale sistema sarà caratterizzato da un set discreto di impulsi $\vec{p}_n = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$; se consideriamo la quantità

$$\sum_{\vec{p}_n} f(\vec{p}_n)$$

cosa succede se mandiamo il volume V all'infinito? come prima cosa aumentano il numero dei \vec{p}_n . Possiamo allora riscrivere la sommatoria come

$$\sum_{\vec{p}_n} f(\vec{p}_n) = \sum_i f(\vec{p}_i)\Delta n$$

dove quindi al posto della sommatoria su tutti gli impulsi abbiamo una sommatoria che scorre tutti i possibili impulsi con il Δn che conta quanti ce ne sono di uguali nel dato volume; Δn è quindi una densità di stati.

Ricordando che in una dimensione, per esempio lungo x , $\Delta_x = \frac{L}{2\pi} \Delta p_x$ in tre dimensioni abbiamo

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p$$

la sommatoria diventa un integrale e quindi possiamo riscrivere la quantità in questione come:

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} f(\vec{p}) d^3 p$$

ora mettiamo da parte il risultato ottenuto e ritorniamo allo scattering coulombiano:

$$\mathcal{L}_I = -e : \bar{\psi} \not{A} \psi :$$

poichè questa densità lagrangiana non contiene ψ punto, è diretto calcolare la densità hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L}_I = e : \bar{\psi} \not{A} \psi :$$

se il campo esterno è della forma

$$\begin{cases} A^0(x) = \frac{z|e|}{4\pi|\vec{x}|} \\ \vec{A}(x) = 0 \end{cases}$$

possiamo calcolare gli elementi della matrice di Dieson avendo

$$\begin{cases} c_r^+(\vec{p}) |0\rangle & \text{Stato iniziale} \\ c_{r'}^+(\vec{p}') |0\rangle & \text{Stato finale} \end{cases}$$

fermandoci agli effetti principali dell'interazione (ordine e).

$$\langle f | S - I | i \rangle = -ie \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x \langle 0 | c_{r'}^+(\vec{p}') : \bar{\psi} \not{A} \psi : c_r^+(\vec{p}) | 0 \rangle$$

con

$$\begin{cases} \psi(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\text{sqr}tV} \sqrt{\frac{m}{E_{\vec{p}}}} [c_r(\vec{p}) u_r \delta \vec{p} e^{-ipx} + d_r^+(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ipx}] \\ \bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\text{sqr}tV} \sqrt{\frac{m}{E_{\vec{p}}}} [c_r^+(\vec{p}) \bar{u}_r \delta \vec{p} e^{ipx} + d_r(\vec{p}) \bar{v}_r(\vec{p}) e^{-ipx}] \end{cases}$$

andando a moltiplicare ψ e $\bar{\psi}$ si ottengono quattro termini, d^+d, cd, c^+d^+, cc^+ per nostra fortuna da semplici considerazioni troviamo che:

1. d^+d si annulla perchè d e c_r^+ anticommutano e d applicato al vuoto da zero: $\langle 0|c_{r'}d^+dc_r|0\rangle = 0$
2. cd si annulla perchè di nuovo d e c_r^+ anticommutano: $\langle 0|c_{r'}cd c_r|0\rangle = 0$
3. c^+d^+ da zero perchè stavolta c e c^+ anticommutano $\langle 0|c_{r'}c^+d^+c_r|0\rangle = 0$
4. cc^+ è l'unico che sopravvive.

allora svolgendo i passaggi e sostituendo troviamo:

$$\begin{aligned}
 & -ie \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \langle 0|c_{r'}^+(\vec{p}') : \bar{\psi} A \psi : c_r^+(\vec{p}) |0\rangle = \\
 & = -ie \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x A_0(x) \langle 0|c_{r'}^+(\vec{p}') : \bar{\psi} \psi : c_r^+(\vec{p}) |0\rangle = \\
 & -ie \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x A_0(x) \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{s}, \vec{s}'} \frac{1}{V} \sqrt{\frac{m}{E_{\vec{k}}}} \sqrt{\frac{m}{E_{\vec{k}'}}} \bar{u}_s(\vec{k}) \langle 0|c_{r'}^+(\vec{p}') c_s^+(\vec{k}) e^{ikx} c_{s'}(\vec{k}') e^{ik'x}
 \end{aligned}$$

dove il braket si può riscrivere come:

$$\langle 0|\{c_{r'}^+(\vec{p}'), c_s^+(\vec{k})\}\{c_{s'}(\vec{k}'), c_r^+(\vec{p})|0\rangle = \delta_{sr'} \delta_{\vec{k}\vec{p}'} \delta_{s'r} \delta_{\vec{k}'\vec{p}}$$

e quindi l'espressione si riduce a

$$-\frac{ie}{V} \frac{m}{\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \bar{u}_{r'}^+(\vec{p}') u_r(\vec{p}) \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x A_0(x) e^{-i(p-p')x}$$

concentrandoci sull'integrale, vediamo che si può dividere in uno temporale per uno spaziale (il tempo compare solo nell'esponenziale):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x A_0(x) e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')x} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x A_0(x) e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 e^{i(E_{\vec{p}}-E_{\vec{p}'})x^0} \right)$$

la parte temporale è una trasformata di Fourier della funzione unitaria e da una delta di Dirac, questo ci dice che l'energia si conserva. Non si conserva invece la parte spaziale del quadrimpulso

$$-\frac{ie}{V} \frac{m}{\sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}}} \bar{u}_{r'}^+(\vec{p}') u_r(\vec{p}) \left(2\pi \delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}'}) \right) \int_V d^3x A_0(x) e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}}$$

e ricordando che tramite FT si passa dalla $A(x)$ alla $\tilde{A}(p)$:

$$A_0(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{A}_0(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}}$$

sostituendo e facendo il modulo quadro arriviamo all'espressione:

$$W = |\langle f | S - I | i \rangle|^2 = \frac{e^2 m^2}{V^2 E_{\vec{p}}^2} |\bar{u}_{r'}^+(\vec{p}') u_r(\vec{p})|^2 \left(2\pi \delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}'}) \right)^2 |\tilde{A}_0(\vec{p}-\vec{p}')|^2$$

Nella formula compare una delta quadra, poichè una delta seleziona⁵ o E_p o $E_{p'}$ la seconda delta diventa una delta di zero:

$$\left(2\pi \delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}'}) \right)^2 = 2\pi \delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}'}) 2\pi \delta(0)$$

a sua volta la delta di zero si può scrivere come TF della funzione unitaria:

$$2\pi \delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 = T$$

che può essere interpretato come il tempo dell'esperimento. Quindi la probabilità per unità di tempo è:

$$\frac{W}{T} = \frac{e^2 m^2}{V^2 E_{\vec{p}}^2} |\bar{u}_{r'}^+(\vec{p}') u_r(\vec{p})|^2 2\pi \delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}'}) |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2$$

è adesso semplice calcolare la sezione d'urto che è il rapporto fra la probabilità di interazione e il flusso di particelle moltiplicato per la densità degli stati (che abbiamo stimato in precedenza).

$$d\sigma = \underbrace{\frac{E_{\vec{p}}}{p} V}_{1/\text{flusso}} \frac{e^2 m^2}{V^2 E_{\vec{p}}^2} |\bar{u}_{r'}^+(\vec{p}') u_r(\vec{p})|^2 2\pi \delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}'}) |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2 \underbrace{\frac{V}{(2\pi)^3} d^3p'}_{\text{densità}}$$

⁵Per alleggerire la notazione ometteremo il simbolo di vettore per p che ora rimane sempre un vettore spaziale.

passando in coordinate sferiche abbiamo:

$$d^3 p' = p'^2 d\Omega_p dp' = p' E' dE' d\Omega_p$$

infatti $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ e $dE = \frac{2p dp}{2\sqrt{p^2 + m^2}}$, è quindi immediato verificare che $p dp = E dE$. Semplificando in termini uguali, sostituendo il $d^3 p'$ e integrando su dE' (ricordandoci della delta) si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_p} = \frac{e^2 m}{(2\pi)^2 p} |\bar{u}_{r'}^+(\vec{p}') u_r(\vec{p})|^2 |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2$$

Arrivati a questo punto quello che ci rimane da calcolare sono i due moduli quadri; cominciamo con quello di \tilde{A}_0

Dall'equazione di Poisson so che

$$\Delta_x A_0(x) = -z|e|\delta(\vec{x})$$

e quindi sostituendo le TF

$$\Delta_x \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{A}_0(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = -z|e| \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

↓

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{A}_0(\vec{q}) \vec{q}^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = -z|e| \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

da cui:

$$\tilde{A}_0(\vec{q}) = \frac{z|e|}{\vec{q}^2}$$

5.4 Sezione d'urto

Per studiare lo scattering coulombiano abbiamo usato l'hamiltoniana:

$$H = e : \bar{\psi} \not{A} \psi :$$

Attraverso cui abbiamo calcolato l'elemento di matrice:

$$S - I = -ie \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \bar{\psi} A \psi$$

Dove A ha solo componente 0 non nulla (campo elettrostatico generato da una distribuzione di carica sferica):

$$A_0(x) = \frac{Z(R)}{4\pi |\vec{x}|}$$

I campi ψ sono i campi di Dirac per l'elettrone:

$$\psi(x) = \sum_r \sum_p \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} (c_r(p) u(p) e^{-ipx} + d^+(p) v(p) e^{ipx})$$

Nello stato iniziale abbiamo un solo elettrone, quando agisce su questo l'operatore ψ c'è un termine che annichila l'elettrone e uno che ne crea un altro. Il termine di annichilazione si porta dietro lo spinore u . Ogni volta che si annichila un elettrone nello stato iniziale questo si porta dietro lo spinore u e il fattore esponenziale.

$$-ie \int \frac{d^4x}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}} \bar{u}(p') \gamma^\mu u_r(p) A_\mu(x) e^{-ipx} e^{ip'x}$$

L'unico termine non nullo nella somma $\gamma^\mu A_\mu$ è quello per $\mu = 0$ ($A_i = 0$ per $i \neq 0$). Possiamo fare l'integrale in dx^0 .

$$\frac{-ie 2\pi \delta(E_p - E_{p'})}{V} \int d^3x \bar{u}(p') \gamma^0 u_r(p) A_0(x) e^{i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} e^{-ipx} e^{ip'x}$$

Questa è l'ampiezza di probabilità che un elettrone di impulso p dopo aver interagito con campo coulombiano di un nucleo, sia deflesso con impulso p' . Sia

$$\tilde{A}_0(\vec{q}) = \int d^3x A_0(x) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{Z|e|}{q^2} \quad \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$$

La probabilità che l'evento si verifichi è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza di probabilità, e può essere ricavato con la regola d'oro di Fermi:

$$R = \frac{e^2 m^2}{V^2 E_p^2} |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2 |\bar{u}'_p \gamma^0 u_p|^2 2\pi \delta(E_p - E_{p'})$$

Dove R è il *rate* di probabilità (probabilità per unità di tempo) per il singolo impulso p' .

Per avere un informazione su un intervallo di impulsi p' molto vicini tra loro dobbiamo moltiplicare questo rate per la densità degli stati attorno a p' :

$$R' = \frac{e^2 m^2}{V^2 E_p^2} |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2 |\bar{u}'_p \gamma^0 u_p|^2 2\pi \delta(E_p - E_{p'}) \frac{V d^3 p'}{(2\pi)^3}$$

La sezione d'urto dell'evento è data da R' diviso per il flusso di particelle incidenti. Calcoliamo il flusso

$$\Phi = \frac{v}{V}$$

$$d\sigma = \frac{e^2 m^2}{V^2 E_p^2} |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2 |\bar{u}'_p \gamma^0 u_p|^2 2\pi \delta(E_p - E_{p'}) \frac{V d^3 p' V}{(2\pi)^3 v}$$

Come si può osservare il volume sparisce; possiamo sbaracciarci della delta di Dirac passando in coordinate polari:

$$d\sigma = e^2 \frac{m^2}{E_p^2} |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2 |\bar{u}'_p \gamma^0 u_p|^2 2\pi \delta(E_p - E_{p'}) \frac{p' dp' d\Omega_{p'}}{(2\pi)^3 v}$$

Adesso la delta di Dirac agisce sull'integrale ottenuto in dp' (modulo), semplificandolo:

$$d\sigma = e^2 \frac{m^2}{E_p^2} |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2 |\bar{u}'_p \gamma^0 u_p|^2 2\pi \frac{p' d\Omega_{p'}}{(2\pi)^3 v} \quad (5.2)$$

La sezione d'urto differenziale è una superficie: R è una probabilità per unità di tempo, il flusso è la densità di particelle per la velocità (la velocità è adimensionale e T ha le dimensioni di una lunghezza in unità naturali).

$$[d\sigma] = \frac{\frac{1}{T}(R')}{\frac{1}{V}(\Phi)} = \frac{L^3}{T} \sim L^2 \quad \text{superficie}$$

Questa sezione d'urto è un'area efficace del processo.

Spesso la polarizzazione delle particelle è molto difficile da misurare. I fasci creati non sono polarizzati. La sezione d'urto per fasci non polarizzati può essere ottenuta mediando su tutte le polarizzazioni. Questa

media va fatta sia sulle particelle incidenti che su quelle diffuse.

$$d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{r,r'} e^2 \frac{m^2}{E_p^2} |\tilde{A}_0(\vec{q})|^2 |\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^0 u_r(\vec{p})|^2 \frac{p' d\Omega_{p'}}{4\pi^2 v}$$

Vediamo come si sviluppa il termine che dipende dalle polarizzazioni:

$$\sum_{r,r'} |\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^0 u_r(\vec{p})|^2 = \sum_{r,r'} \bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^0 u_r(\vec{p}) \underbrace{u_r^+(\vec{p}) \gamma^0}_{\bar{u}_r(\vec{p})} \gamma^0 u_{r'}(\vec{p}')$$

$$\sum_{r,r'} |\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^0 u_r(\vec{p})|^2 = \sum_{r,r'} \bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^0 \underbrace{u_r(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p})}_{\frac{\not{p}+m}{2m}} \gamma^0 u_{r'}(\vec{p}')$$

$$\sum_{r,r'} |\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^0 u_r(\vec{p})|^2 = \sum_{r'} \bar{u}_{r'}(\vec{p}') \underbrace{\gamma^0 \frac{\not{p}+m}{2m} \gamma^0}_{A_{lm}} u_{r'}(\vec{p}')$$

Questo oggetto è una traccia, infatti può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sum_{r',l,m} (\bar{u}_{r'})_l A_{lm} (u_{r'})_m &= \sum_{r',l,m} A_{lm} \overbrace{(u_{r'})_m (\bar{u}_{r'})_l}^{\left(\frac{\not{p}'+m}{2m}\right)_{lm}} = \\ &= \sum_{l,m} A_{lm} \left(\frac{\not{p}'+m}{2m}\right)_{lm} = \\ &= \text{Tr} \left[A \frac{\not{p}'+m}{2m} \right] \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$\sum_{r,r'} |\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^0 u_r(\vec{p})|^2 = \frac{1}{4m^2} \text{Tr} [\gamma^0 (\not{p}+m) \gamma^0 (\not{p}'+m)] \quad (5.3)$$

Per procedere al calcolo di questa traccia calcoliamo qualche utile proprietà delle matrici γ .

Teorema 5.4.1 (Traccia) *La traccia di un numero dispari di matrici γ è nulla*

Dimostrazione: La matrice γ^5 anticommuta con qualunque matrice γ^μ :

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\gamma^5)^2 = I$$

Ora per la proprietà ciclica della traccia posso scrivere la traccia delle matrici in questo modo:

$$\text{Tr} \left(\gamma^\mu \cdots \gamma^\nu \underbrace{\gamma^5 \gamma^5}_I \right) = \text{Tr} (\gamma^5 \gamma^\mu \cdots \gamma^\nu \gamma^5)$$

Ogni volta che scambio una matrice γ^5 con una matrice γ^μ ottengo un segno -1 (le matrici anticommutano). Per cui se scambio la matrice γ^5 più a sinistra fino ad arrivare a destra ottengo un segno $(-1)^n$ con n pari al numero di volte che ho dovuto scambiare (cioè il numero di matrici $\gamma^\mu \cdots \gamma^\nu$):

$$\text{Tr} (\gamma^\mu \cdots \gamma^\nu) = (-1)^n \text{Tr} (\gamma^\mu \cdots \gamma^\nu)$$

Se n è dispari la traccia è nulla.

Ora possiamo fattorizzare la traccia 5.3 e gli unici termini che sopravvivono sono quelli che hanno un numero pari di matrici γ :

$$\text{Tr} [\gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0 (\not{p}' + m)] = \text{Tr} (\gamma^0 \not{p} \gamma^0 \not{p}') + m^2 \text{Tr} [(\gamma^0)^2] = 4m^2 + \text{Tr} (\gamma^0 \not{p} \not{p}')$$

Ricordiamo che \not{p} contiene una matrice γ^μ .

Per calcolare l'altro termine mancante useremo un altro teorema:

Teorema 5.4.2 (Teorema degli shalsh)

$$\text{Tr} (\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4 (a_\mu b^\mu c_\nu d^\nu - a_\mu c^\mu b_\nu d^\nu + a_\mu d^\mu b_\nu c^\nu)$$

Questa proprietà è conseguenza della seguente espressione

$$\text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \frac{1}{2} \underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2I g^{\mu\nu}} \right] = 4g^{\mu\nu}$$

Ricordando che il commutatore ha traccia nulla⁶.

⁶Il commutatore ha traccia nulla per la proprietà ciclica. $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$

Applicando il teorema si ottiene che:

$$\text{Tr}(\gamma^0 \not{p} \gamma^0 \not{p}') = 4(E E' - \overbrace{p_\mu p'^\mu}^{E^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}} + E E')$$

Poichè la δ di Dirac imponeva che $E = E'$ questo diventa:

$$\text{Tr}(\gamma^0 \not{p} \gamma^0 \not{p}') = 4(E^2 + p^2 \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0 (\not{p}' + m)] &= 4(m^2 + E^2 + p^2 \cos \theta) = \\ &= 4(2E^2 - p^2 + p^2 \cos \theta) = \\ &= 4 \left(2E^2 - 2p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 8E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$|q|^2 = |\vec{p}' - \vec{p}|^2 = 2|p|^2(1 - \cos \theta) = 4E^2 v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Possiamo riscrivere la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'_p} = \frac{(\alpha Z)^2}{16E^4 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'_p} = \frac{(\alpha Z)^2}{4E^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Questa funzione è singolare quando theta è nulla.

L'origine di questa singolarità è data dal q^4 che si trova al denominatore (che va a zero per θ che va a zero). Questo ha la spiacevole conseguenza per cui la sezione d'urto totale diverge:

$$\sigma = \int \frac{\sin \theta d\theta d\varphi (\alpha Z)^2}{4E^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Questo integrale è divergente, quindi la sezione d'urto totale è infinita. La divergenza è dovuto al fatto che tutte le particelle interagiscono con il potenziale coulombiano, e la forza elettrostatica va a zero non

abbastanza rapidamente da diminuire la sezione d'urto, e quindi anche particelle a distanza infinita dal nucleo risentono la sua carica. Questa singolarità non c'è nella realtà, infatti nuclei isolati non esistono, ci saranno sempre altre cariche di segno opposto nei dintorni che tendono a diminuire il campo elettrico per grandi distanze.

Tuttavia esistono altri casi in cui si presentano queste divergenze, e non sempre sono semplici da eliminare, nel caso dei fotoni avremo altre divergenze definite divergenze infrarosse.

Proviamo a vedere se per caso questa divergenza fosse dovuta ad aver messo una carica puntiforme. Sostituiamo ora al nucleo puntiforme una densità di carica uniformemente distribuita all'interno del nucleo stesso.

$$A_0(x) = Z|e| \int \frac{\rho(y)d^3y}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Calcoliamone la trasformata di Fourier. Per farlo scriviamo l'equazione differenziale che definisce A_0 (equazione di Poisson):

$$\nabla^2 A_0(x) = -\rho(x)Z|e|$$

Passiamo nel dominio delle trasformate

$$A_0(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{A}_0(q) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

E sostituiamola nella equazione di Poisson:

$$- \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{A}_0(q) |\vec{q}|^2 e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{\rho}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} Z|e|$$

$$-q^2 \tilde{A}_0(\vec{q}) = -Z|e| \tilde{\rho}(\vec{q})$$

$$\tilde{A}_0(q) = \frac{Z|e|}{|\vec{q}|^2} \tilde{\rho}(\vec{q})$$

La divergenza è rimasta (il termine q^2 al denominatore), a meno che la ρ non sia zero quando q va a zero;

$$\tilde{\rho}(\vec{q}) = \int dx \rho(x) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \xrightarrow{\vec{q} \rightarrow 0} \int dx \rho(x) = Q$$

Quindi la divergenza sparisce solo quando la carica totale è nulla (che non è di certo un caso interessante).

Questo ci spiega che la divergenza non è dovuta all'aver scelto una carica puntiforme, ma è una proprietà del campo coulombiano.

5.5 Verso i diagrammi di Feynman

Abbiamo usato fino ad ora il primo ordine della teoria delle perturbazioni, vediamo adesso di affrontare un caso leggermente più complesso.

In generale la formula di Dyson può essere scritta in questo modo:

$$S - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \cdots d^4x_n T [H_I(x_1) \cdots H_I(x_n)]$$

Queste hamiltoniane sono prodotti degli operatori di campo, che conosciamo tutti quanti. Questa è un'espressione che conosciamo abbastanza bene. Il teorema di Wick mi dà l'espressione del T prodotto per i campi liberi.

Il T prodotto può essere calcolato come la somma di prodotti normali di tutte le possibili contrazioni a coppie degli operatori.

Il prodotto normale si calcola come un normale prodotto in cui tutti i distruttori si mettono a destra e i creatori a sinistra, la contrazione di una coppia di operatori significa calcolarne il loro propagatore (valore medio del vuoto)

Bisogna prestare attenzione al fatto che gli operatori fermionici sono antisimmetrici per cui quando vengono scambiati si deve cambiare segno. Questa è la formula che ci serve per calcolare l'elementi di matrici. I propagatori sono dei numeri che possiamo portar fuori dal prodotto normale. Il prodotto normale annichila lo stato iniziale e crea lo stato finale. Tutta la possibile casistica combinatoria diventa estremamente complicata. A queste complicazioni si aggiungono le correzioni di ordini superiori.

Prima di poter applicare questo formalismo in elettrodinamica quantistica occorre riprendere il campo dei fotoni e discutere del suo propagatore.

$$\mathcal{L} = \underbrace{\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi}_{\text{Elettroni e positroni liberi}} - \overbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}^{\text{Fotoni liberi}} - \underbrace{e\bar{\psi}A\psi}_{\text{Interazione fotone-elettrone}}$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Questa è la densità di corrente data dall'hamiltoniana, e questa è realmente la corrente elettromagnetica

La lagrangiana scritta in questa forma è invariante di Gauge ci piace perché riproduce bene l'equazione del moto: Ricaviamo la hamiltoniana:

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_l} \dot{\psi}_l + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} \dot{A}^i \underbrace{-\mathcal{L}_D - \mathcal{L}_M + e\bar{\psi}A\psi}_{-\mathcal{L}}$$

Il quadripotenziale deve soddisfare l'equazione di Maxwell:

$$\partial_\mu F^{0\mu} = eJ^0$$

$$\partial_i F^{0i} = eJ^0$$

$$\partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) = eJ^0$$

$$\nabla^2 A^0 - \partial^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = eJ^0$$

Che nella gauge di Coulomb diventa:

$$\nabla^2 A^0 = eJ^0$$

Che ha per soluzione:

$$A(x, x^0) = \int d^3y \frac{eJ_0(y, x^0)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}$$

5.6 Hamiltoniana di interazione

La lagrangiana totale di un sistema con un fotone e un elettrone che interagiscono è data, come abbiamo visto da

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}A\psi$$

in cui il primo pezzo descrive gli elettroni, il secondo i fotoni ed il terzo la loro interazione. Nella nostra teoria il campo elettrico E_i è $F^{0i} = E^i$ e in funzione dei potenziali elettromagnetici

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}$$

La prima equazione di Maxwell diventa quindi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\phi - \underbrace{\nabla \cdot \dot{A}}_{=0} = eJ_o$$

dove il termine con A si annulla per la scelta di gauge che abbiamo fatto. Questa si risolve con il formalismo di Poisson; ad ogni istante del tempo l'equazione fissa il valore di ϕ (infatti non c'è dipendenza dal tempo, le derivate del laplaciano sono solo spaziali).

$$\phi = A^0 = e \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{J(y, x_o)}{|x - y|}$$

Ora mettiamo da parte l'espressione di ϕ che useremo dopo e scriviamo l'hamiltoniana del sistema⁷; in questo caso

$$H = \int \mathcal{H} dx \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} - \mathcal{L}$$

Come prima cosa riscriviamo il termine di interazione

$$-e\bar{\psi} A \psi = -e\bar{\psi} A^\mu \gamma_\mu \psi = -eA_\mu J^\mu$$

poi spezziamo il termine che descrive il campo elettromagnetico in modo da esplicitare la parte che contiene \dot{A} :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - eA_\mu J^\mu \quad \text{con} \quad F^{0i} = E^i = -\nabla^i A^0 - \dot{A}^i$$

quindi⁸

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \frac{\partial \left(-\frac{1}{2} F_{0i} (\nabla^i A^0 + \dot{A}^i) \right)}{\partial \dot{A}^i} = F_{0i}$$

L'hamiltoniana quindi è:

$$H = \int \vec{d}x \left(F_{0i} \dot{A}^i + \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + eA_\mu J^\mu \right)$$

i primi due termini li possiamo ancora modificare.

⁷Usiamo solo la lagrangiana dei fotoni e quella di interazione, la lagrangiana degli elettroni la sappiamo scrivere.

⁸Dove si usa la derivata del prodotto

1.

$$\int \vec{d}x F_{0i} \dot{A}^i = \int \vec{d}x (\nabla_i A_0 - \dot{A}_i) \dot{A}^i = \int \vec{d}x (\nabla_i A_0 \dot{A}^i + \dot{A}^i \dot{A}^i)$$

dove nel secondo pezzo si è alzato un indice e cambiato segno. Di questo integrale solo la seconda parte è diversa da zero, infatti integrando per parti la prima si annulla:

$$\int \vec{d}x \nabla_i A_0 \dot{A}^i = \underbrace{(\cdot)|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int \vec{d}x A_0 \underbrace{\nabla_i \dot{A}^i}_{=0} = 0$$

↓

$$\int \vec{d}x F_{0i} \dot{A}^i = \int \vec{d}x \vec{A}^2$$

2.

$$\int \vec{d}x \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} = \frac{1}{2} \int \vec{d}x (\nabla_i A_0 - \dot{A}_i) (\nabla_i A_0 - \dot{A}_i) = \frac{1}{2} \int \vec{d}x (-A_0 \Delta A_0 + \dot{A}^2 + F_{ij} F^{ij})$$

Ricordiamo che in A_0 l'indice alto o basso non fa differenza; nell'ultimo passaggio i termini misti vanno a zero sempre integrandoli per parti e usando la gauge di Coulomb. Infine integrando per parti (sempre supponendo che le quantità all'infinito siano nulle) abbiamo:

$$\int \vec{d}x \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} = -\frac{1}{2} \int \vec{d}x \vec{A}^2 - \frac{1}{2} \int \vec{d}x A_0 \underbrace{\nabla_i \nabla^i}_{=-\Delta} A_0$$

Se ora rimettiamo insieme tutti i pezzi abbiamo:

$$H = \int \vec{d}x \left(\frac{1}{2} \dot{A}^2 + \frac{1}{2} A_0 \Delta A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + e A_\mu J^\mu \right) = H_0^{em} + \int \vec{d}x \left(\frac{1}{2} A_0 \Delta A_0 + e A_\mu J^\mu \right)$$

Possiamo ora sostituire l'espressione trovata prima per A_0 e ottenere:

$$H = H_0^{em} + \frac{e^2}{2} \int \vec{d}x \vec{d}y \left(\frac{J_0(x, x_0) J_0(y, x_0)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \right) - e \int \vec{d}x \vec{A} \cdot \vec{J}$$

Questi pezzi non possono essere considerati come il contributo della densità di carica e delle correnti perchè c'è la gauge di Coulomb. Va anche detto che nella nostra teoria relativistica non possiamo avere un principio di azione e reazione per due eventi perchè questi possono essere simultanei in un sistema ma venire sfasati cambiando sistema; bisogna allora restringerci e asserire che il principio di azione e reazione vale per lo stesso evento: le interazioni sono solo locali e sono mediate dall'emissione di fotone.

La bontà nella scelta della gauge di Coulomb sta proprio nella caratteristica di questa di coinvolgere solo fotoni reali⁹.

Siamo pronti per inserire la quantizzazione in quanto l'unica cosa che bisogna fare è mettere il buon ordinamento. L'H di interazione diventa:

$$H_I = \frac{e^2}{8\pi} \int \left(\frac{\vec{d}x\vec{d}y}{|\vec{x} - \vec{y}|} : J_0(x, x_0) J_0(y, x_0) : \right) - e \int \vec{d}x : \vec{A} \cdot \vec{J} :$$

Ora introduciamo le approssimazioni, ossia usiamo l'approssimazione di Dision; se ci fermiamo al secondo ordine poichè i termini già sono moltiplicati per e^2 o per e^{10} dobbiamo mettere l'ordine zero nel primo pezzo e il primo ordine del secondo in modo che le potenze di e siano fino a e^2 in ogni pezzo.

$$S - I = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 H_I(x_0) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 dy^0 T(H_I(x_0) H_I(y_0)) + O(e^3)$$

Prendiamo il contributo al primo ordine in e :

$$e \int d^4x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

A che tipo di processi fisici può contribuire questo termine? Le due ψ contengono operatori di creazione e annichilazione di fermioni, e un operatore di annichilazione di fotoni. L'elementi di matrice che rappresentano questo termine sono non nulli solo se nello stato iniziale è presente un fotone che viene annichilito nello stato finale. Ad esempio:

$$\langle e^+ e^- | e \int d^4x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | \gamma \rangle$$

⁹Se ne sarebbero potute scegliere di diverse che avrebbero magari complicato i conti di molto.

¹⁰Ricordiamo che l'approssimazione di Dision considera come ordine di grandezza proprio la carica dell'elettrone.

$$\langle e^- | e \int d^4x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | \gamma e^- \rangle$$

Questi elementi di matrici descrivono processi a tre particelle. All'interno dell'integrazione compaiono i fattori esponenziali portate dalle funzioni d'onda spaziotemporali delle particelle:

$$e^{-ipx} e^{ikx} e^{-ip'x} \dots$$

Quando integriamo in d^4x danno origine alla delta di Dirac:

$$\delta^4(k - p_1 - p_2)$$

Questa condizione rappresenta la conservazione del quadrimpulso, e non può mai essere soddisfatta in processi che coinvolgono solo tre particelle. Ad esempio:

$$\langle e^+ e^- | e \int d^4x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | \gamma \rangle \quad k^2 = 0 \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2$$

Il quadrimpulso del fotone iniziale è nullo, quello dei positroni e elettroni è al minimo pari alla loro massa, quindi il quadrimpulso non si può mai conservare in questo tipo di processi.

I termini interessanti cominciano dal secondo ordine (abbiamo mostrato che il primo ordine non descrive processi fisici per conservazione del quadrimpulso).

$$S - I = \frac{e^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3x d^3y}{|x - y|} J_0(\vec{x}, x^0) J_0(\vec{y}, y^0) dx^0 - \\ - \frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T \left[\vec{A}(x_1) \cdot \vec{J}(x_1), \vec{A}(x_2) \cdot \vec{J}(x_2) \right]$$

Questo papocchio da origine a fenomeni molto interessanti, come lo scattering compton, produzione di coppie, e annichilazione.

$$\gamma e^\pm \longrightarrow \gamma e^\pm \quad e^+ e^- \longrightarrow \gamma \gamma \quad \gamma \gamma \longrightarrow e^+ e^-$$

Per estrarre tutti questi processi sviluppiamo il prodotto tempo ordinato con il teorema di Wick.

$$T[ABC \dots] = N(ABC \dots) + N(\langle 0 | T[AB] | 0 \rangle C \dots) + \dots$$

Dimostreremo che il termine con il prodotto normale degli operatori senza contrazioni non danno contributo. I termini interessanti sono quelli con contrazioni. Quando contraiamo il campo del fotone, al posto del prodotto dobbiamo piazzarci il T prodotto nel vuoto degli operatori.

Occorre pertanto avere una forma esplicita di tutti i propagatori dei campi fermionici e fotonici. Il propagatore fermionico l'abbiamo già esplicitamente calcolato per l'equazione di Dirac. Occupiamoci ora del propagatore fotonico.

5.7 Propagatore fotonico

Adesso quindi dobbiamo scrivere esplicitamente il propagatore del fotone. Il campo del fotone è dato dall'espressione:

$$A^\mu(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2|p|}} (a_r(p) \varepsilon_r^\mu(p) e^{-ipx} + h.c.)$$

Il quadrivettore di polarizzazione ε è identificato da queste relazioni semplici¹¹:

$$\varepsilon^0 = 0 \quad \vec{\varepsilon} \cdot \vec{p} = 0$$

Andiamo a calcolarci un termine del prodotto tempo ordinato:

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle$$

Esplicitando l'espressione di questo termine otteniamo:

$$\sum_{n=1}^2 \int \frac{d^3p e^{ipy - ip'x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|p|}} \underbrace{\langle 0 | a_r(p') a_{r'}^\dagger(p) | 0 \rangle}_{\delta(p-p') \delta_{rr'}} \varepsilon_r^\nu(p') \varepsilon_{r'}^\mu(p)$$

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p e^{-ip(x-y)}}{(2\pi)^3 2|p|} \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\vec{p}) \varepsilon_r^\nu(\vec{p})$$

$$p^0 \equiv |p|$$

¹¹La prima relazione è vincolata dalla scelta di gauge, per cui risulta che $A^0 = 0$

Questo termine è uguale a quello di Klein-Gordon, moltiplicato per quella sommatoria simmetrica per scambio. Ripetendo i passaggi del campo di Klein-Gordon otteniamo:

$$\langle 0 | T [A^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p i e^{-ip(x-y)}}{(2\pi)^4 (p^2 - m^2 + i\varepsilon)} \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\vec{p}) \varepsilon_r^\nu(\vec{p})$$

La sommatoria dipende dalla variabile di integrazione, e quindi dobbiamo occuparci di questa somma rognosa. Questo è un pezzo di una tipica relazione di completezza, completiamo questi vettori che sono solo 2 in vettori in 4 dimensioni. Questi vettori vivono in uno spazio in cui la metrica non è definita positiva.

$$\varepsilon_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varepsilon}_r(\vec{p}) \end{pmatrix}$$

Per completare la base, ai due ε ($r = 1, 2$) occorrono altri due vettori: Poiché i due ε sono ortogonali al vettore d'onda, scegliamo questo come altra direzione per completare lo spazio tridimensionale, e un vettore puramente temporale per completare la base dello spazio tempo.

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{p} \end{pmatrix} \hat{p} \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = n^\mu$$

Con la definizione di questi nuovi epsilon abbiamo una base, l'unico problema è che questi vettori sono normalizzati in modo negativo. I vettori spaziali sono tutti a metrica negativa. Scriviamo la relazione di completezza:

$$\sum_r \varepsilon_r^\mu(\vec{p}) \varepsilon_r^\nu(p) - n^\mu n^\nu + \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu = -g^{\mu\nu}$$

Il segno negativo posto davanti a $n^\mu n^\nu$ è dovuto al fatto che la metrica non è definita positiva. Verifichiamo che sia soddisfatta questa relazione di completezza proiettando su una base: basta moltiplicare per n_μ :

$$n_\mu \left(\sum_r \varepsilon_r^\mu(\vec{p}) \varepsilon_r^\nu(p) - n^\mu n^\nu + \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \right) = -n_\mu n^\mu n^\nu = -n^\nu$$

Ma

$$n_\mu(-g^{\mu\nu}) = -n^\nu$$

Con n va bene. Vediamo se la relazione è soddisfatta anche per gli epsilon:

$$\varepsilon_{1\mu} \left(\sum_r \varepsilon_r^\mu(\vec{p}) \varepsilon_r^\nu(p) - n^\mu n^\nu + \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \right) = \underbrace{\varepsilon_{1\mu} \varepsilon_1^\mu}_{-1} \varepsilon_1^\nu = -\varepsilon_1^\nu$$

$$(\varepsilon_1)_\mu(-g^{\mu\nu}) = -\varepsilon_1^\nu$$

Questa è una relazione di completezza. Questa base che abbiamo scelto non è covariante (abbiamo usato la gauge di Coulomb), ma non importa poiché useremo questa relazione semplicemente per ricavare la somma sulle polarizzazioni:

$$\sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(p) \varepsilon_r^\nu(p) = -g^{\mu\nu} - \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu + n^\mu n^\nu$$

Vedremo che il termine in p e in n si cancellano con gli altri termini brutti che erano usciti nella hamiltoniana di interazione, e al posto di questa sommatoria avremo solo $g^{\mu\nu}$.

5.8 Propagatore del fotone

Vogliamo ora calcolare il propagatore per i fotoni

$$\langle 0 | T [A^\mu(x) A^\nu(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \sum_{r=1} \epsilon_r^\mu \epsilon_r^\nu$$

La parte un po' ostica da calcolare è la sommatoria con gli ϵ ricorriamo quindi al trucco di riscriverla come

$$\sum_{r=1} \epsilon_r^\mu \epsilon_r^\nu = n^\mu n^\nu - x^\mu x^\nu - g^{\mu\nu}$$

con i quattro quadri-vettori già introdotti:

$$n^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad \epsilon_r^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon}_r \end{pmatrix} \quad k^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{k}}{|k|} \end{pmatrix}$$

Ridefiniamo ora k^μ come

$$k^\mu \doteq \begin{pmatrix} k^0 \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

in modo da poter riscrivere $k^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \end{pmatrix}$ come¹²:

$$k^\mu - n^\mu(k \cdot n) = \begin{pmatrix} k^0 \\ \vec{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -k^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Andando a sostituire nell'equazione la relazione sarà valida per qualsiasi valore di k^0 in quanto nei conti k_0 si elide. Ora normalizziamo k

$$(k - n(n \cdot k))^2 = k^2 + (k \cdot n)^2 - 2(k \cdot n)^2 = k^2 - (k \cdot n)^2 = -\vec{k}^2$$

Quindi il versore k diventa

$$\hat{k} = \frac{k - n(k \cdot n)}{\sqrt{(k \cdot n)^2 - k^2}}$$

e riscrivendo la sommatoria degli ϵ abbiamo:

$$\sum_{r=1} \epsilon_r^\mu \epsilon_r^\nu = n^\mu n^\nu - g^{\mu\nu} - \frac{(k^\mu - n^\mu(k \cdot n))(k^\nu - n^\nu(k \cdot n))}{(k \cdot n)^2 - k^2}$$

questo prodotto contiene termini con k^ν o k^μ , ma vedremo che, inseriti opportunamente nella formula di Dieson non daranno contributi. Quindi esplicitiamo il termine come:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1} \epsilon_r^\mu \epsilon_r^\nu &= -g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu \left(1 - \frac{(k \cdot n)^2}{(k \cdot n)^2 - k^2} \right) + (..k^\mu ..k^\nu ..) = \\ &= -g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu \frac{k^2}{\vec{k}^2} + (..k^\mu ..k^\nu ..) \end{aligned}$$

ora sostituiamo nel propagatore del fotone.

$$\langle 0|T [A^\mu(x)A^\nu(y)] |0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} + (\dots) - in^\mu n^\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon}$$

¹²Dove $k \cdot n = 1$.

dove la parentesi con i puntini indica i termini con k^μ e k^ν che non contribuiranno; finora il k^0 è stato arbitrario, adesso facciamo una scelta; prendiamolo proprio come il k_0 che abbiamo definito prima. In questo modo k^2 non si annulla mai e posso togliere la ϵ , che non serve più non essendoci singolarità.

Il secondo termine si può riscrivere come

$$-in^\mu n^\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{|\vec{k}|^2} = -in^\mu n^\nu \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik(\vec{x}-\vec{y})}}{|\vec{k}|^2} \delta(x^0 - y^0)$$

ma questa (la parte spaziale) è la funzione di Green del laplaciano, otteniamo quindi

$$\langle 0 | T [A^\mu(x) A^\nu(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu} e^{-ik(x-y)}}{k^2} + (\dots) - in^\mu n^\nu \frac{\delta(x^0 - y^0)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} =$$

sostituendo in Dison vedremo che i puntini non daranno contributi e il secondo pezzo ci farà il favore di cancellare un termine scomodo non invariante.

Bene ora abbiamo tutti gli ingredienti per calcolare $S - I$

$$H_I = e^2 \int \frac{d\vec{x} d\vec{y}}{8\pi} \frac{J_0(\vec{x}, x_0) J_0(\vec{y}, x_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} - e\vec{A} \cdot \vec{J}$$

da cui

$$S - I = -ie^2 \int \frac{dx^0 d\vec{x} d\vec{y}}{8\pi} : \frac{J_0(\vec{x}, x_0) J_0(\vec{y}, x_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} : - \frac{e^2}{2!} \int d\vec{x} d\vec{y} T [A^i(x) J_i(x)]$$

il primo pezzo non contiene operatori che agiscono sui fotoni, può quindi descrivere solo fenomeni di scattering del tipo

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

perchè? perchè se applico uno stato fotonico questo passa attraverso l'operatore J e andando sul vuoto da zero. Il secondo termine include il T-prodotto

$$T [A^i(x) J_i(x) A^k(y) J_k(y)]$$

che significa avere la somma di un termine con il prodotto normale (PN), uno con il PN e una contrazione, poi PN e due contrazione e così via; avremo termini con contrazioni fra le A e poi termini in cui contrago i due fermioni

$$\begin{cases} \text{T} [A^i J_i A^k J_k] \\ \text{T} [A^i \bar{\psi} \gamma_i \psi A^k \bar{\psi} \gamma_k \psi] \end{cases}$$

le contrazioni avvengono solo fra campi dello stesso tipo altrimenti il valore medio nel vuoto (che è la contrazione) mi da zero. Quindi il secondo pezzo da vita a reazioni del tipo

$$\gamma e \rightarrow \gamma e$$

$$\gamma \gamma \rightarrow e^+ e^-$$

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$$

Possiamo avere tre tipi di contrazioni, due contrazioni fotoniche, che lascia invariati solo operatori di creazione e annichilazione fermionica (gli stati esterni possono essere solo fermioni). Posso avere contrazioni di due operazioni fermionici (ψ e $\bar{\psi}$) e avere quindi creazioni di fermioni e fotoni, nello stato iniziale e finale avremo due fotoni e due fermioni, (creazione di coppie, scattering compton).

Cerchiamo di ricavare il propagatore fotonico, che si genera dalla contrazione dei due operatori fotonici:

$$-\frac{e^2}{2} \int d^4 x d^4 y i \Delta_F^{\mu\nu}(x-y) \mathcal{N} [J_\mu(x) J_\nu(y)] \quad (5.4)$$

Mentre nella formula di Dyson abbiamo solo la somma sugli indici spaziali abbiamo aggiunto anche il termine con indice 00. Questa operazione è innoqua infatti $i \Delta_F(x-y)^{00} = 0$.

A questo livello quindi per J^0 possiamo metterci qualunque cosa, perché è moltiplicato per un termine nullo. Sfrutteremo la libertà su questa componente per cancellare i termini del propagatore che sono proporzionali a k . Questa scelta corrisponde proprio a scegliere per J_0 la densità di carica.

$$\int d^4 x d^4 y \int d^4 k k^\mu A e^{-ik(x-y)} \mathcal{N} [J_\mu(x) J_\nu(y)]$$

$$\int d^4x d^4y i \partial^\mu \Delta_F(x-y) \mathcal{N} [J_\mu(x) J_\nu(y)]$$

Integriamo per parti in modo da portare la derivata sul prodotto normale:

$$- \int d^4x d^4y i \Delta_F(x-y) \underbrace{\partial^\mu \mathcal{N} [J_\mu(x) J_\nu(y)]}_{=0}$$

Questa quadridivergenza è nulla per la conservazione della corrente elettrica. Ci siamo sbarazzati di tutti i termini che dipendono da k . Adesso nel propagatore a dare realmente contributo sono rimasti solo due termini, uno dei quali si cancella con il termine nella formula di Dyson che descrive il potenziale coulombiano. Se integro per parti porto l'operazione di derivata sul prodotto normale:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} e^2 \int d^4x d^4y \frac{\delta(x^0 - y^0)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \mathcal{N} [J^0(x) J^0(y)] \\ & \frac{i}{8\pi} e^2 \int \frac{d\vec{x} d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \mathcal{N} J^0(\vec{x}, x^0) J^0(\vec{y}, x^0) \end{aligned}$$

Questo termine è esattamente uguale a quello dentro la matrice S , per cui si cancellano a vicenda. Questa cancellazione doveva succedere perché quel termine nella matrice S era causa della mancata covarianza, dovuta dalla scelta di Gauge. Quell'oggetto era quindi un artificio matematico dovuto dalla scelta di gauge.

$$S - I = -\frac{e^2}{2!} \int dx dy T [A^i(x) J^i(x) A^k(y) J^k(y)]$$

Adesso sappiamo che la teoria dell'elettrodinamica quantistica il propagatore del fotone può essere usato come il propagatore di Klein-Gordon, trascurando tutti gli altri termini.

Adesso siamo finalmente arrivati a poter costruire tutti i diagrammi e calcoli al secondo ordine dell'elettrodinamica quantistica. Il primo esempio che guarderemo sarà un universo in cui ci sono solo elettroni e positroni, e muoni (e antimuoni). Partiremo dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\psi}_\mu(i\partial\!\!\!/ - M)\psi_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e A_\mu J^\mu$$

$$J^\nu = \bar{\psi} \gamma^\nu \psi + \bar{\psi}_\mu \gamma^\nu \psi_\mu$$

Questa lagrangiana è invariante sotto trasformazioni simultanee di fase di ψ , $\bar{\psi}$ e ψ_μ , $\bar{\psi}_\mu$, quindi la carica totale si conserva.

Anche per singole trasformazioni di fase separatamente in ψ , $\bar{\psi}$ e in ψ_μ , $\bar{\psi}_\mu$. Questo oggetto porta alla conservazione separata del numero di muoni e elettroni (numero di elettroni - numero di positroni). Le due conservazioni sono separate. Non soltanto la carica elettrica è banalmente conservata, sono conservate separatamente anche cariche caratteristiche delle particelle (che viene detto numero leptonico).

Ci occuperemo di descrivere questo processo:

$$e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$$

Questo processo è molto semplice da calcolare, e può avvenire soltanto se è soddisfatta la condizione di soglia:

$$P_{e^+} + P_{e^-} = P_{\mu^+} + P_{\mu^-}$$

Questo è il primo esempio di processo a soglia. Il minimo valore del quadrimpulso a destra è due volte la massa del muone, per cui la somma dei quadrimpulsi degli elettroni deve essere sempre maggiore di questo valore: Questo è il primo processo dove $E = mc^2$ è una legge di conservazione.

5.9 Grafici di Feynman, processo $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$

Abbiamo visto cosa succede quando si ha la collisione di elettroni e muoni: si deve avere la conservazione del numero leptonico.

Ora facciamo collidere un elettrone e un positone e calcoliamo la probabilità di avere due muoni μ^+ e μ^- ; la reazione è permessa in quanto sia nello stato iniziale che in quello finale si hanno particella e antiparticella quindi i numeri quantici del vuoto. Usiamo la teoria delle perturbazioni

$$S - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} e^n \int \Pi_i dx_i T [A J_1 \dots A J_n]$$

per la reazione: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$; quindi dobbiamo calcolare

$$\langle \mu^+\mu^- | (S - I) | e^+e^- \rangle$$

Per semplicità fermiamoci all'ordine più basso. Questo però non è l'ordine uno ma l'ordine due! Perché? Per avere questo prodotto devo avere almeno una corrente fermionica e una muonica quindi devo andare almeno al secondo ordine; infatti l'ordine uno non ha abbastanza operatori di creazione e annichilazione per gestire le particelle in gioco.

$$(S-I)_{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T \left[\left(A^\nu(x_1) J_\nu(x_1) + A^\nu(x_1) J_\nu^{(\mu)}(x_1) \right) \left(A^\nu(x_2) J_\nu(x_2) + A^\nu(x_2) J_\nu^{(\mu)}(x_2) \right) \right]$$

Calcolando il prodotto dentro il time-ordering otteniamo un termine in cui compaiono solo elementi di creazione elettronica e che quindi non può contribuire al processo (quello dato dal prodotto dei termini in rosso nella formula) e un termine (prodotto degli elementi blu) in cui ci sono solo operatori muonici.

Gli unici a contribuire sono i prodotti misti:

$$(S-I)_{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T \left[\left(A^\nu(x_1) J_\nu(x_1) A^\rho(x_2) J_\rho^{(\mu)}(x_2) + (x_1 \leftrightarrow x_2) A^\nu(x_2) J_\nu(x_2) A^\rho(x_1) J_\rho^{(\mu)}(x_1) \right) \right]$$

dove il secondo termine ha il significato di essere identico al primo con le variabili scambiate. Ora notiamo che in generale le A non commutano tuttavia essendoci il T-prodotto basta scambiare le variabili di integrazione e i termini diventano identici quindi¹³:

$$(S-I)_{(2)} = -2 \frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T \left[A^\nu(x_1) J_\nu(x_1) A^\rho(x_2) J_\rho^{(\mu)}(x_2) \right]$$

Ora applichiamo il teorema di Wick, il primo termine con i prodotti normali non da contributo, infatti non ci sono fotoni coinvolti. I termini con le contrazioni sono parecchi ma si riducono considerando che non ci possono essere contrazioni fra operatori diversi altrimenti il braket col vuoto darebbe zero infatti si avrebbero stati con parti diverse modificate (gli stati sono ottenuti con il prodotto tensoriale). Quindi tenendo conto di queste caratteristiche andiamo ad esplicitare i termini del T-prodotto:

$$(S-I)_{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 T \left[A^\nu(x_1) : \bar{\psi}(x_1) \gamma_\nu \psi(x_1) : A^\rho(x_2) : \bar{\psi}_{(\mu)}(x_2) \gamma_\rho \psi(x_2) : \right]$$

¹³Il fattoriale a denominatore serve proprio a mandar via i termini uguali!

Esplicitando compare il buon ordinamento che ci semplifica ulteriormente la vita infatti un'estensione del teorema di Wick afferma che le contrazioni fra correnti ordinate sono nulle; quindi le uniche contrazioni che rimangono sono quelle fra le A. Il T-prodotto diventa un prodotto normale con una contrazione fotonica.

$$(S - I)_{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 i\Delta_F^{\nu\rho}(x_1 - x_2) J_\nu(x_1) J_\rho^{(\mu)}(x_2)$$

$$\text{con} \quad i\Delta_F^{\nu\rho}(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} -i \frac{g^{\mu\nu} e^{-iq(x-y)}}{q^2 + i\epsilon}$$

Ora andiamo a braketare con gli stati iniziali e finali

$$\underbrace{\langle \mu^+ \mu^- |}_{k'k} - e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 i\Delta_F^{\nu\rho}(x_1 - x_2) J_\nu(x_1) J_\rho^{(\mu)}(x_2) \underbrace{| e^+ e^- \rangle}_{\varphi'\varphi}$$

questa è l'ampiezza di probabilità che vogliamo calcolare. Tenendo presente che elettrone e positrone vengono distrutti in x_1 e i muoni creati in x_2 ossia che le correnti agiscono una solo sul muone e una solo sul positrone possiamo fattorizzare l'espressione come:

$$-e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 i\Delta_F^{\nu\rho}(x_1 - x_2) \langle \mu^+ \mu^- | J_\rho^{(\mu)}(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | J_\nu(x_1) | e^+ e^- \rangle$$

Ora vediamo come sono fatti i due braket

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_\nu(x_1) | e^+ e^- \rangle &= \langle 0 | : \bar{\psi}(x_1) \gamma_\nu \psi(x_1) : | e^+ e^- \rangle = \\ &= N e^{-i(p+p')x_1} \bar{v}(p') \gamma_n u u(p) \end{aligned}$$

dove N raccoglie i fattori di normalizzazione. Adesso le ψ sono del tipo

$$\begin{cases} \psi = \sum c u e^{-ipx} + d^+ v e^{ipx} \\ \psi = \sum c^+ \bar{u} e^{ipx} + d \bar{v} e^{-ipx} \end{cases}$$

Gli unici pezzi che mi interessano sono questi due in rosso che annichiano e^+ e e^- per cui mettendoci a volume finito per semplicità¹⁴

¹⁴Le sommatorie scompaiono perchè gli impulsi generici vanno ad incappare negli impulsi fissati dallo stato iniziale $|e^+ e^- \rangle$

$$\langle 0 | J_\nu(x_1) | e^+ e^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}} e^{-i(p+p')x_1} \bar{v}(p') \gamma_\nu u(p)$$

Per i muoni ho un'espressione analoga con alcune differenze come la massa o gli operatori u e v scambiati

$$\langle \mu^+ \mu^- | J_\rho^{(\mu)}(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sqrt{\frac{M}{E_k}} \sqrt{\frac{M}{E_{k'}}} e^{-i(k+k')x_2} \bar{u}_{(\mu)}(k) \gamma_\rho v_{(\mu)}(k')$$

Questa che abbiamo ottenuto è l'ampiezza di un particolare modo in cui questo evento può avvenire. Possiamo dargliene una rappresentazione grafica (Figura 5.1) A questo grafico corrisponde l'ampiezza che abbiamo calcolato adesso.

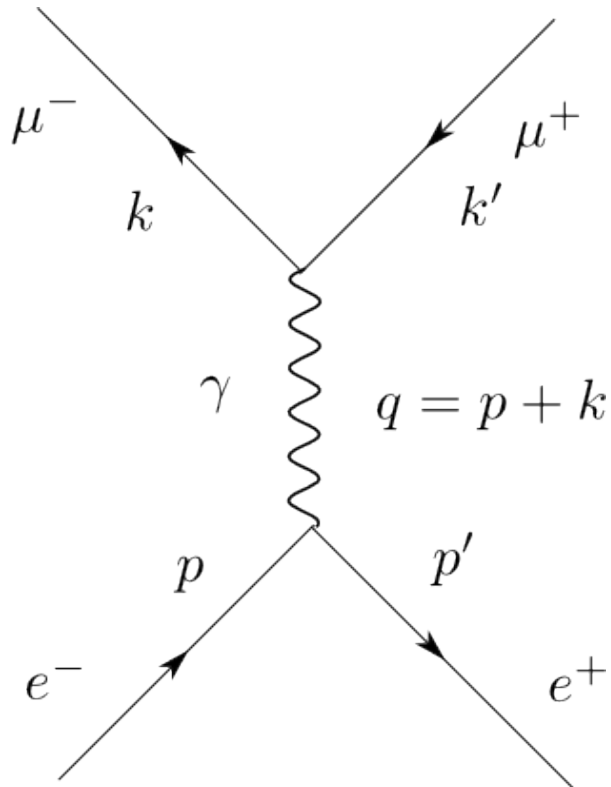
Abbiamo un positrone entrante che contribuisce con un termine $\bar{v}_e(p')$, un vertice, che contribuisce con un γ^α , e un altro elettrone entrante ($u_e(p)$):

$$\bar{v}_e(p') \gamma^\alpha u_e(p)$$

Poi abbiamo il propagatore integrato su tutto il tempo del fotone. Il diagramma termina con due linee fermioniche finali. Il muone $\bar{u}_\mu(k)$, il vertice γ^β e l'antiparticella del muone: $v_\mu(k)$.

Ogni vertice si porta dietro un termine γ^α . Per i fermioni particelle lo stato iniziale è sempre u , quello finale è \bar{u} . Per i fermioni antiparticelle è il contrario: lo stato iniziale è \bar{v} mentre quello finale è v . Per ogni particella dobbiamo moltiplicare poi i fattori di normalizzazione degli stati: $\sqrt{m/E}$. Manca ora da calcolare l'integrale del propagatore:

$$\begin{aligned} &= \int d^4x_1 d^4x_2 i \Delta_F(x_1 - x_2) e^{-i(p'+p)x_1} e^{i(k+k')x_2} = \\ &= -ig^{\mu\nu} \int \frac{d^4x_1 d^4x_2 d^4q}{q^2} e^{-iq(x_1-x_2)} e^{-i(p+p')x_1} e^{i(k+k')x_2} = \\ &= -ig^{\mu\nu} \int \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q+p+p') d^4x_2 d^4q}{q^2} e^{iqx_2} e^{i(k+k')x_2} = \\ &= -ig^{\mu\nu} \int \frac{d^4x_2 (2\pi)^4}{(p+p')^2} e^{i(k+k'-p-p')x_2} = \\ &= \frac{ig^{\mu\nu} (2\pi)^8 \delta^4(k+k'-p-p')}{(p+p')^2} \end{aligned}$$



Il risultato di questo integrale ci garantisce, attraverso la delta di Dirac, che questo processo può avvenire solo se il quadrimpulso totale risulta conservato.

Nel diagramma di Feynman (Figura 5.1) tutte le linee fermioniche sono orientate. E ad ogni vertice deve conservarsi localmente il quadrimpulso.

Grazie al diagramma di Feynman possiamo scrivere l'ampiezza di questo processo in una botta veloce, risparmiandoci tutti i conti che abbiamo fatto precedentemente.

$$\mathcal{M} = -e^2 \bar{v}(p') \gamma^\nu u(p) \frac{-i g_{\nu\rho}}{(p+p')^2} \bar{u}(k) \gamma^\rho v(k')$$

Per arrivare alle matrici S mancano i fattori di normalizzazione. La \mathcal{M} è invariante di Lorentz, poiché abbiamo due quadrivettori moltiplicati per $g_{\nu\rho}$, e prende il nome di ampiezza invariante di Feynman. La matrice S è ricostruita semplicemente a partire dall'ampiezza invariante di Feynman nel seguente modo:

$$S = \frac{\mathcal{M}}{(\sqrt{V})^4} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sqrt{\frac{m}{E'_p}} \sqrt{\frac{M}{E_k}} \sqrt{\frac{M}{E_{k'}}} (2\pi)^4 \delta^4(k+k'-p-p')$$

Prendendone il modulo quadro si può procedere al calcolo della sezione d'urto del processo ($T = \text{tempo}$):

$$|S_f|^2 = \frac{|\mathcal{M}|^2 m^2 M^2}{V^4 E^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) V T \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{V dk}{(2\pi)^3}$$

Dove ci siamo messi per semplicità nel sistema di riferimento del centro di massa, tale che:

$$\vec{p} + \vec{p}' = 0$$

Adesso risulta anche chiaro perché il termine della formula di Dyson con il prodotto normale di tutti operatori sia sempre nullo, infatti questo termine corrisponde a diagrammi in cui un vertice rimane non collegato dal propagatore.

In ciascuno di questi vertici il quadrimpulso non può mai conservarsi, quindi questi processi non possono avvenire. Questo è lo stesso motivo per cui non possono avvenire processi al primo ordine.

Procediamo a sviluppare l'espressione della sezione d'urto, interessiamoci alla delta di Dirac.

$$[(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)]^2$$

La prima delta che agisce mi impone che p_i sia uguale a p_f , la seconda delta però ha l'argomento che è automaticamente soddisfatto:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) (2\pi)^4 \delta^4(0)$$

$$\delta^4(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x = \frac{V \cdot T}{(2\pi)^4}$$

Questo spiega il termine VT comparso nell'espressione della probabilità totale.

Per ottenere la vera sezione d'urto basta dividere la probabilità totale per il flusso di particelle incidenti e per l'unità di tempo:

$$\sigma = \frac{P}{T\Phi} \quad \Phi = \frac{N}{V}c$$

Questa operazione elimina dalla probabilità totale il tempo e i volumi, ottenendo:

$$\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2 m^2 M^2}{(2\pi)^2 E^4} \delta^4(p_i - p_f) d^3k d^3k'$$

5.9.1 Normalizzazione sulle polarizzazioni

Per usare il formalismo dei diagrammi di Feynmann e arrivare ad avere la sezione d'urto del fenomeno dobbiamo conoscere gli impulsi di ogni quantità; quelli in entrata e uscita sono facili, li misuriamo in laboratorio. Per le quantità virtuali, nel nostro caso il fotone (vedi Figura 5.1) è un po più complicato. Infatti se fosse un fotone reale varrebbe:

$$q_0^2 - \vec{q}^2 = 0 \quad \text{quindi} \quad q^2 = 0$$

ma dal diagramma si ha $q = p + p'$ e nel sistema del centro di massa

$$q^2 = (E + E)^2 = 4E^2 > 0$$

quindi il fotone deve essere sempre un fotone virtuale quando è interno al diagramma.

Calcolata \mathcal{M} con il diagramma

$$\mathcal{M} = -ig_{\mu\nu}(-ie)^2 \frac{1}{q^2} \bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(k) \gamma^\nu v(k') (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)$$

se ci mettiamo nel baricentro è altrettanto semplice scrivere la sezione d'urto

$$\tilde{\sigma} = e^4 \frac{|u\bar{v}|^2 |\bar{u}v|^2}{\mathcal{V}^4} \left(\frac{m}{E} \frac{M}{E} \right)^2 \frac{1}{16E^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{V} T$$

tuttavia noi in laboratorio non possiamo risolvere esattamente l'energia delle particelle, quindi quello che facciamo è calcolare la sezione per un gruppo ristretto di stati iniziali e finali

$$\sigma = e^4 \frac{|u\bar{v}|^2 |\bar{u}v|^2}{\mathcal{V}^4} \left(\frac{m}{E} \frac{M}{E} \right)^2 \frac{1}{16E^4} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{V} T}{\frac{1}{\mathcal{V}^2}} \frac{\mathcal{V} d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{V} d^3 k'}{(2\pi)^3}$$

Dopo di che dobbiamo integrare su uno degli impulsi ricordando che

$$d^3 k = k \underbrace{kd k}_{EdE} d\Omega$$

Prima di far questo vediamo cosa diventano i pezzi con u e v:

$$|\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu v(k')|^2 = (\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu v(k')) (\bar{v}(p') \gamma^\nu u(p))^* (\bar{u}(k) \gamma_\nu v(k'))^*$$

Poichè si vogliono avere fasci non polarizzati occorre avere elettroni con spin metà up e metà down (stessa cosa per i muoni); quindi si somma sulle probabilità delle polarizzazioni possibili

$$\frac{1}{4} \sum_{rr'=1}^2 \sum_{ss'=1}^2 (\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu v(k')) (\bar{v}(p') \gamma^\nu u(p))^* (\bar{u}(k) \gamma_\nu v(k'))^* =$$

$$Tr \left(\gamma^\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^\nu \frac{\not{p} - m}{2m} \right)$$

avendo riconosciuto le espressioni di Λ^+ e Λ^- che sono proiettori. Chiaramente la traccia completa sarebbe la somma di quattro termini

$$Tr A = \sum_{i=1}^4 \langle i | A | i \rangle$$

ma poichè si vuole sommare solo su due indoco (quelli a energia negativa) si mettwa un porietttore sulle quantità che interessano

$$Tr A = \sum_{i=1}^2 \langle i | AP | i \rangle$$

che nella fattispecie è Λ^- . Anche il caso di particelle a massa nulla è ben definito poichè la m al denominatore si semplifica con le costanti di normalizzazione. La traccia più complicata può essere calcolata usando i Teoremi 5.4.1 e 5.4.2:

$$Tr(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(abcd - acbd + adbc)$$

$$\gamma^\mu = \gamma^\nu \delta_\nu^\mu = \not{\delta}^\mu$$

Abbiamo un termine in cui si moltiplicano i \not{p} con le matrici γ , i termini che contengono un numero dispari di matrici γ sono nulli:

$$Tr(\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p}') = 4(p^\mu p'^\nu - g^{\mu\nu} pp' + p'^\mu p^\nu)$$

L'altro termine non nullo è quello in cui le due matrici γ moltiplicano i due termini con M (tutti gli altri contengono un numero dispari di matrici γ e sono nulli):

$$-M^2 Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = -4M^2 g^{\mu\nu}$$

Adesso che abbiamo risolto questa traccia possiamo procedere al calcolo della sezione d'urto totale, integrando su tutti gli impulsi finali (angoli di urto). Questa sezione d'urto totale è pari a:

$$\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{4E^2} \left(1 - \frac{M^2}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{8}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{E^2}\right)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137}$$

Calcolata nell'ipotesi di massa nulla dell'elettrone. Questa espressione permette di vedere che risultato ci aspettiamo per elettrni molto energetici ($E \gg M$):

$$\sigma \propto \frac{\alpha^2}{E^2}$$

In questo limite si possono trattare anche i μ come se avessero massa nulla. Il coefficiente α , costante di struttura fine, è adimensionale. Per dimostrare che sia realmente adimensionale possiamo far vedere che la carica elettrica è anche essa adimensionale.

Avendo posto $\hbar = 1$ abbiamo reso adimensionale l'azione. L'azione dell'hamiltoniana di Dirac è:

$$S = \int d^4x \left[\bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e\bar{\psi} A \psi \right]$$

Il primo termine ci permette di trovare le dimensioni del campo di Dirac. L'azione è un integrale su un d^4x (L^4) per il campo al quadrato per una massa ($m \propto E \propto \nu \propto t^{-1} \propto L^{-1}$):

$$L^4 [\psi]^2 \frac{1}{L} = 1 \quad [\psi]^2 = L^{-3} \quad [\psi] = E^{\frac{3}{2}}$$

Dall'azione del fotone possiamo ricavare la dimensione del campo fotonico:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\partial A)^2$$

$$\frac{1}{L^2} [A]^2 L^4 = 1 \quad [A] = \frac{1}{L} = E$$

Infine dalla densità hamiltoniana di interazione ricaviamo l'unità di misura della carica elettrica:

$$\mathcal{H} = \frac{E}{L^3} = e\bar{\psi} A \psi$$

$$[e] E^{\frac{3}{2}} E E^{\frac{3}{2}} = E^4 \quad [e] E^{3+1} = E^4$$

$$[e] = 1$$

Questo implica che la carica elettrica è adimensionale in unità naturali.

5.10 Effetto Compton

L'effetto Compton è uno degli altri grandi successi dell'elettrodinamica quantistica che è riuscita per la prima volta a calcolare la sezione d'urto di un processo già noto in cinematica relativistica.

Se dovessimo ripetere i conti fatti nel caso dell'annichilazione elettrone positrone e generazione di $\mu^+ \mu^-$ usando la formula di Dyson

ci si impiegano circa 2 mesi di conti. L'approccio diagrammatico di Feynman permette invece di arrivare al risultato corretto in appena 2 ore. Sfruttiamo tutta la potenza dei diagrammi calcolati fino a questo momento.

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-$$

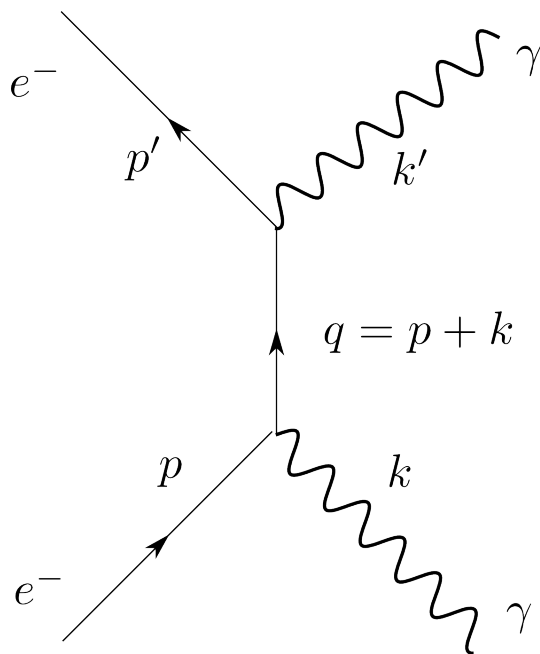


Figura 5.2: Diagramma di Feynman del processo Compton

Nella Figura 5.2 c'è un elettrone incidente con impulso p , elettrone incidente con impulso k , e si riuniscono in un propagatore fermionico di impulso q . L'espressione del propagatore fermionico è:

$$i\tilde{S}_f(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}$$

L'elettrone propagato è una particella virtuale, in quanto il suo quadrimpulso $q^2 = (p + k)^2 \neq m^2$.

In questo caso sia lo stato iniziale che finale ci sono fotoni reali, che devono trarre origine dai campi di creazione e annichilazione fotonici.

Ogni volta che il fotone reale interagisce con un vertice dobbiamo saturare l'indice della corrente elettronica con il quadripotenziale fotonico.

Scriviamo il propagatore del diagramma Figura 5.2:

$$(-ie)^2 \bar{u}_{p'} \gamma^\mu \varepsilon'_\mu(k') \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} \gamma^\nu \varepsilon_\nu(k) u_p$$

Che può essere riscritta:

$$(-ie)^2 \bar{u}_{p'} \not{\varepsilon}'_\mu(k') \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} \not{\varepsilon}_\nu(k) u_p$$

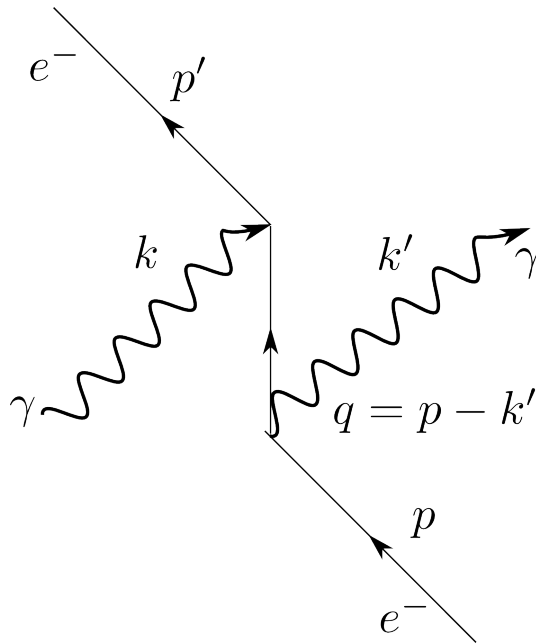


Figura 5.3: Diagramma di Feynman che descrive l'effetto Compton, in questo caso il fotone viene prima emesso, e in seguito assorbito.

Per l'effetto Compton esiste anche un altro diagramma che descrive il processo, e che deve essere tenuto in considerazione per scrivere la sezione d'urto finale (Figura 5.3). L'ampiezza invariante di Feynman per questo diagramma è:

$$(-ie)^2 \frac{i \bar{u}_{p'} \not{\varepsilon}'_\mu(k')}{\not{p} - \not{k}' - m} \not{\varepsilon}_\nu(k) u_p$$

Entrambe le ampiezze invarianti sono moltiplicate per il solito fattore δ :

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)$$

La sezione d'urto di questo processo è un po' più complicata. Occorre anche in questo caso mediare su tutte le possibili polarizzazioni degli elettroni (e fotoni) negli stati iniziali e finali. Vediamo di calcolare proprio questo termine:

$$\frac{1}{2} \sum_{r,r'} |\mathcal{M}_{\mu\nu} \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu}(k')|^2 = \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \mathcal{M}_{\mu\nu} \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu}(k') \mathcal{M}_{\rho\sigma}^* \varepsilon^\rho(k) \varepsilon'^{\sigma}(k')$$

Ci farebbe comodo una formula analoga a quella che abbiamo trovato per gli spinori anche per le polarizzazioni del fotone. Si può dimostrare che la somma su r sulle polarizzazioni si riduce alla forma:

$$\sum_r \varepsilon_r^\mu(k) \varepsilon_r^\rho(k) = -g^{\mu\rho}$$

I due tensori metrici della formula precedente alzano entrambi gli indici di una delle due ampiezze di Feynman:

$$\frac{1}{2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^+$$

In questo modo il calcolo è stato ricondotto esattamente a quello già elaborato nel caso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Apprestiamoci ora a dimostrare questa relazione. Una spiegazione intuitiva può essere vista da una proprietà generale di queste ampiezze. La regola dell'invarianza di Gauge dice questo: se al posto di uno degli epsilon si sostituisce il corrispondente quadrimpulso del fotone, il risultato che si ottiene è nullo.

$$\mathcal{M}_\mu \varepsilon^\mu \implies \mathcal{M}_\mu k^\mu = 0$$

Questo equivale a sostituire al posto del potenziale fotonico A^μ il vettore d'onda k^μ , è come prendere la derivata della trasformata di Fourier di A . Integrando per parti la derivata della trasformata otteniamo che questa espressione è analoga a prendere la divergenza di \mathcal{M} per A . Ma la divergenza di \mathcal{M} è nulla, poiché contiene la quadridivergenza della corrente elettronica:

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

Questo risultato si basa sulla conservazione della quadricorrente. Adesso dimostriamo che effettivamente sostituendo k a ε otteniamo zero. Il

termine M_μ è fatto da due termini, vediamo che si elidono a vicenda, valutiamo ora esplicitamente il primo termine:

$$(-ie)^2 \bar{u}_{p'} \not{\epsilon}'_\mu(k') \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} u_p \not{\epsilon}'_\nu(k) = \bar{u}_{p'} \not{\epsilon}'_\mu(k') \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \not{k} u_p$$

Dove abbiamo escluso il termine $(-ie^2)$, che è solo una costante moltiplicativa.

u_p soddisfa l'equazione di Dirac libera:

$$(\not{p} - m)u_p = 0$$

Siccome questo termine è nullo possiamo aggiungerlo all'espressione precedente, e ottenere il seguente risultato:

$$\text{equazione di Dirac}$$

$$\bar{u}_{p'} \not{\epsilon}'_\mu(k') \frac{\not{k} + \overbrace{\not{p} - m}}{\not{p} + \not{k} - m} u_p = \bar{u}_{p'} \not{\epsilon}'_\mu(k') u_p$$

L'altro termine è dato da:

$$(-ie)^2 i \bar{u}_{p'} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \not{\epsilon}' u_p$$

Sfruttiamo l'equazione di Dirac coniugata:

$$\bar{u}_p (\not{p} - m) = 0$$

E inseriamola nell'espressione precedente:

$$(-ie)^2 i \bar{u}_{p'} \frac{1}{\not{k} - \not{p}' + m} \not{\epsilon}'(k') u_p = -(-ie)^2 i \bar{u}_{p'} \not{\epsilon}'(k') u_p$$

Questo termine si annulla esattamente con quello mostrato prima. Abbiamo dimostrato che:

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$$

Cerchiamo ora il termine che somma le due polarizzazioni:

$$\sum_r \mathcal{M}_\mu \varepsilon^\mu(k) \mathcal{M}_\nu^* \varepsilon^\nu(k) = \mathcal{M}_\mu \mathcal{M}_\nu^* \sum_r \varepsilon_r^\mu(k) \varepsilon_r^\nu(k)$$

Dove

$$\sum_r \varepsilon_r^\mu(k) \varepsilon_r^\nu(k) = -g^{\mu\nu} + (\dots k \dots) + n^\mu n^\nu$$

Facciamo una scelta arbitraria su k_0 :

$$k_0 = |k|$$

Con questa scelta il termine in k^2 non dà contributo poiché è nullo: $k^2 = k_0^2 - |k|^2$. In questo modo abbiamo eliminato sia i termini quadratici che lineari in k . Ossia ammazzato tutte le dipendenze in k nel calcolo della sezione d'urto.

L'ultima difficoltà che non abbiamo ancora preso in considerazione riguarda il caso di propagatore fotonico con particelle identiche (scattering tra due elettroni). In particolare ci sono due diagrammi con due elettroni di partenza, di impulsi p_1 e p_2 che alla fine hanno impulsi k_1 e k_2 .

Un diagramma è quello in cui un elettrone ha impulsi:

$$p_1 \rightarrow k_1 \quad p_2 \rightarrow k_2$$

l'altro invece:

$$p_1 \rightarrow k_2 \quad p_2 \rightarrow k_1$$

Le ampiezze di questi due diagrammi vanno sottratte le une dalle altre per via del fatto che gli operatori di creazione fotonici anticommutano tra di loro. In fatti poiché i due elettroni sono fermioni, questi due stati corrispondono a scambi di particelle, e la loro ampiezza di probabilità è antisimmetrica per scambio.